Trigonalisation et Cayley-Hamilton

Corrigé de l'exercice 1 : Inverse par un polynôme annulateur

1. On calcule
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -5 & 1{,}14 \end{pmatrix}.$$
Ensuite, $A^2 - 5A + 6I_2 = \begin{pmatrix} -1-5+6 & 10-10 \\ 5+5 & 14-20+6 \end{pmatrix}$. **Donc** $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$**.**

2. La relation s'écrit $A(5I_2 - A) = 6\,I_2$. Ainsi $A \cdot \frac{1}{6}(5I_2 - A) = I_2$, ce qui suffit pour une matrice carrée. **Donc** A **est inversible et** $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$**.** On vérifie : $A\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

3. On isole le terme constant : $u^3 - 2u^2 + u = 2\,\mathrm{id}_E$, c'est-à-dire $u \circ (u^2 - 2u + \mathrm{id}_E) = 2\,\mathrm{id}_E$. Comme les polynômes en u commutent, on a aussi $(u^2 - 2u + \mathrm{id}_E) \circ u = 2\,\mathrm{id}_E$. **Donc** u **est inversible et** $u^{-1} = \frac{1}{2}(u^2 - 2u + \mathrm{id}_E)$**.**

4. On factorise l'annulateur : $X^3 - 2X^2 + X - 2 = X^2(X-2) + (X-2) = (X-2)(X^2+1)$. Toute valeur propre réelle de u en est racine. Or $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle. **Par conséquent,** 2 **est la seule valeur propre possible de** u**.**

Point de méthode : un annulateur dont le coefficient constant est non nul donne toujours l'inverse sous forme de polynôme en u.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 2 : Puissances par division euclidienne

1. Chaque coefficient diagonal de A^2 vaut $0+1+1=2$. Chaque coefficient hors diagonale vaut $0+0+1=1$. Ainsi $A^2=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. **On lit directement** $A^2=A+2I_3$ **.**

2. On a $A^2-A=2I_3$, donc $A(A-I_3)=2I_3$. **Ainsi** A **est inversible et** $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-I_3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$**.**

3. On a $X^2-X-2=(X-2)(X+1)$. La division euclidienne s'écrit $X^m=Q(X)(X-2)(X+1)+aX+b$, car le reste est de degré au plus 1. En évaluant en 2, puis en -1, on obtient
$$2^m=2a+b,\quad (-1)^m=-a+b.$$
Par soustraction, $3a=2^m-(-1)^m$. Ensuite, $b=(-1)^m+a$. Ainsi $a=\dfrac{2^m-(-1)^m}{3}$ et $b=\dfrac{2^m+2(-1)^m}{3}$. Comme X^2-X-2 annule A, on obtient $A^m=aA+bI_3$. **Donc** $A^m=\dfrac{2^m-(-1)^m}{3}A+\dfrac{2^m+2(-1)^m}{3}I_3$**.** Pour $m=2$, on retrouve $A+2I_3$.

4. Les valeurs propres sont parmi les racines 2 et -1. De plus, $A(1,1,1)=(2,2,2)$, et $A(1,-1,0)=(-1,1,0)$. **Les valeurs propres de** A **sont donc exactement** 2 **et** -1**.** On pouvait aussi le prévoir : A n'est pas scalaire, donc $\mu_A=X^2-X-2$, dont les racines sont toutes valeurs propres.

Corrigé de l'exercice 3 : Valeurs propres et polynômes annulateurs

1. Montrons d'abord par récurrence que $u^k(x)=\lambda^k x$. C'est vrai pour $k=0$. Si c'est vrai au rang k, alors $u^{k+1}(x)=u(\lambda^k x)=\lambda^k u(x)=\lambda^{k+1}x$. Pour $P=\sum a_k X^k$, la linéarité donne alors $P(u)(x)=\sum a_k\lambda^k x$. **Donc** $P(u)(x)=P(\lambda)x$**.**

2. Soit P un annulateur et λ une valeur propre, de vecteur propre $x\neq 0$. Alors $0=P(u)(x)=P(\lambda)x$. Comme $x\neq 0$, il vient $P(\lambda)=0$. **Toute valeur propre est**

racine de tout annulateur.

3. Le polynôme $X^3 - 4X = X(X-2)(X+2)$ annule u. **Les valeurs propres possibles sont donc** -2, 0 **et** 2. Cependant, $u = 2\,\mathrm{id}_E$ vérifie $u^3 = 8\,\mathrm{id}_E = 4u$. Son spectre vaut $\{2\}$: ni 0 ni -2 ne sont valeurs propres.

4. Écrivons $\mu_u = (X-\lambda)\,Q$. Le polynôme Q est non nul et de degré strictement inférieur à celui de μ_u. Par minimalité, $Q(u) \neq 0$. Il existe donc y tel que $x = Q(u)(y) \neq 0$. Alors $(u - \lambda\,\mathrm{id})(x) = \mu_u(u)(y) = 0$. **Ainsi** λ **est valeur propre, de vecteur propre** x**.**

Corrigé de l'exercice 4 : Polynômes minimaux de matrices simples

1. On a $(D-2I)(D-3I) = \mathrm{diag}(0,0,1)\,\mathrm{diag}(-1,-1,0) = 0$. En revanche, D n'est pas scalaire, donc aucun polynôme de degré 1 ne l'annule. **Ainsi** $\mu_D = (X-2)(X-3)$**, et** D **est diagonalisable.**

2. Ici $\chi_T = (X-2)^2(X-3)$. Le polynôme μ_T divise χ_T et admet 2 et 3 pour racines. Il reste deux candidats. Or
$$(T-2I)(T-3I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\mathrm{o} \end{pmatrix} \neq 0.$$
Donc $\mu_T = (X-2)^2(X-3)$**, et** T **n'est pas diagonalisable**, car 2 est racine double de μ_T.

3. On calcule $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et $N^3 = 0$. Le polynôme minimal divise X^3, mais X et X^2 n'annulent pas N. **Donc** $\mu_N = X^3$**, et** N **n'est pas diagonalisable.**

4. On a $U^2 = \left([\mathrm{ray?}]\begin{matrix} 2 \,\&\, 2 \\ 2 \,\&\, 2 \end{matrix},\right) = 2U$. De plus, U n'est pas scalaire. **Donc** $\mu_U = X(X-2)$**, scindé à racines simples :** U **est diagonalisable**, de valeurs propres 0 et 2.

