

Trigonométrie

Exercice 1 :

Résoudre dans $\boxed{\times}$ les équations suivantes.

$$1. \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$2. \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6} \right\}$$

Exercice 2 :

Dans cet exercice, on donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

$$\cos 2X = \cos^2 X - 1$$

donc

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1$$

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1$$

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{16} - 1$$

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1+2\sqrt{5}+5-16}{16}$$

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{2\sqrt{5}-10}{16}$$

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-5}{8}$$

Indication : pour $\cos \frac{3\pi}{5}$, utiliser la formule d'addition $\cos(x+y)$ avec $x = \frac{\pi}{5}$ et $y = \frac{2\pi}{5}$.

Exercice 3 :

Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

1. Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Démontrer que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

2. En déduire que :

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}.$$

Utiliser l'égalité du 1. en prenant $x = \frac{\pi}{12}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{12}}$$

$$\text{donc } \tan\left(\frac{6\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{12}}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{12}}$$

et en utilisant la donnée de l'énoncé :

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

Multiplions par la quantité conjuguée et utilisons l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{1}$$

Conclusion : $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2+\sqrt{3}$.

Exercice 4 :

Résoudre dans $\boxed{\times}$ l'équation : $\sin(2x) = \cos(x)$.

$$2\sin x \cos x = \cos x$$

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x (2\sin x - 1) = 0$$

C'est une équation produit.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins, est nul.

$$\cos x = 0 \text{ ou } 2\sin x - 1 = 0$$

$$\cos x = 0 \text{ ou } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

Exercice 5 :

Résoudre dans $\boxed{\times}$ les équations suivantes :

Indication : faire des changements de variable et utiliser les formules trigonométriques.

Pour la 1, poser $X = \cos x$.

$$1.2\cos^3 x - 7\cos^2 x + 2\cos x + 3 = 0.$$

$$2.2\sin^3 x + \cos^2 x 5\sin x - 3 = 0.$$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2\sin^3 x - 17\sin^2 x + 7\sin x + 8 = 0.$$

Posons $X = \sin x$

Nous sommes amenés à résoudre :

$$2X^3 - 17X^2 + 7X + 8 = 0$$

Une racine évidente est $X = 1$.

$$2X^3 - 17X^2 + 7X + 8 = (X-1)(aX^2 + bX + c)$$

$$a = 2$$

$$-c = 8 \text{ donc } c = -8$$

$$c - b = 7 \text{ donc } -8 - b = 7 \text{ ainsi } b = -8 - 7 = -15$$

Donc

$$2X^3 - 17X^2 + 7X + 8 = (X-1)(2X^2 - 15X - 8)$$

Calculons la valeur du discriminant :

$$\Delta = (-15)^2 + 4 \times 2 \times 8 =$$

Le discriminant est positif, il existe deux racines réelles distinctes.

$$X_1 = \frac{15+17}{4} = 8, X_2 = \frac{15-17}{4} = -\frac{1}{2}$$

donc

$$2X^3 - 17X^2 + 7X + 8 = (X-1)(X-8)(x+\frac{1}{2})$$

donc nous obtenons :

$$\sin x = -1 \text{ ou } \sin x = 8 \text{ ou } \sin x = -\frac{1}{2}$$

or $-1 \leq \sin x \leq 1$

donc soit

$$\sin x = -1 \text{ ou } \sin x = -\frac{1}{2}$$

Conclusion :

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Exercice 7 :

1. On peut déterminer les mesures des angles demandés en utilisant les propriétés des triangles rectangles et de l'angle au centre dans un cercle.

Tout d'abord, le triangle ABC est équilatéral, donc chacun de ses angles mesure 60 degrés.

Dans le triangle BCI, on a un angle droit en I et deux côtés de même longueur (BI = CI car le triangle est isocèle en B), donc c'est un triangle rectangle isocèle, ce qui implique que l'angle $\widehat{BCI}$ mesure 45 degrés.

De même, dans le triangle ACJ, on a un angle droit en J et deux côtés de même longueur (AJ = CJ car le triangle est isocèle en J), donc c'est un triangle rectangle isocèle, ce qui implique que l'angle $\widehat{ACJ}$ mesure 45 degrés.

