

Trigonalisation et Cayley-Hamilton

Exercice 1 : Inverse par un polynôme annulateur

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$.
2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} sans calculer de déterminant.
3. Soit u un endomorphisme d'un espace E tel que $u^3 - 2u^2 + u - 2\text{id}_E = 0$. Montrer que u est inversible et exprimer u^{-1} comme un polynôme en u .
4. Pour ce même u , avec E réel, montrer que 2 est la seule valeur propre possible de u .

Exercice 2 : Puissances par division euclidienne

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et montrer que $A^2 = A + 2I_3$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .
3. Pour $m \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^m par $X^2 - X - 2$. En déduire A^m comme combinaison de A et de I_3 .
4. Quelles sont les valeurs propres de A ? Justifier que les deux racines de $X^2 - X - 2$ sont

bien valeurs propres.

Exercice 3 : Valeurs propres et polynômes annulateurs

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ tels que $u(x) = \lambda x$.

1. Montrer que $P(u)(x) = P(\lambda)x$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.
2. En déduire que toute valeur propre de u est racine de tout polynôme annulateur de u .
3. On suppose $u^3 = 4u$. Quelles sont les valeurs propres possibles de u ? Donner un exemple où l'une des racines de $X^3 - 4X$ n'est pas valeur propre.
4. Montrer que toute racine λ du polynôme minimal μ_u est valeur propre de u . On pourra écrire $\mu_u = (X - \lambda)Q$.

Exercice 4 : Polynômes minimaux de matrices simples

Déterminer le polynôme minimal de chacune des matrices suivantes, puis dire lesquelles sont diagonalisables :

1. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$

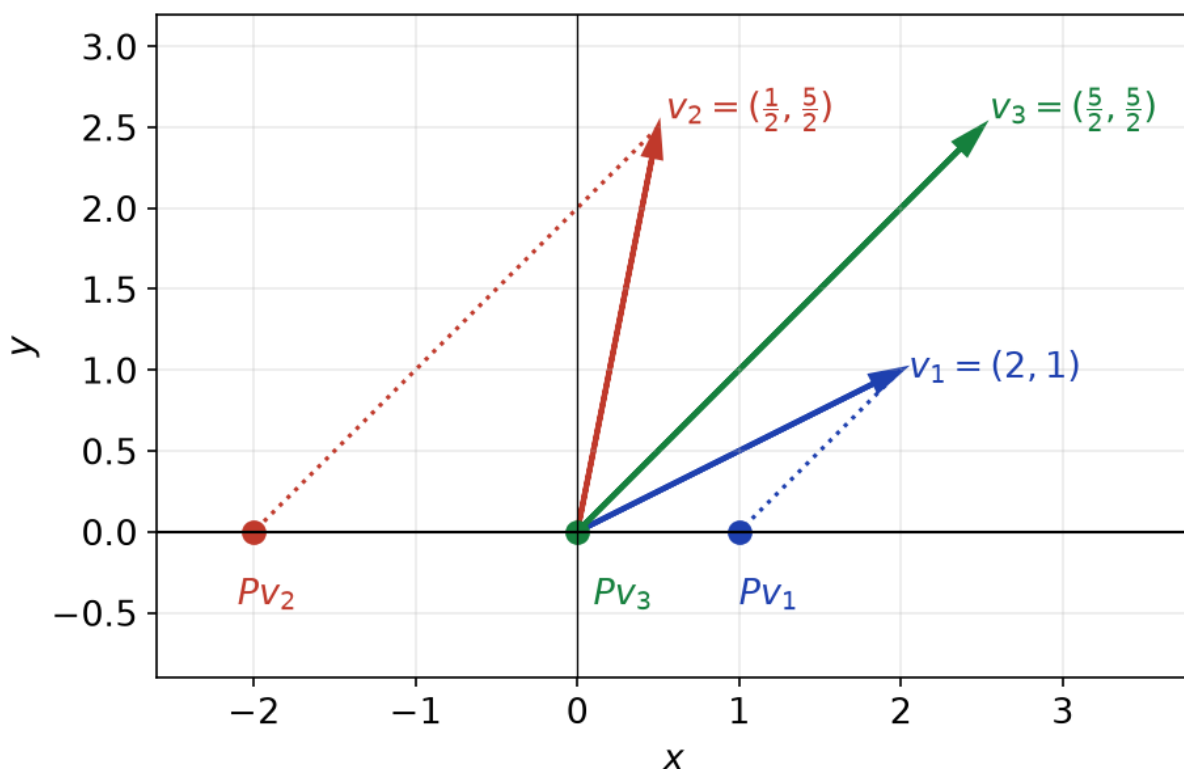
2. $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$

3. $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

4. $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercice 5 : Projecteurs et symétries

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La figure ci-dessous représente trois vecteurs v_1, v_2, v_3 et leurs images par P .