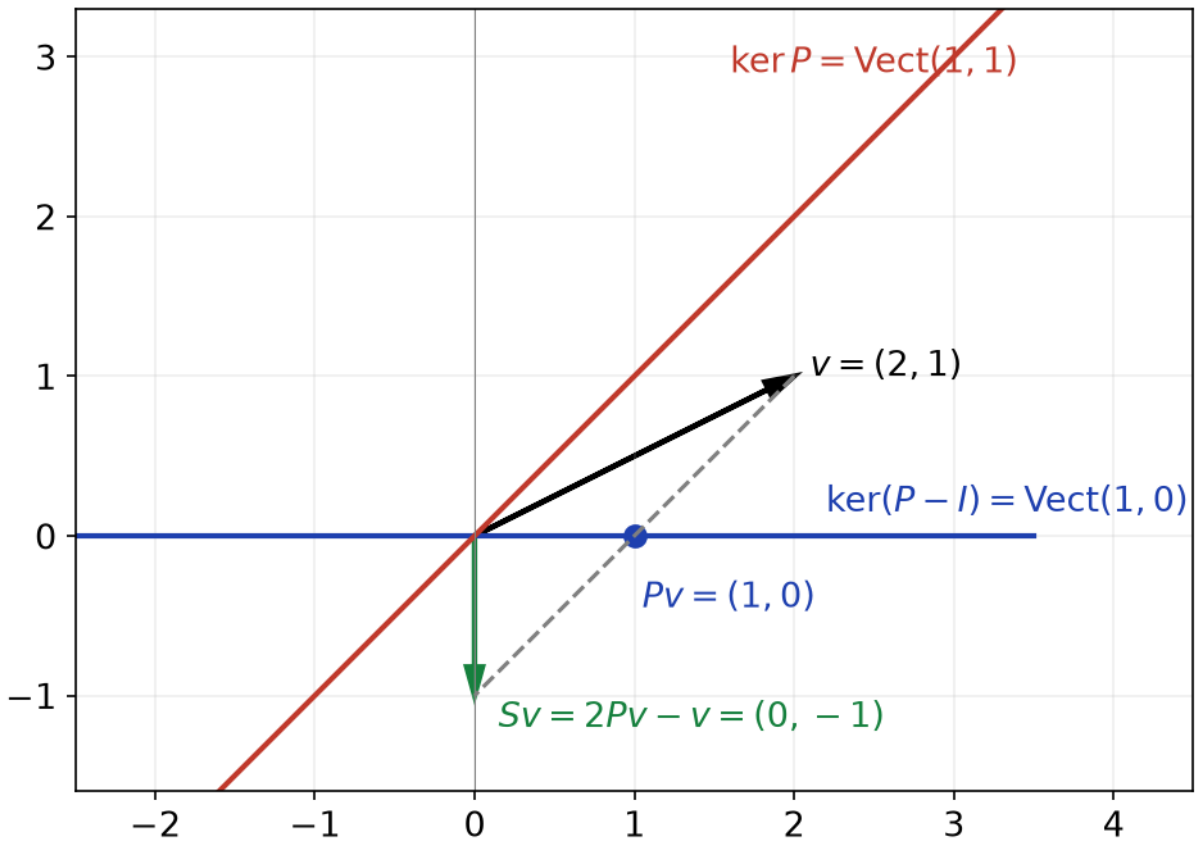
Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 5 : Projecteurs et symétries

1. On calcule $P^2 = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix} = P$. Ainsi μ_P divise $X^2 - X = X(X-1)$. Or $P \neq 0$ et $P \neq I_2$. **Donc** $\mu_P = X(X-1)$**.**

2. On a $P(x,y) = (x-y, 0)$. D'abord, $\ker P$ est la droite $x = y$, engendrée par $(1,1)$. Ensuite, $P - I_2 = \begin{pmatrix}0 & -1\\0 & -1\end{pmatrix}$, donc $\ker(P - I_2)$ est la droite $y = 0$. Les vecteurs $(1,1)$ et $(1,0)$ ne sont pas colinéaires. **Ainsi** $\mathbb{R}^2 = \ker P \oplus \ker(P - I_2)$, comme le prédit le lemme des noyaux. Sur la figure de l'énoncé, chaque v_i est envoyé sur l'axe des abscisses, en suivant la direction $(1,1)$. En particulier, v_3 appartient à $\ker P$, donc $P\,v_3 = 0$. **La matrice** P **est la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à la droite** $y = x$**.**

3. On développe : $S^2 = 4P^2 - 4P + I_2 = I_2$, car $P^2 = P$. Comme $S \neq \pm I_2$, $\mu_S = (X-1)(X+1)$. De plus, $\ker(S - I_2) = \ker(2P - 2I_2) = \ker(P - I_2)$, et $\ker(S + I_2) = \ker(2P) = \ker P$. S **est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, parallèlement à la droite** $y = x$**.** Enfin, $S = \begin{pmatrix}1 & -2\\0 & -1\end{pmatrix}$, donc $S(2,1) = (0,-1)$. La figure ci-dessous montre que Pv est le milieu du segment qui joint v à Sv.



4. Le polynôme $X(X-1)$ annule p, donc μ_p vaut X (si $p=0$), $X-1$ (si $p=\mathrm{id}$) ou $X(X-1)$. Dans tous les cas, μ_p est scindé à racines simples, donc p est diagonalisable. Dans une base propre, sa matrice est $\mathrm{diag}(1,\ldots,1,0,\ldots,0)$, avec r coefficients égaux à 1. Le rang et la trace valent alors r. **Ainsi** $\mathrm{rg}(p)=\mathrm{tr}(p)$**.**

Corrigé de l'exercice 6 : Polynôme minimal d'une matrice d'ordre 3

1. On développe $\det(XI_3-A)$ selon la première ligne, qui vaut $(X-2,0,0)$:

$$\chi_A=(X-2)\det\begin{pmatrix}X & -2\\ 0 & X-1\end{pmatrix}=(X-2)^2(X-1).$$

Pour B, la dernière ligne de XI_3-B vaut $(0,0,X-2)$. Donc $\chi_B=(X-2)\det\begin{pmatrix}X & 0\\ -2 & X-1\end{pmatrix}$. **Ainsi** $\chi_A=\chi_B=(X-1)(X-2)^2$**.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

2. Par Cayley-Hamilton, μ divise $(X-1)(X-2)^2$. De plus, μ admet 1 et 2 pour racines. Les candidats sont donc $(X-1)(X-2)$ et $(X-1)(X-2)^2$. Pour A, on a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & & \\ , & -2 & \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & , & -2 \\ 1 & 0 & -1-1 \end{pmatrix}$. La deuxième ligne du produit vaut $2(0,0,0) + (2,0,-2) - 2(1,0,-1) = (0,0,0)$, et les deux autres sont nulles. Donc $(A - I_3)(A - 2I_3) = 0$. Pour B, on trouve

$$(B - I_3)(B - 2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & & \\ , & -1 & \\ 0 & 0 & 1,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & & \\ , & -4 & \\ 0 & 0 & 0,0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Donc $\mu_A = (X-1)(X-2)$ et $\mu_B = (X-1)(X-2)^2$.

