

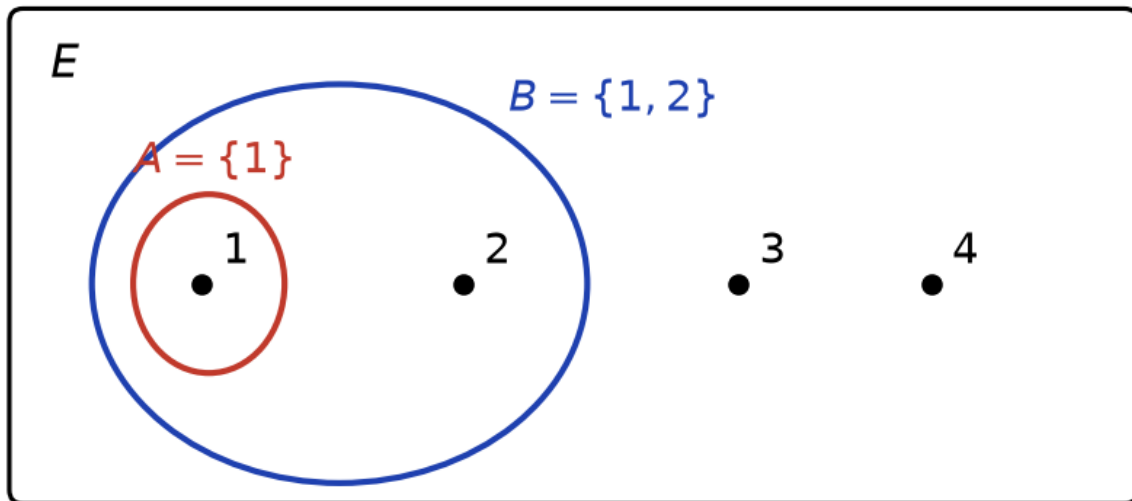
Tribus et mesures

Exercice 1 : Ensembles dénombrables et argument diagonal

1. Montrer que l'application $(m, n) \rightarrow 2^m 3^n$ est injective de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. En déduire par récurrence que $\mathbb{N}^p$ est dénombrable pour tout $p \geq 1$.
2. Montrer que l'application $A \rightarrow \sum_{k \in A} 2^k$ est une bijection de l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.
3. Montrer que l'ensemble des intervalles $]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$ et $a < b$ est dénombrable.
4. Soit $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ une application. On pose $D = \{n \in \mathbb{N} : n \notin s(n)\}$. Montrer que D n'a pas d'antécédent par s . Que peut-on en conclure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?
5. Sachant que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, montrer que l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des irrationnels n'est pas dénombrable.

Exercice 2 : Tribu engendrée sur un ensemble fini

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1\}$ et $B = \{1, 2\}$, comme sur la figure ci-dessous.



1. Déterminer la tribu $\sigma(\{A\})$.
2. Déterminer une partition de E en trois parties dont chacune s'écrit à l'aide de A et B . En déduire la liste complète des éléments de $\sigma(\{A, B\})$.
3. La partie $\{1, 3\}$ appartient-elle à $\sigma(\{A, B\})$?
4. Soit E fini et $\{E_1, \dots, E_p\}$ une partition de E en parties non vides. Combien d'éléments possède la tribu engendrée par cette partition ?

Exercice 3 : Une algèbre qui n'est pas une tribu

On note $\mathcal{F}$ la famille des parties $A \subset \mathbb{N}$ telles que A est finie ou $\mathbb{N} \setminus A$ est finie.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une algèbre.
2. Montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas une tribu.
3. Déterminer la tribu $\sigma(\mathcal{F})$.
4. Pour $A \in \mathcal{F}$, on pose $\mu(A) = 0$ si A est finie et $\mu(A) = 1$ sinon. Montrer que μ est additive sur $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ si $A, B \in \mathcal{F}$ sont

disjointes. Montrer ensuite qu'aucune mesure sur $\sigma(\mathcal{F})$ ne prolonge μ .

