

Trigonométrie

Exercice 1 :

on sait que $\widehat{CAB} = 50^\circ$; $\widehat{DBA} = 15^\circ$; $\widehat{ACB} = 90^\circ$ et $AB = 40 \text{ m}$.

Calculer le périmètre du triangle ABD Donner l'arrondi du résultat au décimètre près.

Dans le triangle rectangle ABC :

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$AC = 40 \cos 50$$

$$AC \simeq 25,71 \text{ m}$$

Dans le triangle ABD :

$$\widehat{ADB} = 180 - 50 - 15 = 180 - 65 = 115$$

$$\widehat{CDB} = 180 - 115 = 65^\circ$$

Dans le triangle rectangle ACB :

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$BC = AB \times \sin A$$

$$BC = 40 \times \sin 50^\circ$$

$$BC \simeq 30,64 \text{ m}$$

Dans le triangle rectangle BCD :

$$\tan \widehat{BDC} = \frac{BC}{DC}$$

$$\tan 65 = \frac{40 \times \sin 50^\circ}{DC}$$



$$DC \simeq 15,83 \text{ m}$$

De plus

$$DA = AC - DC = 25,71 - 15,83 = 9,88 \text{ m}$$

Dans le triangle BCD rectangle en C :

$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$

$$BD^2 = 30,64^2 + 15,83^2$$

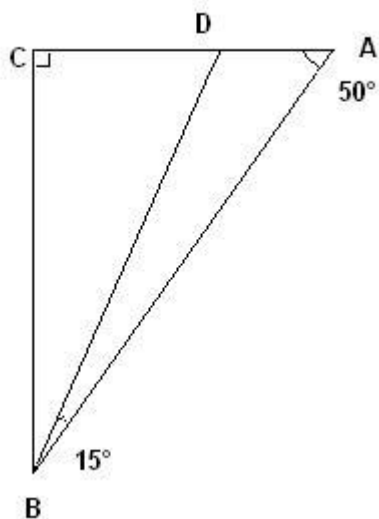
$$BD^2 = 1189,4$$

$$BD \simeq 34,5 \text{ m}$$

Le périmètre du triangle ABD est :

$$AD + DB + BA = 9,88 + 34,5 + 40 = 84,38 \text{ m .}$$

Conclusion : le périmètre est à peu près de 84,4 mètres .



Exercice 2 :

a. Dans le triangle rectangle DGE :

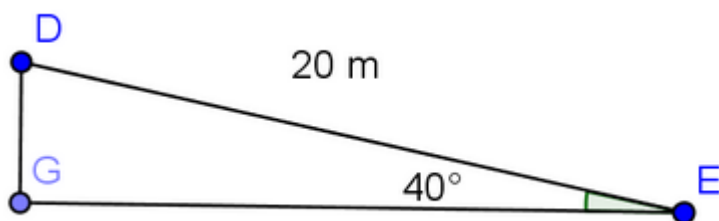
$$\sin \widehat{GED} = \frac{DG}{DE}$$

$$\sin 40 =$$

$$DG = 20 \sin 40$$

$$DG =$$

b. Représenter la situation par la figure à l'échelle 1/200. (Les données de la situation doivent être placées sur la figure.)



Exercice 3 :

1.a. A l'aide de la calculatrice, calculer $(\cos 67^\circ + \sin 67^\circ)^2 + (\cos 67^\circ - \sin 67^\circ)^2 = 2$
 $(\cos 35^\circ + \sin 35^\circ)^2 + (\cos 35^\circ - \sin 35^\circ)^2 = 2$

b. que constate-t-on?

Le résultat est toujours égal à 2 .

2.Démontrer que pour tout angle aigu x :

$$\begin{aligned} & (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 \\ &= \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x + 2\sin^2 x \\ &= 2(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= 2 \times 1 \text{ (car } \cos^2 x + \sin^2 x = 1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Démontrer que le triangle SON est rectangle.