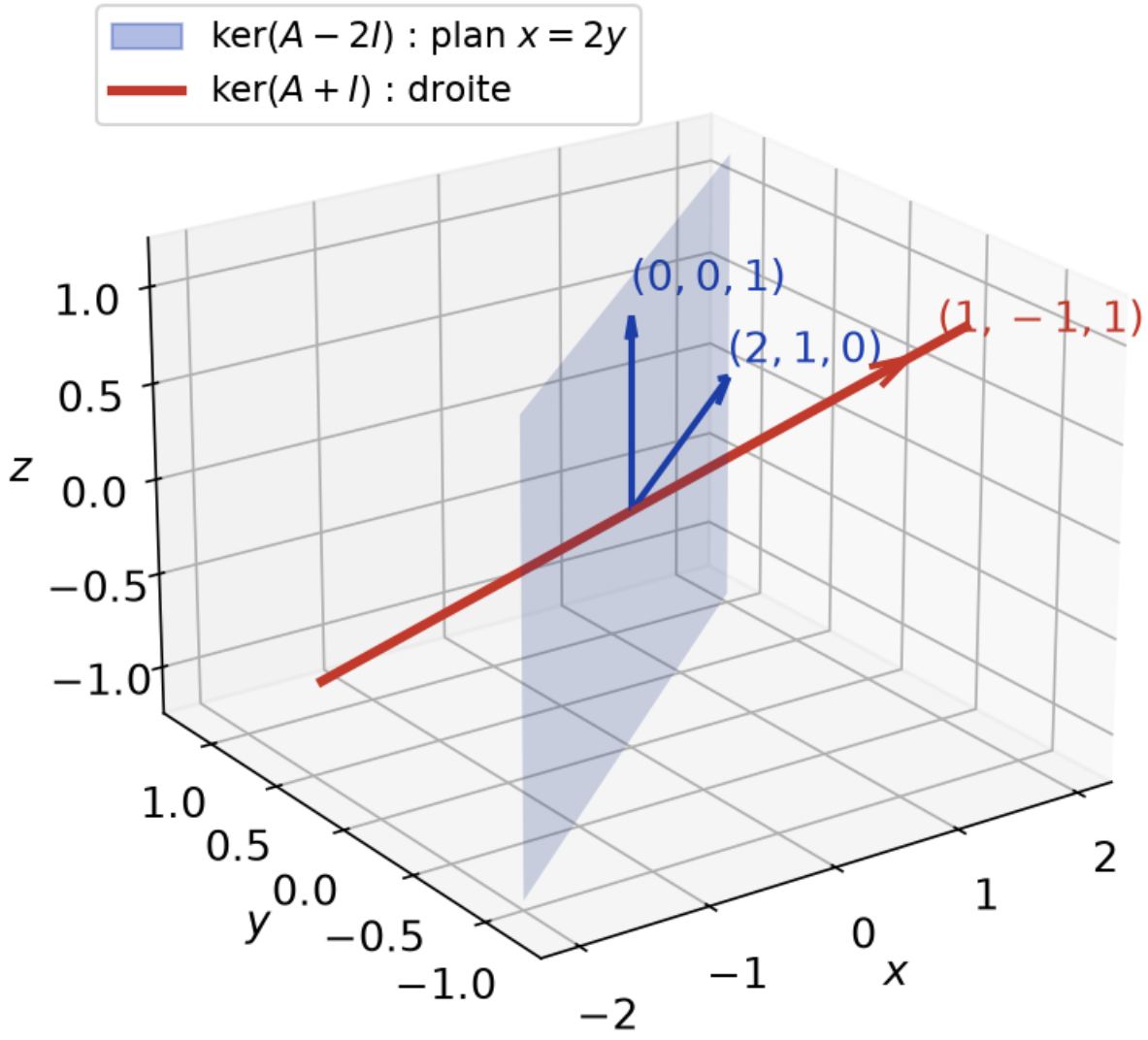
3. Le polynôme μ_A est scindé à racines simples, donc A **est diagonalisable**. En revanche, μ_B a une racine double, donc B **n'est pas diagonalisable**.

4. Pour $A - I_3$, la première ligne donne $x = 0$, puis la deuxième donne $y - 2z = 0$. Le noyau est donc la droite engendrée par $(0,2,1)$. Le noyau de $A - 2I_3$ est le plan $x = z$. **Une base propre de A est** $((0,2,1),(1,0,1),(0,1,0))$, avec les valeurs propres 1, 2, 2.

Corrigé de l'exercice 7 : Lemme des noyaux sur un exemple

1. On a $A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & & \\ , & 0 & \\ -1 & 2 & 3_3 \end{pmatrix}$ et $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Notons $\ell = (-1,2,0)$: les lignes de $A - 2I_3$ valent ℓ, $-\ell$, ℓ. La première ligne du produit vaut $2\ell - 2\ell = 0$. La deuxième vaut $\ell - \ell = 0$. La troisième vaut $-\ell - 2\ell + 3\ell = 0$. **Donc $(A + I_3)(A - 2I_3) = 0$.**

2. Les polynômes $X+1$ et $X-2$ sont premiers entre eux, et leur produit annule A. Le lemme des noyaux donne donc $\mathbb{R}^3 = \ker(A + I_3) \oplus \ker(A - 2I_3)$. D'une part, le système $2x + 2y = 0$, $-x + 2y + 3z = 0$ donne $y = -x$ et $z = x$. D'autre part, $A - 2I_3$ est de rang 1, et son noyau est le plan $x = 2y$. **Bases : $(1,-1,1)$ pour $\ker(A + I_3)$, et $((2,1,0),(0,0,1))$ pour $\ker(A - 2I_3)$.** La figure ci-dessous représente cette décomposition.



3. On a $(X+1)-(X-2)=3$, donc $\frac{1}{3}(X+1)-\frac{1}{3}(X-2)=1$. Ainsi $I_3=p+q$, avec $p=\frac{1}{3}(A+I_3)$ et $q=-\frac{1}{3}(A-2I_3)$. Comme $(A-2I_3)p=0$, l'image de p est dans $\ker(A-2I_3)$. De même, l'image de q est dans $\ker(A+I_3)$. **Donc $p=\frac{1}{3}(A+I_3)$ projette sur $\ker(A-2I_3)$, et $q=-\frac{1}{3}(A-2I_3)$ projette sur $\ker(A+I_3)$.** On trouve $q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&0\\-1&&0\\1&-2&0\end{pmatrix}$. Pour $w=(1,0,0)$, on obtient $q(w)=\frac{1}{3}(1,-1,1)$ et $p(w)=w-q(w)=\frac{1}{3}(2,1,-1)$. **Ainsi** $w=\frac{1}{3}(1,-1,1)+\frac{1}{3}(2,1,-1)$, et le second vecteur vérifie bien $x=2y$.