Pour déterminer l'angle $\widehat{AIB}$, on peut observer que ce triangle est isocèle en I car AI = IB. On peut également remarquer que ce triangle est inscrit dans le cercle de centre O passant par A, B et I. L'angle $\widehat{AIB}$ mesure donc la moitié de l'angle au centre qui intercepte l'arc AB. Cet arc mesure 60 degrés (car ABC est équilatéral), donc l'angle $\widehat{AIB}$ mesure 30 degrés.

Enfin, pour déterminer l'angle $\widehat{BCJ}$, on peut utiliser la propriété de l'angle inscrit dans un cercle : l'angle $\widehat{BCJ}$ mesure la moitié de l'arc BC du cercle circonscrit au triangle ABC. Comme ABC est équilatéral, l'arc BC mesure 60 degrés, donc l'angle $\widehat{BCJ}$ mesure 30 degrés.

De même, l'angle $\widehat{CBI}$ mesure la moitié de l'arc BI du cercle circonscrit au triangle BCI. Cet arc mesure 90 degrés (car le triangle est rectangle en I), donc l'angle $\widehat{CBI}$ mesure 45 degrés.

Ainsi, on a :

- $\widehat{BAC} = 60$ degrés
- $\widehat{BCI} = 45$ degrés
- $\widehat{ACJ} = 45$ degrés

- $\widehat{AIB} = 30 \text{ degrés}$
- $\widehat{BCJ} = 30 \text{ degrés}$
- $\widehat{CBI} = 45 \text{ degrés}$

2. On doit montrer que les points A, I et J sont alignés.

Pour cela, on peut utiliser le fait que dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est également le centre du cercle circonscrit et donc que la droite passant par le milieu de l'hypoténuse et l'angle droit est un diamètre de ce cercle.

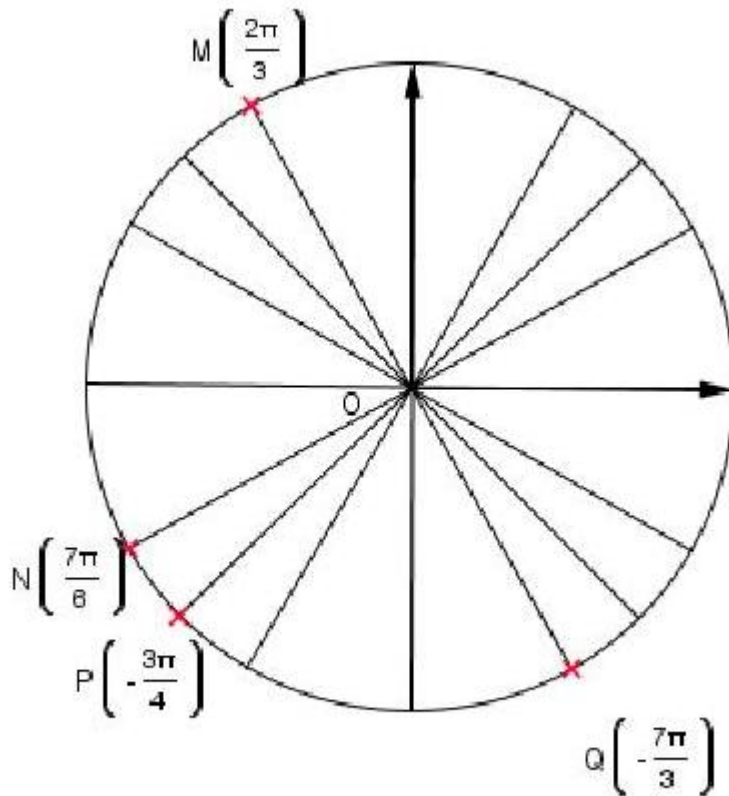
Dans le triangle ACJ, on a un angle droit en J et les côtés AJ et CJ sont de même longueur. Par conséquent, le point milieu M de [AC] est également le centre du cercle circonscrit au triangle ACJ. De plus, la droite (JM) est un diamètre de ce cercle.