Calcul de l'angle $\widehat{AOC}$:

$$\cos AOC = \frac{3}{6}$$

$$\widehat{AOC} = \cos^{-1} \frac{1}{2}$$

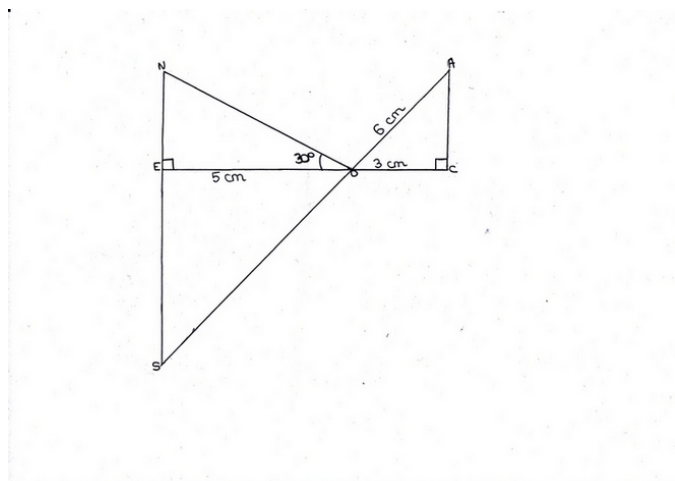
$$\widehat{AOC} = 60^\circ$$

Les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{EOS}$ sont opposés par le sommet donc égaux .

$$\widehat{EOS} = 60^\circ$$

$$\widehat{SON} = \widehat{EOS} + \widehat{NOE} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

Conclusion : le triangle NOS est un triangle rectangle en O .



Exercice 5 :

x est un angles tel que $\sin x = \frac{5}{8}$.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{25}{64}$$

$$\cos^2 x = \frac{64}{64} - \frac{25}{64}$$

$$\cos^2 x = \frac{39}{64}$$

Or le cosinus d'un angle aigu est positif :

$$\cos x = \sqrt{\frac{39}{64}}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

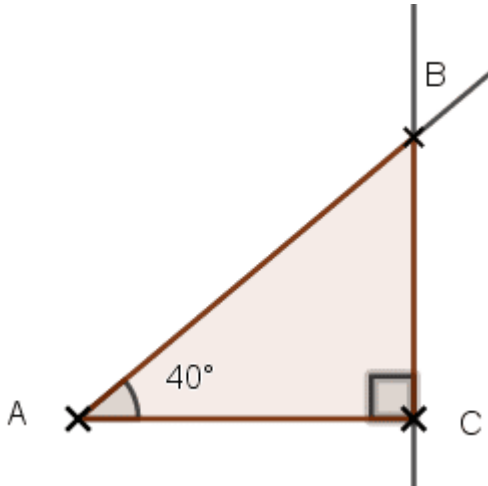
$$\tan x = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{\sqrt{39}}{8}}$$

$$\tan x = \frac{5}{\sqrt{39}}$$

$$\tan x = \frac{5\sqrt{39}}{39}$$

Exercice 6 :

1. Construisez un triangle ABC rectangle en C tel que $AC = 5 \text{ cm}$ et $\widehat{BAC} = 40^\circ$.



2. Calculez la longueur BC. (On donnera une valeur arrondie au millimètre).

D'après le cours $\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$ soit $\sin 40^\circ = BC/AC$ donc $BC = AC \times \sin 40^\circ = 5 \sin (40) \approx 3,2 \text{ cm}$

- 3.a) Où se trouve le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC? Justifiez.

Puisque le triangle est rectangle, une propriété du cours dit que l'hypothénuse est un diamètre du cercle circonscrit au triangle rectangle. (*circonscrit* signifiait que le cercle passe par les trois sommets du triangle).

Or si [AC] est le diamètre on a donc O qui est le milieu de [AC].

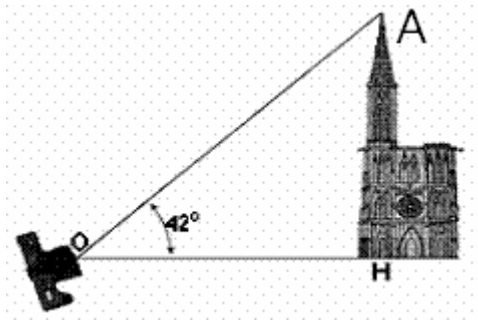
- b) Tracez ce cercle.

4. Déduisez-en la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$.

$OB = OA$ donc OAB est un triangle isocèle $\widehat{OBA} = 40^\circ$ implique que $\widehat{AOB} = 180^\circ - (2 \times 40^\circ)$ puisque la somme des angles d'un triangle fait toujours 180° . $\widehat{AOB} = 100^\circ$

et puisque les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont supplémentaires (ensemble ils forment un angle plat et leur somme fait donc 180°) on a $\widehat{BOC} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

Exercice 7 :



Quelle est la distance OH nécessaire pour que la cathédrale apparaisse entièrement dans l'objectif ?