4. Comme A vaut 2 sur l'image de p et -1 sur celle de q, on a $A=2p-q$. De plus, $p^2=p$, $q^2=q$ et $pq=qp=0$. Par récurrence, $A^m=\frac{2^m}{3}(A+I_3)-\frac{(-1)^m}{3}(A-2I_3)$ pour tout $m\in\mathbb{N}$. Pour $m=0$, on retrouve bien $p+q=I_3$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 8 : Démonstration du lemme des noyaux

1. La relation de Bézout donne $\mathrm{id}_E = A(u)P_1(u) + B(u)P_2(u)$. Soit x dans l'intersection. Alors $x = A(u)\big(P_1(u)(x)\big) + B(u)\big(P_2(u)(x)\big) = 0$. **L'intersection est donc réduite à $\{0\}$.**

2. Si $x \in \ker P_1(u)$, alors $P(u)(x) = P_2(u)\big(P_1(u)(x)\big) = 0$. De même pour $\ker P_2(u)$, car les polynômes en u commutent. Réciproquement, soit $x \in \ker P(u)$. On pose $x_1 = B(u)P_2(u)(x)$ et $x_2 = A(u)P_1(u)(x)$, de sorte que $x = x_1 + x_2$. Alors $P_1(u)(x_1) = B(u)P(u)(x) = 0$ et $P_2(u)(x_2) = A(u)P(u)(x) = 0$. Avec la question 1, **on obtient** $\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$**.**

3. La décomposition d'un vecteur dans une somme directe est unique. Or la question 2 fournit la décomposition $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 = B(u)P_2(u)(x)$. **Le projecteur sur $\ker P_1(u)$ parallèlement à $\ker P_2(u)$ est donc la restriction de $B(u)P_2(u)$.**

4. Par récurrence, $v \circ u^k = u^k \circ v$, donc v commute avec $P_1(u)$. Soit $x \in \ker P_1(u)$. Alors $P_1(u)\big(v(x)\big) = v\big(P_1(u)(x)\big) = 0$. **Donc $\ker P_1(u)$ est stable par v.**

5. D'abord, $P_2(u) \circ P_1(u) = P(u) = 0$, donc $\mathrm{Im}\ P_1(u) \subset \ker P_2(u)$. Ensuite, soit $x \in \ker P_2(u)$. La relation de Bézout donne $x = A(u)P_1(u)(x) = P_1(u)\big(A(u)(x)\big)$. **Ainsi $\ker P_2(u) = \mathrm{Im}\ P_1(u)$.**

Corrigé de l'exercice 9 : Diagonalisabilité par un polynôme annulateur

1. Le polynôme $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ annule A. Il est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. **Donc A est diagonalisable, et $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, 2\}$.**

2. Posons $\omega = e^{2i\pi/k}$. Alors $X^k - 1 = \prod_{j=0}^{k-1}(X - \omega^j)$, et les ω^j sont deux à deux distincts. Ce polynôme annulateur est donc scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. **Par conséquent, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**

3. Une valeur propre réelle λ vérifierait $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible. Ensuite, $\det(A)^2 = \det(A^2) = \det(-I_n) = (-1)^n$. Or $\det(A)$ est réel, donc $(-1)^n \geq 0$. **Ainsi n est pair.** Enfin, $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. **Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.**

4. Le polynôme $X^2(X-1)$ annule A, donc μ_A le divise. Si $A^2 = A$, alors $X(X-1)$ annule A, et A est diagonalisable. Réciproquement, si A est diagonalisable, μ_A est à racines simples. Comme il divise $X^2(X-1)$, il divise $X(X-1)$. **Donc $A^2 = A$: l'équivalence est démontrée.**

Corrigé de l'exercice 10 : Matrices non diagonalisables

1. Soit N nilpotente non nulle d'indice k. Alors $\mu_N = X^k$, avec $k \geq 2$ puisque $N \neq 0$. Ce polynôme a une racine multiple. **Donc N n'est pas diagonalisable.** Autre argument : si N était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice diagonale de ses valeurs propres, toutes nulles, donc $N = 0$.

2. Le polynôme minimal divise $(X - \lambda)^2$. Il ne vaut pas $X - \lambda$, car $A \neq \lambda I_n$. **Donc $\mu_A = (X - \lambda)^2$ a une racine double, et A n'est pas diagonalisable.**

3. On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Chaque colonne vaut $(1, 0, -1)$. Or chaque ligne (c, c, c) de $A - I_3$, multipliée par cette colonne, donne $c(1 + 0 - 1) = 0$. **Ainsi $(A - I_3)^2 = 0$, et $\mu_A = (X-1)^2$.** Les racines de χ_A sont celles de μ_A, donc $\chi_A = (X-1)^3$. Enfin, $A - I_3$ est de rang 1, donc le sous-espace propre est le plan $x + y + z = 0$, de dimension 2. **Comme $2 < 3$, A n'est pas diagonalisable.**

Corrigé de l'exercice 11 : Cayley-Hamilton et inverse d'une matrice d'ordre 3

1. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd & ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$. En retranchant $(a+d)A$, le coefficient $(1,1)$ devient $a^2 + bc - a^2 - ad = bc - ad$. Le coefficient $(1,2)$ devient $ab + bd - ab - bd = 0$, et de même pour $(2,1)$. Le coefficient $(2,2)$ devient

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$cb + d^2 - ad - d^2 = bc - ad$. En ajoutant $(ad - bc)I_2$, **on obtient bien la matrice nulle.**

2. On développe $\det(XI_3 - A)$ selon la première ligne $(X-1, -1, 0)$:

$$\chi_A = (X-1)\det\begin{pmatrix} X & -1 \\ 0 & X-1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & X \end{pmatrix} = (X-1)^3 - 1.$$