Exercice 4 : Tribu des parties dénombrables ou codénombrables

On note $\mathcal{T}$ la famille des parties $A \subset \mathbb{R}$ telles que A est dénombrable ou $\mathbb{R} \setminus A$ est dénombrable.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par les singletons.
3. Montrer que $[0,1] \notin \mathcal{T}$. En déduire que $\mathcal{T}$ est strictement incluse dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
4. Pour $A \in \mathcal{T}$, on pose $\mu(A) = 0$ si A est dénombrable et $\mu(A) = 1$ sinon. Montrer que μ est bien définie et que c'est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Exercice 5 : Réunions de tribus

1. Soit $E = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A}_1 = \sigma(\{\{1\}\})$ et $\mathcal{A}_2 = \sigma(\{\{2\}\})$. Montrer que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ n'est pas une tribu. Déterminer $\sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$.
2. Sur $\mathbb{N}$, on pose $\mathcal{A}_n = \sigma(\{\{0\}, \{1\}, \dots, \{n\}\})$. Montrer qu'une partie $B \subset \mathbb{N}$ appartient à $\mathcal{A}_n$ si et seulement si $B \cap \{n+1, 2, \dots\}$ est vide ou égal à $\{n+1, 2, \dots\}$.
3. Montrer que la suite $(\mathcal{A}_n)$ est croissante et que $\mathcal{U} = \bigcup_n \mathcal{A}_n$ est une algèbre.
4. Montrer que $\mathcal{U}$ n'est pas une tribu. Conclure sur la réunion croissante de tribus.

Exercice 6 : Tribu image réciproque et tribu transportée

Soit $f: E \rightarrow F$ une application.

1. Soit $\mathcal{B}$ une tribu sur F . Montrer que $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur E .
2. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur E . Montrer que $\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{l} B \subset F \\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \end{array} \right\}$ est une tribu sur F .
3. Montrer par un exemple que la famille $\{f(A), A \in \mathcal{A}\}$ n'est pas toujours une tribu sur F .
4. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$. Montrer que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

Exercice 7 : Générateurs de la tribu borélienne

1. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par la famille des demi-droites $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par la famille des parties compactes de $\mathbb{R}$.
3. En utilisant l'exercice 4, montrer que la tribu engendrée par les singletons de $\mathbb{R}$ est strictement incluse dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 8 : Premières propriétés d'une mesure

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $A, B, C \in \mathcal{A}$ de mesures finies.

1. Démontrer la formule d'inclusion-exclusion

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C).$$

2. On suppose que μ est une probabilité, que $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C) = \frac{1}{2}$, que les trois intersections deux à deux sont de mesure $\frac{1}{4}$ et que $\mu(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$. Calculer $\mu(A \cup B \cup C)$ et $\mu(A^c \cap B^c \cap C^c)$.

3. Soit (A_n) une suite de $\mathcal{A}$. Montrer que si $\mu(A_n) = 0$ pour tout n , alors $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = 0$. Si μ est une probabilité et si $\mu(A_n) = 1$ pour tout n , montrer que $\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = 1$.
4. Soit $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ telle que $\nu(\emptyset) = 0$, additive pour les réunions finies disjointes, et continue sur les suites croissantes. Montrer que ν est une mesure.

Exercice 9 : Une mesure discrète sur $\mathbb{N}$

Sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on considère $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \delta_n$.

1. Montrer que μ est une mesure de probabilité. Déterminer les parties A telles que $\mu(A) = 0$.
2. Calculer la mesure de l'ensemble P des entiers pairs, puis celle de l'ensemble I des entiers impairs.
3. Pour $N \geq 1$, calculer $\mu(\{n \in \mathbb{N} : n \geq N\})$. Calculer aussi la mesure de l'ensemble des multiples de 3.
4. Vérifier la continuité décroissante sur la suite $A_N = \{n \geq N\}$. Que se passe-t-il pour la mesure de comptage ?
5. Soit $\nu = \delta_0 + c$, où c est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Calculer $\nu(\{0, 1, 2\})$ et $\nu(P)$.

Exercice 10 : Mesures sur un ensemble dénombrable et atomes

1. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\{n\}) \delta_n$.
2. Montrer qu'il n'existe aucune probabilité sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui donne la même masse à tous les singletons.