Je dispose du **côté opposé** et de l'angle $\widehat{O}$.

Je cherche le côté adjacent à l'angle $\widehat{O}$.

Formule : tangente

$$\tan \widehat{O} = \frac{AH}{OH}$$

$$\tan 42 =$$

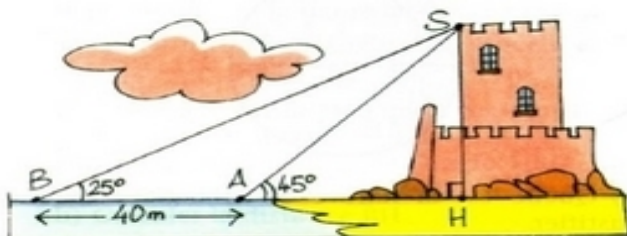
$$OH = \frac{140}{\tan 42}$$

$$OH = 155,5m$$

Conclusion :

La distance OH nécessaire pour que la cathédrale apparaisse entièrement dans l'objectif doit être supérieure à 155,5 mètres.

Exercice 8 :



a) Le triangle SAH est rectangle en H.

Donc °

Donc le triangle SAH est un triangle rectangle et isocèle en H.

$$BH=BA+AH=BA+HS=BA+x=40+x$$

$$b) AH=HS=x$$

c) Dans le triangle BSH rectangle en H.

$$\tan(\widehat{SBH}) = \frac{SH}{BH}$$

$$\tan(\widehat{SBH}) = \frac{x}{40+x}$$

$$(40+x)\tan(\widehat{SBH}) = x$$

$$, (40+x)\tan(25^\circ) = x$$

$$d) (40+x)\tan(25^\circ) = x$$

$$40\tan(25^\circ) + x\tan(25^\circ) = x$$

$$40\tan(25^\circ) + x\tan(25^\circ) = x,$$

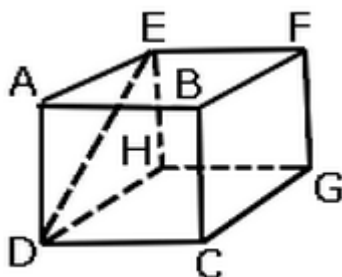
$$x(\tan(25^\circ) - 1) = -40\tan(25^\circ),$$

$$x = \frac{-40\tan(25^\circ)}{\tan(25^\circ) - 1}$$

$$, x \simeq 35 \text{ m}$$

La hauteur du donjon est à peu près de 35 mètres.

Exercice 9 :



Dans le pavé droit ci-dessus, on donne EH=69cm, EF=60cm et EA=51cm.

Quelle est la mesure de l'angle AED? (arrondir le résultat à l'unité)

$$\tan \widehat{AED} = \frac{AD}{AE}$$

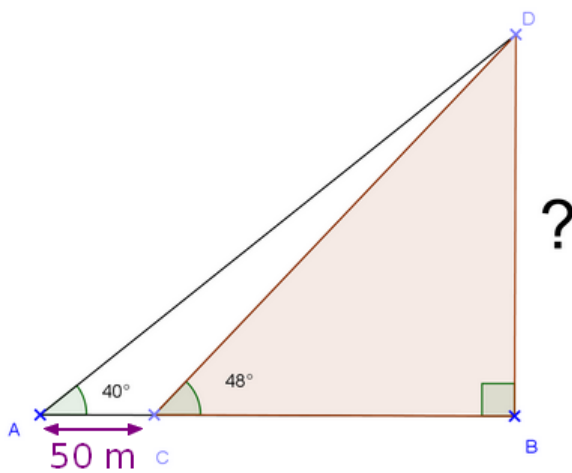
$$\tan \widehat{AED} = \frac{69}{51}$$

$$\widehat{AED} = \tan^{-1}\left(\frac{69}{51}\right)$$

$$\widehat{AED} = 54^{\circ}$$

Exercice 10 :

Aider Lisa à faire ce calcul en s'aidant du schéma ci-dessous :