Donc $\chi_A = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$**.**

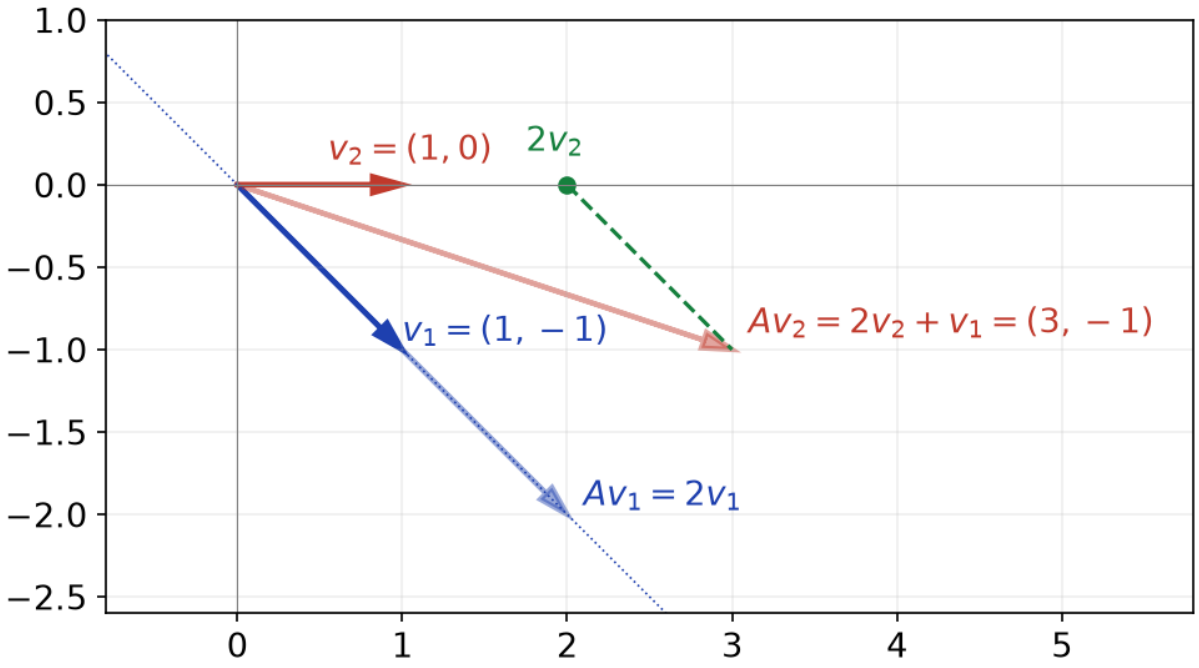
3. Par Cayley-Hamilton, $A^3 - 3A^2 + 3A = 2I_3$, soit $A(A^2 - 3A + 3I_3) = 2I_3$. Or $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **Donc** $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3A + 3I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**.** On vérifie que la première ligne de A fois la première colonne donne $\frac{1}{2}(1+1) = 1$.

4. Les racines de χ_A vérifient $(X-1)^3 = 1$, donc $X - 1 \in \{1, j, j^2\}$. Ce sont 2, $1+j$ et $1+j^2$. Deux d'entre elles ne sont pas réelles. **Ainsi** χ_A **n'est pas scindé sur** $\mathbb{R}$ **:** A **n'est pas trigonalisable dans** $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$**.** Sur $\mathbb{C}$, en revanche, χ_A est un annulateur scindé à racines simples. **Donc** A **est diagonalisable dans** $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$**.**

Corrigé de l'exercice 12 : Trigonalisation d'une matrice d'ordre 2

1. On a $\mathrm{tr}(A) = 4$ et $\det(A) = 3 + 1 = 4$. Ainsi $\chi_A = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$. La matrice $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 1. Son noyau est la droite engendrée par $(1, -1)$, soit la droite $y = -x$. **Le sous-espace propre est de dimension** $1 < 2$ **:** A **n'est pas diagonalisable.** Sur la figure, les vecteurs de la droite $y = -x$ sont simplement doublés. C'est la seule droite stable ; tous les autres vecteurs changent de direction.

2. On pose $v_1 = (1, -1)$ et on choisit $v_2 = (1, 0)$, qui n'est pas propre. Alors $Av_2 = (3, -1) = 2v_2 + v_1$. Dans la base (v_1, v_2), la matrice de A est donc T. **On peut prendre** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant 1 et d'inverse $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La figure ci-dessous représente cette base et les images des deux vecteurs.



3. Posons $N = A - 2I_2$. On calcule $N^2 = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-, \\ -1+1 & \& -1+1 \end{pmatrix} = 0$. Comme $2I_2$ et N commutent, la formule du binôme donne $A^n = 2^n I_2 + n\,2^{n-1} N$. **Donc** $A^n = \begin{pmatrix} 2^n + n2^{n-1} & n2^{n-1} \\ -n2^{n-1} & 2^n - n2^{n-1} \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé de l'exercice 13 : Trigonalisation d'une matrice d'ordre 3

1. On développe $\det(XI_3 - A)$ selon la première ligne $(X-3, 2, 1)$:
$$\chi_A = (X-3)\big[(X+1)(X-1)+1\big] - 2\big[-2(X-1)-1\big] + \big[2-(X+1)\big].$$
Le premier terme vaut $(X-3)X^2$. Le deuxième vaut $4X - 2$, et le troisième $1 - X$. **Donc** $\chi_A = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3$.

2. On a $N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -, & -1 \\ -1 & 1 & , \quad 0 \end{pmatrix}$, puis $N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0 \end{pmatrix}$. Chaque ligne de N, appliquée aux colonnes de N^2, donne 0. Donc $N^3 = 0$. Comme μ_A divise $(X-1)^3$ et que $N^2 \neq 0$, **on obtient** $\mu_A = (X-1)^3$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

3. On a $N\,e_1 = (2,2,-1)$ et $N^2\,e_1 = (1,1,0)$. Supposons $a\,N^2\,e_1 + b\,N\,e_1 + c\,e_1 = 0$. En appliquant N^2, on trouve $c\,N^2\,e_1 = 0$, donc $c = 0$. En appliquant ensuite N, on trouve $b = 0$, puis $a = 0$. La famille est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme $A = I_3 + N$, on a $A(N^2\,e_1) = N^2\,e_1$, $A(N\,e_1) = N\,e_1 + N^2\,e_1$ et $A\,e_1 = e_1 + N\,e_1$. **Donc** $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & & \\ , & 0 & \\ 0 & -1 & 0\text{o} \end{pmatrix}$.

4. Les matrices I_3 et N commutent, et $N^3 = 0$. La formule du binôme donne $A^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$. En notant $c_n = \frac{n(n-1)}{2}$, **on obtient** $A^n = \begin{pmatrix} 1+2n+c_n & -2n-c_n & -n \\ 2n+c_n & 1-2n-c, & -n \\ -n & n & \&\,1 \end{pmatrix}$. Pour $n = 1$, on retrouve bien A.

Corrigé de l'exercice 14 : Sous-espaces caractéristiques

1. La matrice $B - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & & \\ , & -1 & \\ 0 & 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}$ donne $z = 0$, puis $x = 0$. Donc N_1 est la droite engendrée par $(0,1,0)$. Ensuite, on calcule $(B - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & & \\ , & -3 & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc N_2 est le plan d'équation $-2x + y - 3z = 0$. **Ainsi** $N_1 = \mathrm{Vect}(0,1,0)$ **et** $N_2 = \mathrm{Vect}\big((1,2,0),(0,3,1)\big)$.