1. Vérifier que $P^2 = P$ et en déduire le polynôme minimal de P .
2. Déterminer $\ker P$ et $\ker(P - I_2)$, puis vérifier que $\mathbb{R}^2 = \ker P \oplus \ker(P - I_2)$. Interpréter la figure.
3. On pose $S = 2P - I_2$. Montrer que $S^2 = I_2$, déterminer μ_S et les sous-espaces propres de S . Calculer l'image de $v = (2, 1)$ par S .
4. Plus généralement, soit P un projecteur d'un espace E de dimension n . Déterminer les polynômes minimaux possibles de P et montrer que $\operatorname{rg}(P) = \operatorname{tr}(P)$.

Exercice 6 : Polynôme minimal d'une matrice d'ordre 3

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer χ_A et χ_B .
2. Déterminer μ_A et μ_B à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton.
3. En déduire que A est diagonalisable et que B ne l'est pas.
4. Donner une base de vecteurs propres de A .

Exercice 7 : Lemme des noyaux sur un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

1. Vérifier que $(A + I_3)(A - 2I_3) = 0$.
2. En déduire, par le lemme des noyaux, que $\mathbb{R}^3 = \ker(A + I_3) \oplus \ker(A - 2I_3)$. Donner une base de chaque noyau.
3. À l'aide d'une relation de Bézout entre $X + 1$ et $X - 2$, exprimer les deux projecteurs associés comme des polynômes en A . Décomposer $w = (1, 0, 0)$.
4. En déduire A^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 : Démonstration du lemme des noyaux

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. On pose $P = P_1 P_2$ et on fixe A, B tels que $A P_1 + B P_2 = 1$.

1. Montrer que $\ker P_1(u) \cap \ker P_2(u) = \{0\}$.
2. Montrer que $\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$.
3. Montrer que la projection de $\ker P(u)$ sur $\ker P_1(u)$ parallèlement à $\ker P_2(u)$ est la restriction de $B(u) P_2(u)$.
4. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u . Montrer que $\ker P_1(u)$ est stable par v .
5. On suppose de plus $P(u) = 0$. Montrer que $\ker P_2(u) = \operatorname{Im} P_1(u)$.

Exercice 9 : Diagonalisabilité par un polynôme annulateur

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 3A + 2I_n = 0$. Montrer que A est diagonalisable et préciser les valeurs propres possibles.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^k = I_n$ pour un entier $k \geq 1$. Montrer que A est diagonalisable.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que A n'a aucune valeur propre réelle, que n est pair, et que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = A^2$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A^2 = A$.