Nous avons :

$$\tan 40 = \frac{BD}{BA} \text{ et } \tan 48 = \frac{BD}{BC}$$

à l'aide de ces deux égalités

$$BD = BA \times \tan 40 = \text{ et } BD = BC \times \tan 48$$

Déterminons BC :

$$(BC + 50) \tan 40 = BC \times \tan 48$$

$$BC \times \tan 40 + 50 \tan 40 = BC \times \tan 48$$

$$BC \times \tan 40 - BC \times \tan 48 =$$

$$BC(\tan 40 - \tan 48) = -50 \tan 40$$

$$BC = \frac{-50 \tan 40}{\tan 40 - \tan 48}$$

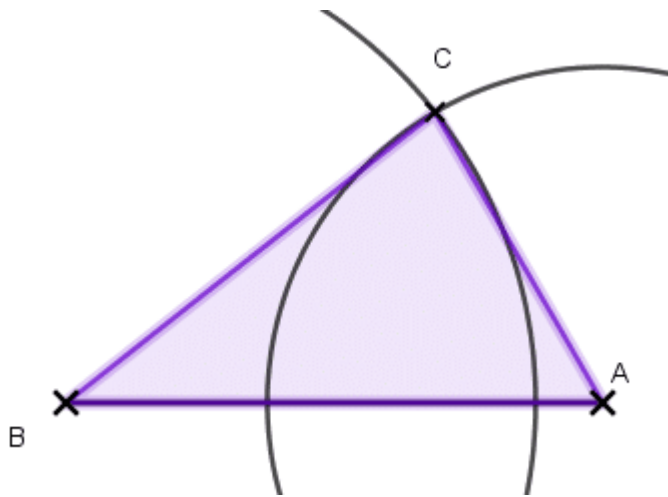
Déterminons BD :

$$\begin{aligned} BD &= BC \times \tan 48 \\ &= \frac{-50 \tan 40}{\tan 40 - \tan 48} \times \tan 48 \\ &\simeq 171,62 \end{aligned}$$

L'archange Saint Michel culmine à 171,62 mètres.

Exercice 11 :

1. Construire en vraie grandeur un triangle ABC tel que : AB = 7 cm ; BC = 8 cm et AC = 5 cm.



2. [BC] étant le côté dont la mesure est la plus grande on devrait avoir si le triangle était rectangle en A :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

or

$$8^2 \neq 7^2 + 5^2$$

Donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

2- Calcul de l'angle $\widehat{BAC}$: appliquons la formule

$$8^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos \widehat{BAC}$$

$$64 = 49 + 25 - 70 \cos \widehat{BAC}$$

$$64 - 49 - 25 = -70 \cos \widehat{BAC}$$

$$-10 = -70 \cos \widehat{BAC}$$

soit

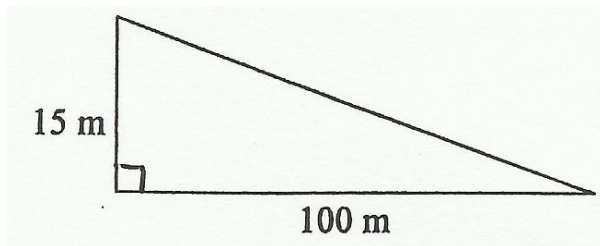
$$\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{7}$$

A l'aide de la calculatrice on trouve :

$$\widehat{BAC} = 81.79^\circ$$

Vous pourrez vérifier ce résultats en utilisant GEOGEBRA

Exercice 12 :



1) Dans le cas d'une pente à 15 %, quel angle fait la route avec l'horizontale?

Dans ce triangle rectangle, notons $\widehat{A}$ l'angle entre la route et l'horizontale.

Nous connaissons le côté adjacent et opposé à l'angle $\widehat{A}$, la formule à utiliser est donc la tangente.

$$\tan \widehat{A} = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$\widehat{A} = \tan^{-1}(0,3) \simeq 17^\circ$$

Conclusion : la route fait un angle, à peu près, de 17° avec l'horizontale.

2) On considère une descente dangereuse dès que la pente est supérieure à 10 % sur route et supérieure à 4 % sur autoroute.

A partir de quel angle entre chaussée et l'horizontale, considère-t-on qu'une descente est dangereuse sur route? sur autoroute?

$$\widehat{A} = \tan^{-1}(0,1) \simeq 6^\circ$$

$$\widehat{B} = \tan^{-1}(0,04) \simeq 3^\circ$$

Conclusion : une descente sur une route est dangereuse dès que l'angle est supérieur à 6° et supérieur à 3° pour une autoroute.