2. Les dimensions valent 1 et 2, soit les multiplicités de 1 et de 2 dans $\chi_B = (X-1)(X-2)^2$. Le vecteur $(0,1,0)$ ne vérifie pas l'équation de N_2, car $-0+1-0 = 1$. La somme est donc directe, de dimension 3. **Ainsi** $\mathbb{R}^3 = N_1 \oplus N_2$. On remarque que le sous-espace propre $\ker(B - 2I_3) = \mathrm{Vect}(1,2,0)$ est strictement contenu dans N_2.

3. On calcule $B\,w_1 = w_1$ et $B\,w_2 = (2,4,0) = 2\,w_2$. Enfin, $B\,w_3 = (-2,2,2)$. Or $-2\,w_2 + 2\,w_3 = (-2,-4+6,2) = (-2,2,2)$. **La matrice est** $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ , & -2 & \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: elle est diagonale par blocs, et chaque bloc est triangulaire.

4. On a $\mathrm{tr}(B) = 2+1+2 = 5 = 1+2+2$. De plus, $\det(T) = 1\times 2\times 2 = 4$. En

développant $\det B$ selon la dernière ligne, on trouve $2 \times (2 \times 1 - 0) = 4$. **Les deux relations sont vérifiées.**

Corrigé de l'exercice 15 : Propriétés des matrices nilpotentes

1. Soit λ une valeur propre et $x \neq 0$ tel que $Nx = \lambda x$. Alors $0 = N^k x = \lambda^k x$, donc $\lambda = 0$. Sur $\mathbb{C}$, χ_N est scindé, et sa seule racine est 0. **Donc $\chi_N = X^n$, et** $\mathrm{tr}(N) = 0$, puisque la trace est la somme des racines de χ_N.

2. Le polynôme X^k annule N, donc μ_N le divise. Par minimalité de k, $\mu_N = X^k$. Par Cayley-Hamilton, μ_N divise $\chi_N = X^n$. **Donc $k \leq n$.**

3. On calcule $(I_n - N)(I_n + N + \ldots + N^{k-1}) = I_n - N^k = I_n$. **Donc $I_n - N$ est inversible, d'inverse $I_n + N + \ldots + N^{k-1}$.**

4. On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. **Donc**
$(I_3 - N)^{-1} = I_3 + N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Soient M, N qui commutent, avec $M^p = 0$ et $N^q = 0$. La formule du binôme s'applique : $(M+N)^{p+q-1} = \sum_{i=0}^{p+q-1} [\backslash\mathrm{let?}]\binom{p+q-1}{i}[\backslash\mathrm{righht?}]\, M^i N^{p+q-1-i}$.
Dans chaque terme, on a soit $i \geq p$, soit $p+q-1-i \geq q$. **Chaque terme est donc nul, et $M+N$ est nilpotente.** Sans commutation, c'est faux :
$\left([\backslash\mathrm{ray?}]{0 \& 1 \atop 0 \& 0},\right) + \left([\backslash\mathrm{ray?}]{0 \& 0 \atop 1 \& 0},\right) = \left([\backslash\mathrm{ray?}]{0 \& 1 \atop 1 \& 0},\right)$, dont le carré vaut I_2.

Corrigé de l'exercice 16 : Nilpotent d'indice maximal

1. L'indice vaut n, donc $u^{n-1} \neq 0$: il existe x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Supposons $\sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x) = 0$, avec des a_i non tous nuls. Soit j le plus petit indice tel que $a_j \neq 0$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

On applique u^{n-1-j}. Tous les termes d'indice $i > j$ deviennent $u^{n-1-j+i}(x) = 0$, car l'exposant dépasse $n-1$. Il reste $a_j\, u^{n-1}(x) = 0$, donc $a_j = 0$: contradiction. **La famille est libre ; elle a n éléments, c'est donc une base de E.**

2. On a $u(e_1) = u^n(x) = 0$ et $u(e_j) = e_{j-1}$ pour $j \geq 2$. **La matrice est J_n, avec des 1 juste au-dessus de la diagonale et des 0 ailleurs.**

3. Pour $j \leq n$, l'endomorphisme u^j envoie $e_1, \dots, e_j$ sur 0. Il envoie $e_{j+1}, \dots, e_n$ sur $e_1, \dots, e_{n-j}$, qui forment une famille libre. Ainsi $\operatorname{rg}(u^j) = n - j$. Par le théorème du rang, $\dim \ker u^j = j$.

4. Supposons $v^2 = u$. Alors $v^{2n} = u^n = 0$, donc v est nilpotent, et son indice est au plus n. Soit k le plus petit entier tel que $2k \geq n$. Alors $u^k = v^{2k} = 0$, car $2k \geq n$. Or $n \geq 2$ entraîne $k \leq n-1$. Ceci contredit le fait que l'indice de u vaut n. **Aucune racine carrée de u n'existe.**

Point de méthode : pour montrer qu'une famille $(u^i(x))$ est libre, on applique la puissance de u qui ne laisse survivre qu'un seul terme.