Exercice 10 : Matrices non diagonalisables

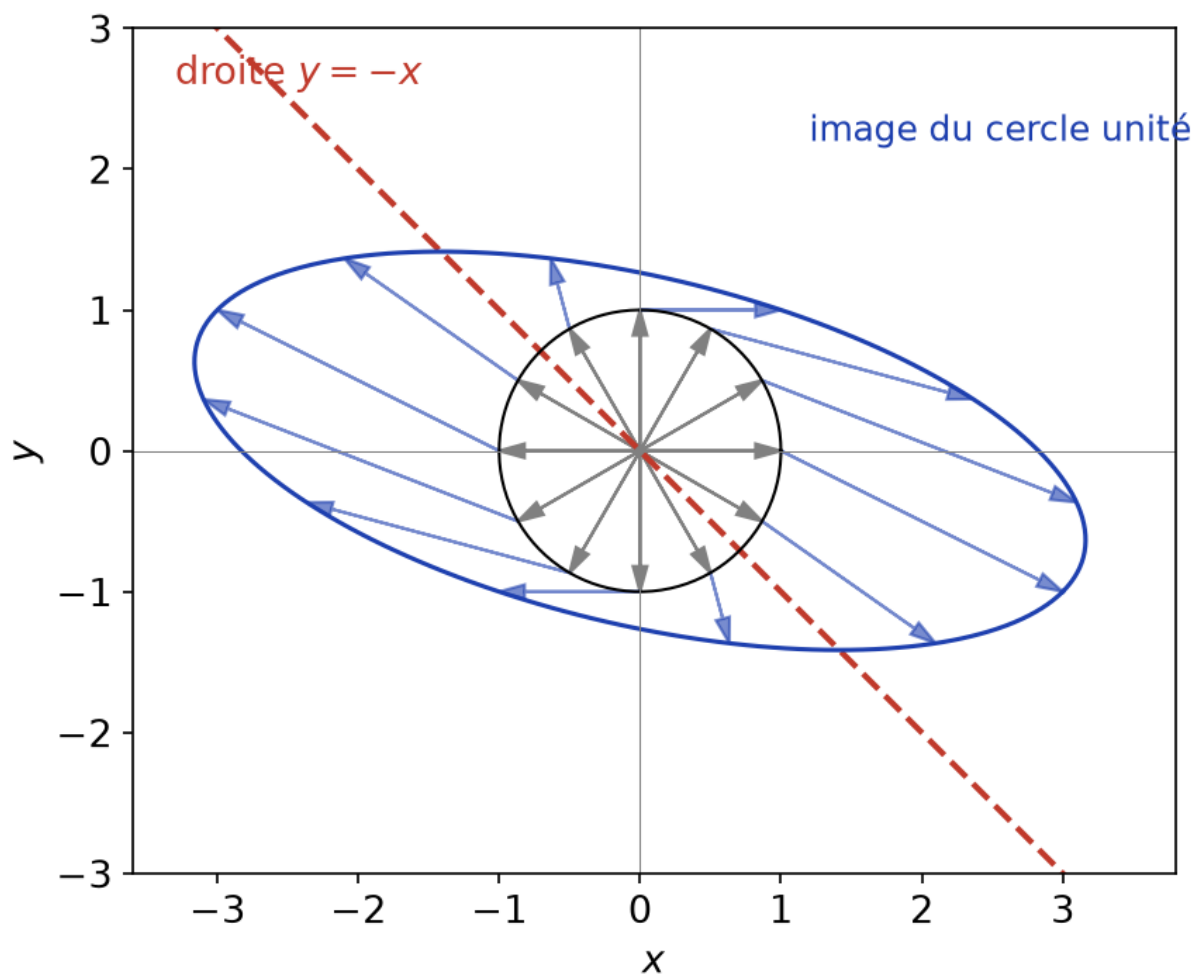
1. Montrer qu'une matrice nilpotente non nulle n'est pas diagonalisable.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $(A - \lambda I_n)^2 = 0$ et $A \neq \lambda I_n$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
3. Application : soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $(A - I_3)^2$, puis donner μ_A , χ_A et la dimension du sous-espace propre. Conclure.

Exercice 11 : Cayley-Hamilton et inverse d'une matrice d'ordre 3

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Vérifier par le calcul que $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer χ_A .
3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} comme polynôme en A .
4. La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 12 : Trigonalisation d'une matrice d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. La figure ci-dessous représente l'image par A de vecteurs du cercle unité.



1. Calculer χ_A et le sous-espace propre. La matrice A est-elle diagonalisable ? Quel rôle joue la droite $y = -x$ sur la figure ?
2. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 : Trigonalisation d'une matrice d'ordre 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = A - I_3$.

1. Calculer χ_A .
2. Calculer N , N^2 et N^3 . En déduire μ_A .
3. Soit $e_1 = (1, 0, 0)$. Montrer que $(N^2 e_1, N e_1, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et écrire la matrice T de A dans cette base.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 : Sous-espaces caractéristiques

On reprend la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de l'exercice 6.

1. Déterminer les sous-espaces caractéristiques $N_1 = \ker(B - I_3)$ et $N_2 = \ker(B - 2I_3)^2$.
2. Vérifier que leurs dimensions sont les multiplicités des valeurs propres, et que $\mathbb{R}^3 = N_1 \oplus N_2$.
3. Soit $w_1 = (0, 1, 0)$, $w_2 = (1, 2, 0)$ et $w_3 = (0, 3, 1)$. Écrire la matrice de B dans la base (w_1, w_2, w_3) .
4. Vérifier sur cette matrice les relations entre trace, déterminant et valeurs propres.