3. Montrer que la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ est σ -finie mais pas finie.
4. Soit μ une mesure finie sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ dont les singletons sont mesurables. Un point x est un **atome** si $\mu(\{x\}) > 0$. Montrer que, pour $k \geq 1$, l'ensemble $S_k = \left\{x: \mu(\{x\}) > \frac{1}{k}\mu(E)\right\}$ a moins de $k\mu(E)$ éléments. En déduire que l'ensemble des atomes est dénombrable.
5. Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on pose $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \delta_{1/n}$. Calculer $\mu(]0, \frac{1}{2}])$, $\mu(\{0\})$ et $\mu(]0, \varepsilon])$ pour $\varepsilon > 0$.

Exercice 11 : Continuité monotone et fonction de répartition

Soit μ une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $F(x) = \mu(]-\infty, x])$.

1. Montrer que F est croissante, qu'elle tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.
2. Montrer que F est continue à droite, que sa limite à gauche en x vaut $F(x^-) = \mu(]-\infty, x[)$, et que $\mu(\{x\}) = F(x) - F(x^-)$.
3. En déduire que F est continue en x si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.
4. On pose désormais $\mu(B) = \frac{1}{2} \delta_0(B) + \frac{1}{2} \lambda(B \cap [0,1])$ pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que μ est une probabilité.
5. Calculer F et tracer son graphe.
6. Calculer $\mu(\{0\})$, $\mu(]0, \frac{1}{2}])$, $\mu([0, \frac{1}{2}])$ et $\mu(\mathbb{Q})$.

Exercice 12 : Lemme de Borel-Cantelli

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et (A_n) une suite de $\mathcal{A}$. On pose

$$\limsup A_n = \bigcap_{N \geq 0} \bigcup_{n \geq N} A_n.$$

1. Montrer que $x \in \limsup A_n$ si et seulement si x appartient à une infinité de A_n .
2. On suppose que $\sum \mu(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mu(\limsup A_n) = 0$. Traduire ce résultat par une phrase contenant « presque partout ».
3. Pour $q \geq 1$, on pose $A_q = \bigcup_{p=0}^q]\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3}[$. Montrer que $\lambda(A_q) \leq \frac{4}{q^2}$. En déduire que, pour presque tout $x \in [0,1]$, il n'existe qu'un nombre fini d'entiers $q \geq 1$ tels que $|\frac{p}{q} - x| < \frac{1}{q^3}$ pour un certain $p \in \{0, \dots, q\}$.
4. Montrer par un exemple que l'on peut avoir $\sum \lambda(A_n) = +\infty$ et $\lambda(\limsup A_n) = 0$.

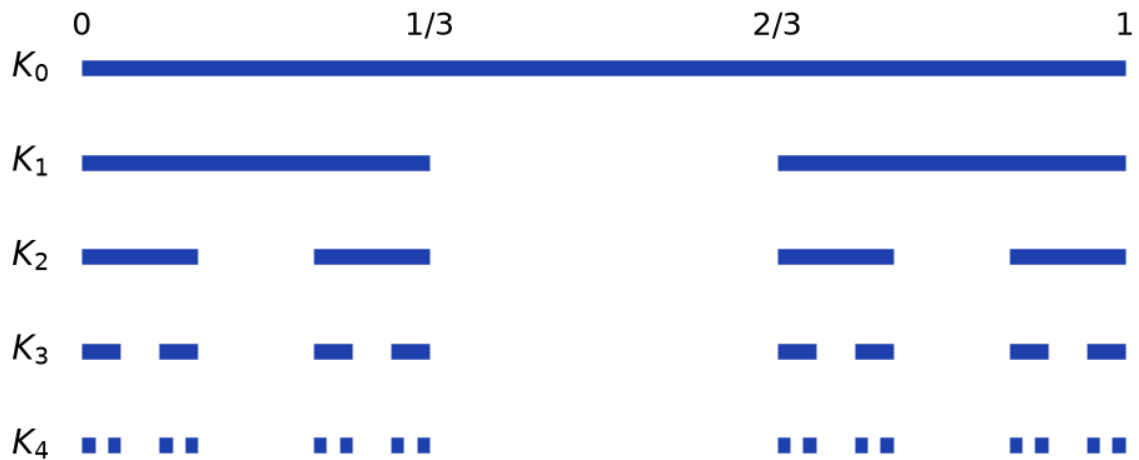
Exercice 13 : Ensembles négligeables pour la mesure de Lebesgue

1. Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques $\{k 2^{-n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ est négligeable.
2. Montrer qu'une partie négligeable de $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide. En déduire que le complémentaire d'un ensemble négligeable est dense.
3. Montrer que $\lambda([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = 1$. Retrouver ainsi que $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable.
4. Montrer que $\mathbb{Z}$ est négligeable et que $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = +\infty$.
5. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Construire un ouvert U dense dans $[0,1]$ tel que $\lambda(U) \leq \varepsilon$.