Dans le triangle BCI, on a un angle droit en I et les côtés BI et CI sont de même longueur. Par conséquent, le point milieu N de [BC] est également le centre du cercle circonscrit au triangle BCI. De plus, la droite (IN) est un diamètre de ce cercle.

Comme ces deux cercles ont le même diamètre (car les côtés BI et CJ sont de même longueur), les droites (JM) et (IN) se coupent en leur milieu K, qui est également le centre de ces cercles.

Mais ce point K est également le milieu de [AJ] et de [CI]. Par conséquent, les points A, I et J sont alignés sur la droite (AK), qui est la droite passant par les milieux de [AJ] et [CI].

Exercice 8 :



Exercice 9 :

On peut utiliser les propriétés du cercle trigonométrique pour déterminer les mesures principales des angles donnés :

1. Pour l'angle $\alpha = \frac{114\pi}{4}$, il y a deux façons de trouver une mesure principale :

- On peut diviser l'angle par 2π pour obtenir $\alpha = \frac{57}{2}\pi + 0\pi$.

Comme 0π est une mesure principale, on peut donc dire que α a pour mesure principale $\frac{57}{2}\pi$.

- On peut soustraire 2π (ou un multiple de 2π) de l'angle jusqu'à ce que l'angle obtenu soit entre 0 inclus et 2π exclus.

On a alors $\alpha' = \alpha - 28\pi = \frac{2}{4}\pi$, qui est une mesure principale.

Donc, α a également pour mesure principale $\frac{57}{2}\pi$.

2. Pour l'angle $\beta = -\frac{91\pi}{6}$, on peut ajouter 2π (ou un multiple de 2π) à l'angle jusqu'à ce que l'angle obtenu soit entre $-\pi$ inclus et π exclus.

On a alors $\beta' = \beta + 30\pi = \frac{59}{6}\pi$, qui est une mesure principale. Donc, β a pour mesure principale $\frac{59}{6}\pi$.

3. Pour l'angle $\gamma = 70$, on peut ajouter un multiple de 360 degrés (ou un multiple de 2π) à l'angle jusqu'à ce que l'angle obtenu soit entre 0 inclus et 360 degrés exclus (ou entre 0 inclus et 2π exclus). Comme 70 est déjà une mesure entre 0 et 360 degrés, l'angle γ a pour mesure principale 70 degrés (ou $\frac{7\pi}{18}$).

Exercice 10 :

ABC est un triangle avec $BC = 4, \widehat{B} = \frac{\pi}{4}; \widehat{C} = \frac{\pi}{3}$.

1. Démontrer que $\sin \widehat{A} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

2. Calculer les valeurs exactes de AB et AC.

Indications :

Utiliser les formules d'Al-Kashi et le théorème de Pythagore généralisé.

Exercice 11 :

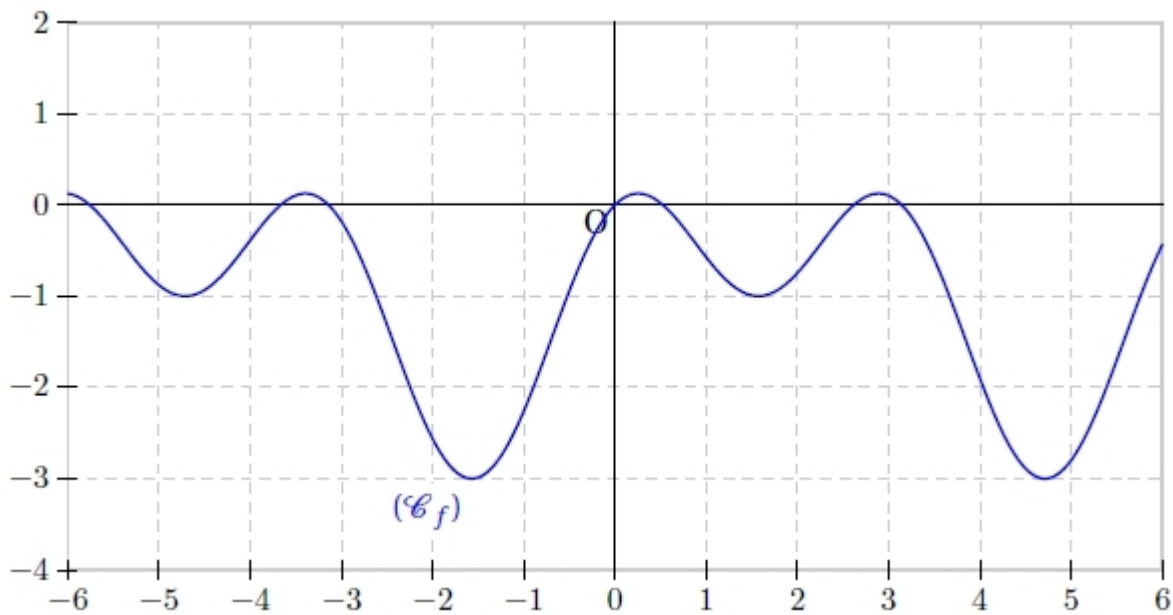
Démontrer que la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(2x) + \sin x - 1$$