3) Est-il plus dangereux de circuler sur une route qui a une pente de 20 % ou de rouler sur une autoroute faisant un angle de 20 degrés avec l'horizontale ? Justifier

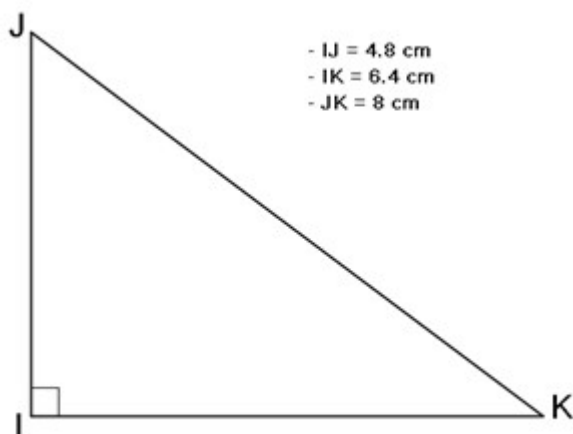
$$\hat{A} = \tan^{-1}(0,2) \simeq 3^\circ \simeq 12^\circ$$

Conclusion : Sur une autoroute la vitesse est beaucoup plus élevée donc c'est plus dangereux sur une autoroute.



Exercice 13 :

1°) Votre triangle devrait ressembler à celui-ci :



2°) Pour démontrer que le triangle IJK est un triangle rectangle, on va utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

La démonstration se fait de la sorte :

Dans le triangle IJK, on applique la réciproque du théorème de Pythagore, on a alors :

$$JK^2 = 8^2 = 64 \text{ ET } IJ^2 + IK^2 = 4.8^2 + 6.4^2 = 23.04 + 40.96 = 64$$

Or $JK^2 = IJ^2 + IK^2$, donc le triangle JIK est bien rectangle en I.

3°) On veut maintenant savoir quelle est la mesure de l'angle $\widehat{IJK}$.

Trois possibilités de résolution, on utilise :

$$\cos(\widehat{IJK}) = \frac{IJ}{JK} = \frac{4.8}{8} = \frac{3}{5} \text{ et } \widehat{IJK} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \simeq 53^\circ$$

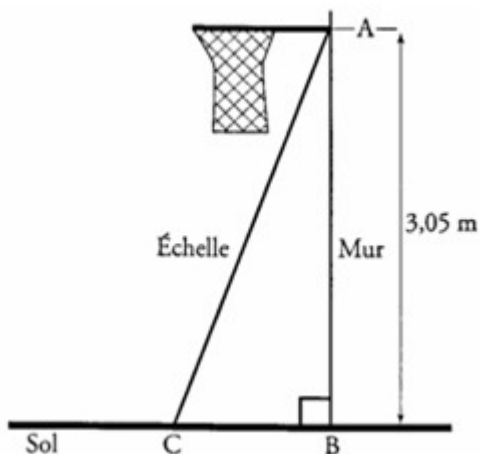
OU

$$\sin(\widehat{IJK}) = \frac{IK}{JK} = \frac{6.4}{8} = \frac{4}{5} \text{ et } \widehat{IJK} = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \simeq 53^\circ$$

OU

$$\tan(\widehat{IJK}) = \frac{IK}{IJ} = \frac{6.4}{4.8} = \frac{4}{3} \text{ et } \widehat{IJK} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \simeq 53^\circ$$

Exercice 14 :



1°) On sait que le mur (AB) et que le sol sont perpendiculaires.

On sait aussi que le mur mesure 3.05 m et que l'échelle [AC] mesure 3.20m de long.

Donc pour savoir à quelle distance du pied du mur doit se placer l'échelle pour que son sommet soit juste au niveau du panier, on va utiliser le théorème de Pythagore. Mais avant on convertit : $AB = 3.05 \text{ m} = 305 \text{ cm}$ et $CA = 3.20 \text{ m} = 320 \text{ cm}$.

Dans le triangle ABC rectangle en B, on applique le théorème de Pythagore, on a :

$$CB^2 + AB^2 = CA^2$$

$$CB^2 + 305^2 = 320^2$$

$$CB^2 + 93025 = 102400$$

$$CB^2 = 102400 - 93025 = 9375$$

or $CB > 0$ donc $CB = \sqrt{9375} \approx 97 \text{ cm}$

2°) L'angle formé par l'échelle et le sol est donc l'angle $\widehat{ACB}$.