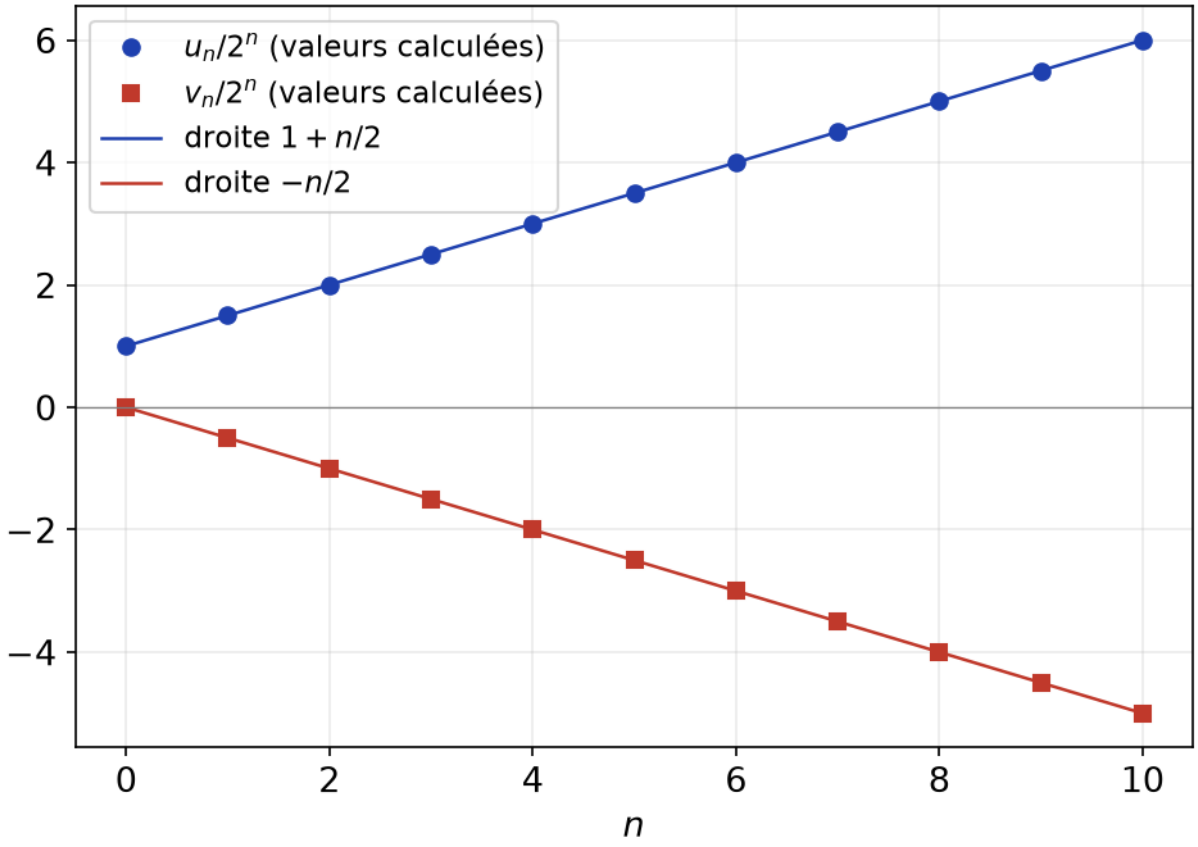
Corrigé de l'exercice 17 : Suites récurrentes couplées

1. Posons $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Alors $Y_{n+1} = A\, Y_n$, avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **C'est la matrice de l'exercice 12, et $Y_n = A^n\, Y_0$.**

2. On pose $N = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On a vu que $N^2 = 0$. Comme $2I_2$ commute avec N, $A^n = 2^n\, I_2 + n\, 2^{n-1}\, N$.

3. Comme $Y_0 = (1, 0)$, Y_n est la première colonne de A^n. **Donc $u_n = 2^n + n2^{n-1} = (n+2)2^{n-1}$ et $v_n = -n\, 2^{n-1}$.** Vérifions pour $n = 2$: la récurrence donne $u_1 = 3$, $v_1 = -1$, puis $u_2 = 9 - 1 = 8$ et $v_2 = -3 - 1 = -4$. Les formules donnent $4 \times 2 = 8$ et $-2 \times 2 = -4$.

4. On obtient $\frac{u_n}{2^n} = 1 + \frac{n}{2}$ et $\frac{v_n}{2^n} = -\frac{n}{2}$. **Ce sont deux suites arithmétiques, de raisons $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.** Ainsi u_n et v_n croissent en valeur absolue comme $n\, 2^{n-1}$, et non comme 2^n. Ce facteur n traduit la non-diagonalisabilité de A. La figure ci-dessous confirme que les points calculés sont alignés.



Corrigé de l'exercice 18 : Dimension de l'algèbre des polynômes en u

1. Supposons $\sum_{i=0}^{d-1} a_i u^i = 0$ avec des a_i non tous nuls. Alors $\sum a_i X^i$ est un annulateur non nul de degré $< d$. C'est impossible par définition de μ_u. **La famille est donc libre.**

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. La division euclidienne donne $P = Q\mu_u + R$, avec $\deg R < d$. Alors $P(u) = R(u)$, qui est combinaison de $\mathrm{id}, u, \ldots, u^{d-1}$. La famille engendre donc $\mathbb{K}[u]$. **C'est une base, et** $\dim \mathbb{K}[u] = d$ **.**

3. Si u est inversible, 0 n'est pas valeur propre, donc 0 n'est pas racine de μ_u. Écrivons $\mu_u = XQ + \mu_u(0)$. Alors $u \circ Q(u) = -\mu_u(0)\,\mathrm{id}$. **Donc** $u^{-1} = -\frac{1}{\mu_u(0)} Q(u)$ **, qui appartient à** $\mathbb{K}[u]$ **.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

4. Pour la matrice de l'exercice 2, $X^2 - X - 2$ annule A, et A n'est pas scalaire. Donc $\mu_A = X^2 - X - 2$. **Ainsi** $\dim \mathbb{R}[A] = 2$**, de base** (I_3, A)**.** On retrouve que A^{-1} et toutes les puissances A^m s'écrivent $aA + bI_3$.

Corrigé de l'exercice 19 : Restriction et codiagonalisation

1. Pour $x \in F$, on a $\mu_u(u_F)(x) = \mu_u(u)(x) = 0$. Ainsi μ_u annule u_F. Or μ_u est scindé à racines simples, puisque u est diagonalisable. **Donc** u_F **est diagonalisable.**

2. Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda\, v(x)$. **Donc** $v(x) \in E_\lambda(u)$ **: chaque sous-espace propre de** u **est stable par** v**.**

3. Comme u est diagonalisable, $E = \bigoplus_\lambda E_\lambda(u)$. Chaque $E_\lambda(u)$ est stable par v. D'après la question 1, appliquée à v, la restriction de v à $E_\lambda(u)$ est diagonalisable. On choisit une base de vecteurs propres de cette restriction. Ses vecteurs sont propres pour v, et aussi pour u, de valeur propre λ. **La réunion de ces bases est une base de vecteurs propres communs.**

4. On calcule $AB = \left([\text{ray?}] \begin{matrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{matrix},\right) = BA$. Ensuite, $A(1,1) = 3(1,1)$ et $A(1,-1) = (1,-1)$. De même, $B(1,1) = 3(1,1)$ et $B(1,-1) = -(1,-1)$. **La base** $((1,1),(1,-1))$ **diagonalise simultanément** A **et** B**.**

Corrigé de l'exercice 20 : Matrice compagnon

1. On a $XI_3 - C = \begin{pmatrix} X & 0 & a_0 \\ -1 & X & a_1 \\ 0 & -1 & X + a_2 \end{pmatrix}$. On développe selon la première colonne :

$$\chi_C = X(X(X + a_2) + a_1) + \det\begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ -1 & X, X + a_2 \end{pmatrix} = X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0.$$

Ainsi $\chi_C = X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$**.**

2. On lit les colonnes : $C\, e_1 = e_2$, puis $C^2 e_1 = C\, e_2 = e_3$. Soit $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$ tel que $Q(C) = 0$. Alors

$Q(C)\,e_1 = b_0\,e_1 + b_1\,e_2 + b_2\,e_3 = 0$, donc $Q = 0$. Par conséquent, $\deg \mu_C \geq 3$. Comme μ_C divise χ_C, unitaire de degré 3, **on obtient** $\mu_C = \chi_C$.