est située entre les droites d'équation $y = -3$ et $y = 1$.

Tout cela vient du fait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Il suffit d'additionner chaque membre.



Exercice 12 :

Démontrer que, pour tout réel x :

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x).$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2$$

Utilisons l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2 = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x) \times 1 \quad \text{car} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \boxed{\times}$$

Conclusion : $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x).$

Exercice 13 :

En utilisant les formules d'addition, calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Exercice 14 :

Soit ABC un triangle quelconque.

Dans les triangles AEB et BEC rectangles en E ,

en appliquant le théorème de Pythagore :

$$\begin{cases} h^2 = c^2 - x^2 \\ h^2 = a^2 - (b-x)^2. \end{cases}$$

donc par égalité, nous en déduisons que :

$$c^2 - x^2 = a^2 - (b-x)^2$$

$$c^2 - x^2 = a^2 - (b^2 - 2bx + x^2)$$

$$c^2 - x^2 = a^2 - b^2 + 2bx - x^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2bx - x^2 + x^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2bx \quad (*)$$

Dans le triangle AEB rectangle en E, en utilisant la trigonométrie dans le triangle rectangle :

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{c}$$

donc

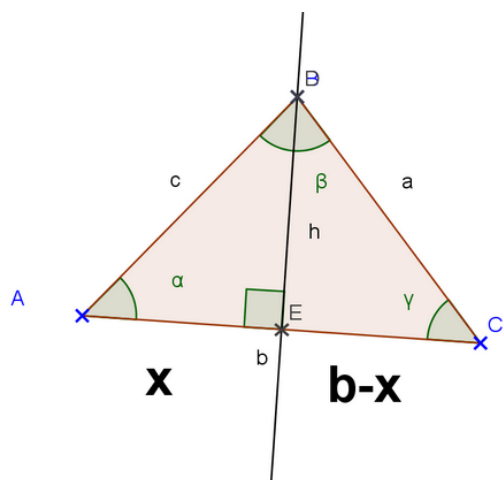
$$x = c \times \cos(\alpha)$$

Reprenons l'égalité (*)

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2bc \times \cos(\alpha)$$

Remarque : ce sont les mêmes démonstrations pour les autres formules d'Al-Kashi,

que l'on appelle également formules de Pythagore généralisées.



Exercice 15 :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \times \cos x}{\sin x \times \cos x} + \frac{\cos 3x \times \sin x}{\cos x \times \sin x}$$

$$= \frac{\sin 3x \times \cos x + \cos 3x \times \sin x}{\sin x \times \cos x}$$

$$= \frac{\sin(3x+x)}{\sin x \times \cos x}$$

$$= \frac{\sin(4x)}{\frac{\sin(2x)}{2}}$$

$$= 2 \frac{\sin(4x)}{\sin(2x)}$$

$$= 2 \frac{2\sin(2x)\cos(2x)}{\sin(2x)}$$

$$= 4\cos(2x)$$

Exercice 16 :

On peut utiliser la formule de l'angle orienté entre deux vecteurs pour calculer la mesure principale de

$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$:

$$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD})$$

En utilisant les données fournies, on peut écrire :

$$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CB}) = -(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DC}) = -\frac{\pi}{8}$$

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{4} \quad (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

En substituant ces valeurs dans la formule de l'angle orienté, on obtient :

$$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{24}$$

Comme cette mesure n'est pas comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, on doit la ramener dans cette intervalle en ajoutant ou soustrayant un multiple de 2π . On peut écrire :

$$\frac{11\pi}{24} = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2} = -\frac{23\pi}{24} + \pi$$

Donc, la mesure principale de $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ est $\frac{\pi}{24}$ ou $-\frac{23\pi}{24}$.