Exercice 15 : Propriétés des matrices nilpotentes

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, d'indice k .

1. Montrer que 0 est la seule valeur propre de N , que $\chi_N = X^n$ et que $\text{tr}(N) = 0$.
2. Montrer que $k \leq n$.

3. Montrer que $I_n - N$ est inversible et donner son inverse.
4. Application : calculer l'inverse de $I_3 - N$ pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Montrer que la somme de deux matrices nilpotentes qui commutent est nilpotente. Donner un contre-exemple lorsqu'elles ne commutent pas.

Exercice 16 : Nilpotent d'indice maximal

Soit E de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n .

1. Justifier l'existence de $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .
2. Écrire la matrice de u dans la base $(e_1, \dots, e_n) = (u^{n-1}(x), \dots, u(x), x)$.
3. Montrer que $\dim \ker u^j = j$ pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$.
4. Montrer qu'il n'existe aucun $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = u$.

Exercice 17 : Suites récurrentes couplées

On définit deux suites réelles par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + v_n, \quad v_{n+1} = -u_n + v_n.$$

1. Écrire le système sous la forme $Y_{n+1} = A Y_n$ et reconnaître la matrice de l'exercice 12.
2. Écrire $A = 2I_2 + N$ et montrer que $N^2 = 0$. En déduire A^n par la formule du binôme.
3. Donner u_n et v_n en fonction de n . Vérifier pour $n = 2$.

4. Étudier les suites $u_n / 2^n$ et $v_n / 2^n$.

Exercice 18 : Dimension de l'algèbre des polynômes en u

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, de polynôme minimal μ_u de degré d .

1. Montrer que $(\text{id}, u, \dots, u^{d-1})$ est libre.
2. Montrer que cette famille engendre $\mathbb{K}[u]$. Conclure que $\dim \mathbb{K}[u] = d$.
3. On suppose u inversible. Montrer que $\mu_u(0) \neq 0$, puis que $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.
4. Application : pour la matrice A de l'exercice 2, déterminer $\dim \mathbb{R}[A]$ et une base de $\mathbb{R}[A]$.

Exercice 19 : Restriction et codiagonalisation

1. Soit u diagonalisable et F un sous-espace stable par u . Montrer que l'endomorphisme induit $u|_F$ est diagonalisable.
2. Soient u, v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que chaque sous-espace propre de u est stable par v .
3. En déduire qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à u et v .
4. Application : vérifier que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ commutent, puis trouver une base de vecteurs propres communs.

Exercice 20 : Matrice compagnon

Soient $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix}$. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique.

1. Montrer que $\chi_C = X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$.
2. Calculer $C e_1$ et $C^2 e_1$. En déduire qu'aucun polynôme non nul de degré au plus 2 n'annule C , puis que $\mu_C = \chi_C$.
3. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\text{rg}(C - \lambda I_3) \geq 2$. En déduire que C est diagonalisable si et seulement si χ_C a trois racines distinctes dans $\mathbb{K}$.
4. Application : $a_0 = 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = -2$. Factoriser χ_C et donner une base de vecteurs propres de C .

Exercice 21 : Problème : étude complète d'une matrice d'ordre 3

On considère $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_M et en donner la forme factorisée.
2. Déterminer les sous-espaces propres. En déduire μ_M et dire si M est diagonalisable.
3. À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, montrer que M est inversible et calculer M^{-1} .
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(M + I_3) \oplus \ker(M - 2I_3)^2$ et donner une base de chaque facteur.
5. Vérifier que $(X - 2)^2 - (X - 5)(X + 1) = 9$. En déduire les projecteurs p_1 sur $\ker(M + I_3)$ et p_2 sur $\ker(M - 2I_3)^2$, comme polynômes en M , puis leurs matrices.
6. Trigonaliser M : trouver P inversible telle que $P^{-1} M P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
7. Montrer que $M^n = (-1)^n p_1 + 2^n p_2 + n 2^{n-1} (M - 2I_3) p_2$ pour tout $n \geq 1$, et expliciter la matrice $(M - 2I_3) p_2$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [trigonalisation et Cayley-Hamilton, cours de maths en L2](#)
- À maîtriser avant : [Valeurs propres et diagonalisation](#)
- Chapitre précédent : [Valeurs propres et diagonalisation](#)
- Chapitre suivant : [Arithmétique et anneau \$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\$](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)