Nous avons les trois mesures des trois cotés du triangle,
ce qui nous offre trois possibilités.

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{CB}{CA} = \frac{97}{320} \text{ et } \widehat{ACB} = \cos^{-1}\left(\frac{97}{320}\right) \simeq 72^\circ$$

OU

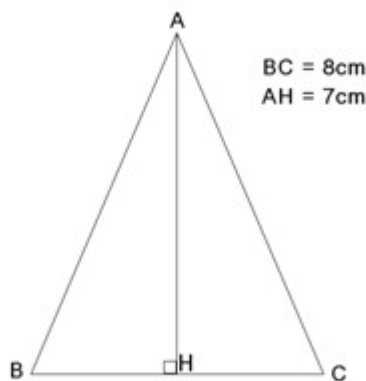
$$\sin(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{AC} = \frac{305}{320} = \frac{61}{64} \text{ et } \widehat{ACB} = \sin^{-1}\left(\frac{61}{64}\right) \simeq 72^\circ$$

OU

$$\tan(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{CB} = \frac{305}{97} \text{ et } \widehat{ACB} = \tan^{-1}\left(\frac{305}{97}\right) \simeq 72^\circ$$

Exercice 15 :

1°) Votre triangle devrais ressembler à celui-ci.



Les angles $\widehat{AHC}$ et $\widehat{AHB}$ forment deux angles droits car (AH) est la hauteur de [BC] issue du sommet A.

Or la hauteur est la droite issue d'un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.

On sait aussi que $BH = HC = BC/2$ car dans un triangle isocèle,

la hauteur issue du sommet principal coupe sa base en deux parties égales car c'est également une médiatrice.

2°) Calcul de $\widehat{B}$

On sait que la tangente d'un angle est égale au quotient du coté opposé de celui-ci par le coté adjacent de celui-ci.

Donc :

$$\tan \widehat{B} = \frac{AH}{BH} = \frac{7}{8/2} = \frac{7}{4}$$

On en déduit $\widehat{B} = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{7}{4}\right) \approx 60$ degrés.

Exercice 16 :

1°) Un rectangle avec sa diagonale ... pas besoin de correction !!!

2°) Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{ACD}$:

On connaît le côté adjacent et le côté opposé de cet angle, ce qui nous ramène à calculer la tangente de cet angle.

$$\text{Tan}\widehat{ACD} = \frac{AB}{BC} = \frac{7,2}{5,4} = \frac{4}{3}$$

On en déduit $\widehat{ACD} = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53$ degrés.

3°) Démontrez que les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux. 1. méthode (la plus simple) Les droites (AB) et (DC) sont parallèles et le segment [AC] coupe $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ en deux angles chacun.

On peut donc dire que ces deux angles sont alternes internes et donc égaux.

2. méthode (pour les accros !!)

On calcule [AC] avec Pythagore :

Dans le triangle rectangle ACB (ou ADC, se sont les mêmes), on applique le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 7,2^2 + 5,4^2$$

$$AC^2 = 51,84 + 29,16 = 81 \text{ or } AC > 0, \text{ donc}$$

$$AC = \sqrt{81} = 9 \text{ cm.}$$

Nous avons maintenant toutes les mesures des côtés du rectangle.

Donc, si les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{CAB}$ étaient égaux, le sinus de l'un serait égal au sinus de l'autre et IDEM avec les cosinus.

Vérifions :

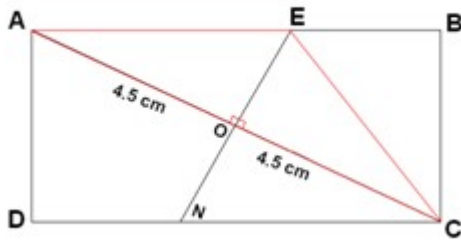
$$A = (\sin \widehat{ACD})^2 + (\cos \widehat{CAB})^2$$

$$A = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

$$A = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{7,2}{9}\right)^2$$

$$A = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$$

En effet les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux.



Exercice 18 :

Calculer, pour chaque figure, la mesure de l'angle marqué

(arrondir le résultat au degré près).