Exercice 17 :

1. On peut utiliser la loi des sinus pour trouver $\sin A$:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

En substituant les valeurs définies, on a :

$$\frac{4}{\sin A} = \frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

En résolvant pour AB et AC, on obtient :

$$AB = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ et } AC = 2\sqrt{2}$$

En remplaçant dans la première équation de la loi des sinus, on trouve :

$$\frac{4}{\sin A} = \frac{4\sqrt{3}/3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

Donc,

$$\sin A = \frac{4}{\frac{8}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Puisque A appartient à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, alors $\sin(A)$ est positif.

$$\text{Ainsi, } \sin(A) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

2. On peut utiliser le théorème de Pythagore pour trouver la longueur de AB :

$$\begin{aligned}AB^2 &= BC^2 + AC^2 - 2 \times BC \times AC \times \cos(\widehat{B}) \\&= 4^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 4 \times 2\sqrt{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\&= 16 - 16\sqrt{2} + 16 \\&= 32 - 16\sqrt{2}\end{aligned}$$

On peut utiliser le même théorème de Pythagore pour trouver la longueur de AC :

$$\begin{aligned}AC^2 &= BC^2 + AB^2 - 2 \times BC \times AB \times \cos(\widehat{C}) \\&= 4^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \times 4 \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\&= 16 - \frac{64}{3} + 16 = \frac{32}{3}\end{aligned}$$

3. L'aire du triangle ABC est donnée par la formule :

$$A = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin(\widehat{C}) = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times 2\sqrt{2} \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Exercice 18 :

On peut utiliser la formule de l'aire d'un triangle pour trouver la longueur du troisième côté $a = BC$:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin(\widehat{C}) = \frac{1}{2}13 \cdot 2 \sin(\widehat{C}) = 13\sin(\widehat{C})$$

$$\text{Donc, } \sin(\widehat{C}) = \frac{S}{13} = \frac{5}{13}.$$

Comme $\sin(\widehat{C})$ est compris entre 0 et 1, alors il existe un unique angle A tel que $\widehat{A} = \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$.

On peut utiliser la loi des cosinus pour trouver la longueur du troisième côté :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A}) = 2^2 + 13^2 - 2 \times 2 \times 13 \times \cos\left(\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\right) = 174 - 52\sqrt{3}$$

Donc, la seule longueur possible pour le troisième côté est $a = \sqrt{174 - 52\sqrt{3}}$.

Exercice 19 :

On peut utiliser la loi des cosinus pour trouver la longueur du troisième côté BC :

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{A}) \\&= 7^2 + 4^2 - 2 \times 7 \times 4 \times \cos(60^\circ) \\&= 49 + 16 - 56 \cdot \frac{1}{2} \\&= 17\end{aligned}$$

Donc, $BC = \sqrt{17}$.

On peut utiliser la loi des sinus pour trouver $\sin(\widehat{B})$:

$$\frac{BC}{\sin(\widehat{B})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{A})} \Rightarrow \sin(\widehat{B}) = \frac{BC \times \sin(\widehat{A})}{AB} = \frac{\sqrt{17} \times \sqrt{3}}{7} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

Exercice 20 :

Soient α et β deux angles supplémentaires. Cela signifie que $\alpha + \beta = 180^\circ$. Alors, on peut écrire :

$$\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \beta) = \sin(\beta)$$

En effet,

$$\sin(180^\circ - \beta) = \sin(180^\circ)\cos(\beta) - \cos(180^\circ)\sin(\beta) = 0 - (-\sin(\beta)) = \sin(\beta)$$