3. Dans $C - \lambda I_3$, le mineur formé des lignes $2, 3$ et des colonnes $1, 2$ vaut $\det\begin{pmatrix} , & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$. Donc $\operatorname{rg}(C - \lambda I_3) \geq 2$, et chaque sous-espace propre est de dimension au plus 1. Ainsi, C est diagonalisable si et seulement si elle a trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$. **C'est équivalent à : χ_C a trois racines distinctes dans $\mathbb{K}$.**

4. On a $\chi_C = X^3 - 2X^2 - X + 2 = X^2(X-2) - (X-2) = (X-2)(X-1)(X+1)$. La matrice est $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. En résolvant $(C - \lambda I_3)v = 0$ avec $v_3 = 1$, on obtient $v = (\lambda^2 + a_2\lambda + a_1, \lambda + a_2, 1)$. **Base propre : $(-2, -1, 1)$ pour 1, $(2, -3, 1)$ pour -1, et $(-1, 0, 1)$ pour 2.** Par exemple, $C(-1, 0, 1) = (-2, 0, 2)$.

Corrigé de l'exercice 21 : Problème : étude complète d'une matrice d'ordre 3

1. On a $XI_3 - M = \begin{pmatrix} X-2 & -2 & 1 \\ -1 & X & \\ 0 & -2 & X-1 \end{pmatrix}$. On développe selon la deuxième ligne :

$$\chi_M = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ X-2 & X-1 \end{pmatrix} + X(X-2)(X-1) = X(X-2)(X-1) - 2(X-2).$$

Ainsi $\chi_M = (X-2)(X^2 - X - 2)$. **Donc** $\chi_M = (X+1)(X-2)^2 = X^3 - 3X^2 + 4$.

2. Pour -1, le système $(M + I_3)v = 0$, avec $v = (x, y, z)$, donne $x = -y$ et $z = -y$. Pour 2, la matrice $M - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ donne $z = 2y$ et $x = 2y$. **Donc $E_{-1} = \operatorname{Vect}(1, -1, 1)$ et $E_2 = \operatorname{Vect}(2, 1, 2)$.** La valeur propre double a un sous-espace propre de dimension 1. **Ainsi M n'est pas diagonalisable, et $\mu_M = (X+1)(X-2)^2$.**

3. Par Cayley-Hamilton, $M^3 - 3M^2 + 4I_3 = 0$, donc $M(3M - M^2) = 4I_3$. On calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & & \\ , & -1 & \\ 2 & 2 & 1{,}1 \end{pmatrix}$. **Donc** $M^{-1} = \frac{1}{4}(3M - M^2) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Par exemple, la troisième ligne de M fois la troisième colonne donne $\frac{1}{4}(2+2) = 1$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

4. Les polynômes $X+1$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux, et leur produit χ_M annule M. Le lemme des noyaux donne donc la somme directe. On calcule $(M-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -2 & , & -1 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. Son noyau est le plan $2x-6y+z=0$. **Bases :** $(1,-1,1)$ **pour** $\ker(M+I_3)$ **, et** $\big((2,1,2),(3,1,0)\big)$ **pour** $\ker(M-2I_3)^2$ **.**

5. On a $(X-2)^2 = X^2-4X+4$ et $(X-5)(X+1) = X^2-4X-5$. Leur différence vaut bien 9. Ainsi $I_3 = p_1+p_2$, avec $p_1 = \frac{1}{9}(M-2I_3)^2$ et $p_2 = -\frac{1}{9}(M-5I_3)(M+I_3)$. Comme $(M+I_3)p_1 = \frac{1}{9}\chi_M(M) = 0$, l'image de p_1 est dans $\ker(M+I_3)$. De même, l'image de p_2 est dans $\ker(M-2I_3)^2$. **Donc** $p_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -2 & , & -1 \\ 2 & -6 & \&1 \end{pmatrix}$ **et** $p_2 = I_3 - p_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 2 & & \\ , & 1 & \\ -2 & 6 & 8{,}8 \end{pmatrix}$**.** On vérifie que $p_1(1,-1,1) = (1,-1,1)$ et que $p_1(3,1,0) = 0$.

6. On prend $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (2,1,2)$ et $v_3 = (3,1,0)$. On a $M\,v_1 = -v_1$ et $M\,v_2 = 2\,v_2$. Enfin, $M\,v_3 = (8,3,2) = 2\,v_3 + v_2$. **Donc** $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0\text{o} \end{pmatrix}$, de déterminant $-9 \neq 0$, convient.

7. Soit $x \in \mathbb{R}^3$, avec $x_1 = p_1(x)$ et $x_2 = p_2(x)$. D'une part, $M^n\,x_1 = (-1)^n\,x_1$. D'autre part, sur $\ker(M-2I_3)^2$, on écrit $M = 2I_3 + (M-2I_3)$, où les deux termes commutent et où $(M-2I_3)^2$ s'annule. Le binôme donne $M^n\,x_2 = 2^n\,x_2 + n2^{n-1}(M-2I_3)x_2$. En sommant, **on obtient** $M^n = (-1)^n\,p_1 + 2^n\,p_2 + n2^{n-1}(M-2I_3)p_2$**.** Enfin, le calcul donne

$$(M-2I_3)p_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & , & -1 \\ 2 & 0 & -,-2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est nilpotente de rang 1**, et son image est la droite propre** E_2**.** Pour $n=1$, on retrouve $M = -p_1 + M\,p_2$, ce qui est cohérent avec $M\,p_1 = -p_1$.

Point de méthode : Cayley-Hamilton fournit l'annulateur, le lemme des noyaux découpe l'espace, et Bézout donne les projecteurs. Il ne reste plus qu'à traiter une partie nilpotente sur chaque sous-espace caractéristique.

[Revenir aux énoncés des exercices]

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : trigonalisation et Cayley-Hamilton, cours de maths en L2
- Les énoncés : exercices de maths en L2 sur trigonalisation et Cayley-Hamilton
- À maîtriser avant : Valeurs propres et diagonalisation
- Chapitre précédent : Valeurs propres et diagonalisation
- Chapitre suivant : Arithmétique et anneau Z/nZ
- Tester vos connaissances : QCM de maths en L2 par chapitre
- Le sommaire : tous les chapitres de maths de L2 et la licence de maths de L1 à L3

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.