1. Dans le triangle rectangle IAB, je connais le côté **opposé** et **adjacent** à l'angle $\widehat{ABI}$.

Formule : tangente.

$$\tan \widehat{ABI} = \frac{2,1}{2,8} \text{ donc } \widehat{ABI} = \tan^{-1}\left(\frac{2,1}{2,8}\right) \simeq 37^\circ.$$

2. Dans le triangle rectangle DCL, je connais le côté **hypoténuse** et **opposé** à l'angle $\widehat{DLC}$.

Formule : sinus.

$$\sin(\widehat{DLC}) = \sin\left(\frac{8}{9}\right) \text{ donc } \widehat{DLC} = \sin^{-1}\left(\frac{8}{9}\right) \simeq 63^\circ.$$

3. Dans le triangle rectangle EFJ, je connais le côté **hypoténuse** et **opposé** à l'angle $\widehat{JEF}$.

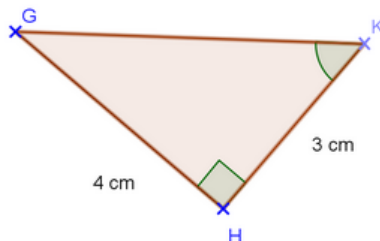
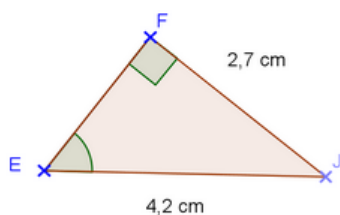
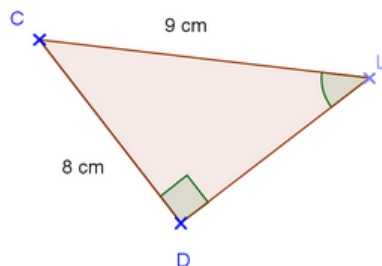
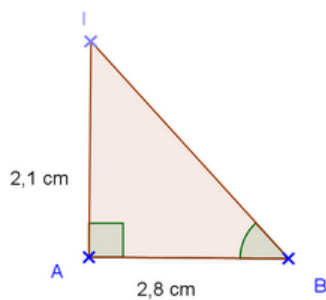
Formule : sinus.

$$\sin(\widehat{JEF}) = \frac{2,7}{4,2} \text{ donc } \widehat{JEF} = \sin^{-1}\left(\frac{2,7}{4,2}\right) \simeq 40^\circ.$$

3. Dans le triangle rectangle GHK, je connais le côté **adjacent** et **opposé** à l'angle $\widehat{HKG}$.

Formule : tangente.

$$\tan(\widehat{HKG}) = \frac{4}{3} \text{ donc } \widehat{HKG} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \simeq 53^\circ$$



Exercice 20 :

1. Calculer la mesure de $\widehat{IGH}$.

Dans le triangle rectangle IGH, je connais le côté **opposé** à $\widehat{IGH}$ et l' **hypoténuse**.

Formule : sinus.

$$\sin(\widehat{IGH}) = \frac{3}{6} \text{ donc } \widehat{IGH} = \sin^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) = 30^\circ.$$

2. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{EGF}$.

Les angles $\widehat{EGF}$ et $\widehat{IGH}$ sont opposés par le sommet, ils ont donc la même mesure $\widehat{EGF} = 30^\circ$.

3. Calculer les longueurs EF et FG arrondies au dixième.

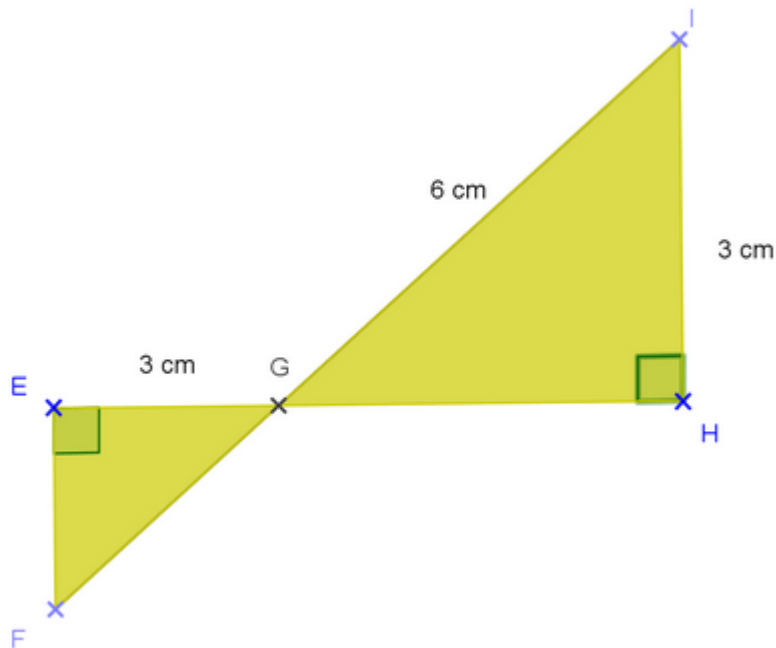
Dans le triangle GEF rectangle en E.