Maintenant, pour démontrer la formule de l'aire du quadrilatère ABCD, on peut diviser le quadrilatère en deux triangles en traçant la diagonale AC. Alors, on peut écrire :

$$S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$$

$$\text{où } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin(\widehat{BAC}) \text{ et } S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin(\widehat{DAC}).$$

$$\text{Donc, } S = \frac{1}{2} AC \times BD \times (\sin(\widehat{BAC}) + \sin(\widehat{DAC})).$$

Mais on sait que les angles BAC et DAC sont supplémentaires, donc on peut utiliser la relation démontrée au début pour écrire :

$$\sin(\widehat{BAC}) + \sin(\widehat{DAC}) = \sin(\widehat{BAC}) + \sin(180^\circ - \widehat{BAC}) = 2\sin(\widehat{BAC})$$

Donc,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AC \times BD \times 2\sin(\widehat{BAC}) \\ &= AC \times BD \times \sin(\textcircled{N}) \end{aligned}$$

, où $\textcircled{N}$ est l'angle formé par les diagonales AC et BD.

Exercice 21 :

Le promeneur forme un triangle isocèle avec son point de départ et le point où il a fini de marcher. La première étape de son trajet forme un côté est de ce triangle, la deuxième étape forme un côté nord-est, et la ligne droite qu'il prend pour revenir forme la base de ce triangle.

On peut utiliser le théorème de Pythagore pour trouver la longueur de chaque côté de ce triangle :

côté est : 5 km

côté nord-est : $2 \times \sqrt{2} \text{ km}$

base : $\sqrt{(5+2)^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{45+8} = \sqrt{53} \text{ km}$

La distance totale parcourue en courant pour rentrer au point de départ est donc de 2 fois la base :

distance parcourue = $2 \times \sqrt{53} \text{ km}$

Cette valeur approchée à 0,01 km près est environ 15,46 km.

Exercice 22 :

Dans un triangle ABC, le théorème de Pythagore donne :

- si ABC est rectangle en A alors $AB^2 = AC^2 + BC^2$

- si $AB^2 = AC^2 + BC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A ou B ou C.

Dans le cas où ABC est rectangle en A, on a donc :

$$\sin^2 \widehat{A} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = 1 - \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 1 - \sin^2 \widehat{B}$$

or, dans un triangle, la somme des carrés des sinus des angles est égale à 2 (identité remarquable) :

$$\sin^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} = 2$$

donc :

$$1 - \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} = 2$$

$$\sin^2 \widehat{C} = \sin^2 \widehat{A} - \sin^2 \widehat{B}$$

De même, en utilisant le théorème de Pythagore pour les côtés AC et AB, on trouve :

$$\sin^2 \widehat{A} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = 1 - \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 1 - \sin^2 \widehat{C}$$

donc :



En remplaçant ces expressions dans celle à démontrer :

$$\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}$$

On a donc bien démontré que si ABC est un triangle rectangle en A, alors $\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}$.

Réciproquement, supposons que $\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}$.

On a dans un triangle :

$$\sin^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} = 2$$

soit :

$$\sin^2 \widehat{A} + (1 - \cos^2 \widehat{B}) + (1 - \cos^2 \widehat{C}) = 2$$

soit :

$$\sin^2 \widehat{A} = \cos^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{C}$$

or, dans un triangle rectangle en A, on a :

$$\sin \widehat{A} = \cos \widehat{B} = \cos \widehat{C}$$

donc :

$$\sin^2 \widehat{A} = \cos^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{C} = 2\cos^2 \widehat{B} = 2\cos^2 \widehat{C}$$

d'où :

$$\cos^2 \widehat{B} = \cos^2 \widehat{C}$$

et donc :

$$\cos \widehat{B} = \pm \cos \widehat{C}$$

si $\cos \widehat{B} = \cos \widehat{C}$ alors l'angle $\widehat{B}$ et l'angle $\widehat{C}$ sont égaux ou supplémentaires, donc si $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont différents l'un d'eux est droit, donc ABC est rectangle.

Sinon, on a $\cos \widehat{B} = -\cos \widehat{C}$,

alors l'angle $\widehat{B}$ et l'angle $\widehat{C}$ sont supplémentaires, donc l'un d'eux est droit, donc ABC est rectangle.

Ainsi, si $\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}$, alors ABC est un triangle rectangle en A.