$$\cos(\widehat{EGF}) = \frac{EG}{FG} \text{ et } \tan(\widehat{EGF}) = \frac{EF}{EG}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{3}{FG} \text{ et } \tan(30^\circ) = \frac{EF}{3}$$

$$FG = \frac{3}{\cos 30^\circ} \simeq 3,5 \text{ cm.}$$

$$EF = 3 \tan(30^\circ) \simeq 1,7 \text{ cm}$$



Exercice 21 :

Calculer la longueur OM arrondie au millimètre .

Calculons PM :

Dans le triangle rectangle PAM, je connais le côté **opposé** et l'angle $\widehat{APM} = 47^\circ$

et je cherche l '**hypoténuse** .

Formule : sinus

$$\sin(\widehat{APM}) = \frac{4,6}{PM}$$

$$\sin(47^\circ) = \frac{4,6}{PM} \text{ donc}$$

$$PM = \frac{4,6}{\sin(47^\circ)} \simeq 6,29 \text{ cm}$$

Calculons OM :

Dans le triangle rectangle POM, je connais l' **hypoténuse** et l'angle $\widehat{PMO} = 23^\circ$

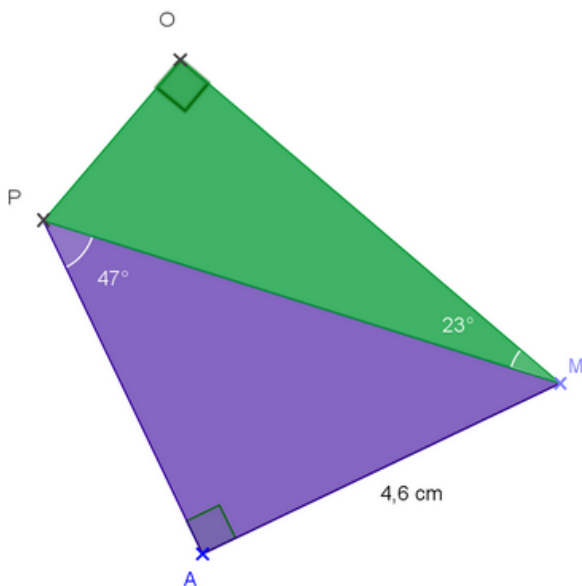
et je cherche le côté **adjacent** à l'angle $\widehat{PMO}$.

Formule : cosinus.

$$\cos(\widehat{PMO}) = \frac{OM}{PM}$$

$$\cos(23^\circ) = \frac{OM}{6,29}$$

$$OM \simeq 6,29 \times \cos(23^\circ) \simeq 5,8 \text{ cm}$$



Exercice 22 :

On donne BD = 4 cm , BA = 6 cm et .

1. Montrer que BC= 8 cm.

Dans le triangle DCB rectangle,

$$\cos 60^\circ = \frac{DB}{BC}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{4}{BC}$$

$$BC = \frac{4}{\cos 60^\circ}$$

$$BC =$$

2. Calculer CD. Donner la valeur arrondie au dixième.

$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{DB}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{4}$$

$$CD = 4 \tan 60^\circ$$

$$CD \simeq 6,9 \text{ cm}$$

3. Calculer AC.

Dans le triangle ABC rectangle en B d'après la partie directe du théorème de Pythagore :

$$AC^2 = BC^2 + BA^2$$

$$AC^2 = 8^2 + 6^2$$

$$AC^2 = 64 + 36$$

$$AC = \sqrt{100}$$

$$AC =$$

4. Quelle est la valeur de $\tan \widehat{BAC}$?

$$\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{BA}$$

$$\tan \widehat{BAC} = \frac{8:2}{6:2}$$

$$\tan \widehat{BAC} = \frac{4}{3}$$

5. En déduire la valeur arrondie au degré de $\widehat{BAC}$.

$$\widehat{BAC} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\widehat{BAC} = 53^\circ$$