Exercice 14 : L'ensemble triadique de Cantor

On pose $K_0 = [0,1]$. On obtient K_{n+1} en retirant de chaque segment de K_n son tiers central ouvert. Ainsi, $K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. On note $K = \bigcap_n K_n$. La figure ci-dessous montre les

premières étapes.

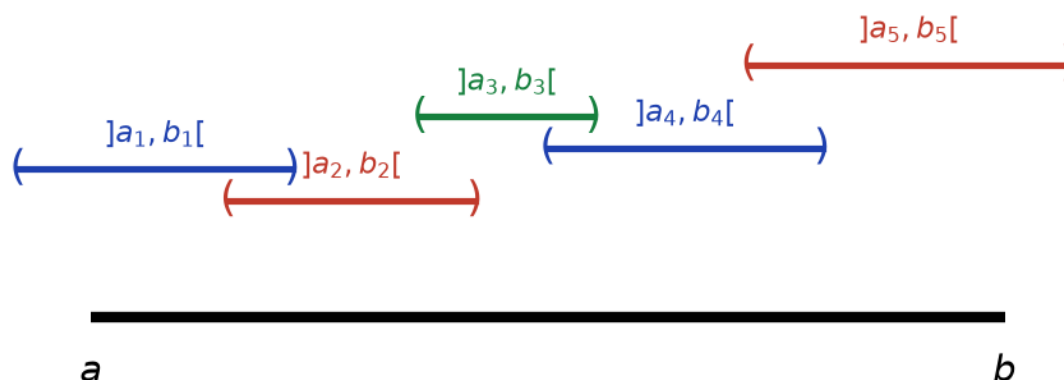


1. Montrer que K_n est la réunion de 2^n segments disjoints de longueur 3^{-n} . Calculer $\lambda(K_n)$.
2. Montrer que K est un compact, qu'il est borélien et que $\lambda(K) = 0$.
3. Calculer la somme des longueurs des intervalles retirés au cours de la construction.
4. Montrer que les segments de K_n sont les $[a, a + 3^{-n}]$ avec $a = \sum_{k=1}^n \epsilon_k 3^{-k}$ et $\epsilon_k \in \{0, 2\}$. En déduire que, pour toute suite $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$ à valeurs dans $\{0, 2\}$, le réel $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k 3^{-k}$ appartient à K .
5. Montrer que l'application $(\epsilon_k) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k 3^{-k}$ est injective. En déduire que K est négligeable mais non dénombrable.

Exercice 15 : Mesure extérieure de Lebesgue d'un segment

On rappelle que $\lambda^*(A)$ est la borne inférieure des sommes $\sum_n (b_n - a_n)$ sur les suites d'intervalles ouverts $]a_n, b_n[$ qui recouvrent A . Soit $a \leq b$. On veut prouver que

$\lambda^*([a,b]) = b - a$. La figure ci-dessous montre un recouvrement fini d'un segment par des intervalles ouverts.



1. Montrer que $\lambda^*([a,b]) \leq b - a$.
2. Montrer par récurrence sur $p \geq 1$: si $[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^p]a_k, b_k[$, alors
$$\sum_{k=1}^p (b_k - a_k) > b - a.$$
3. À l'aide du théorème de Borel-Lebesgue, en déduire que $\lambda^*([a,b]) = b - a$.
4. En déduire $\lambda^*([a,b]) = b - a$, $\lambda^*(\mathbb{R}) = +\infty$ et $\lambda^*([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = 1$.

Exercice 16 : Mesures extérieures et parties mesurables

1. Soit E un ensemble ayant au moins deux éléments. On pose $\mu^*(\emptyset) = 0$ et $\mu^*(A) = 1$ si $A \neq \emptyset$. Montrer que μ^* est une mesure extérieure.
2. Déterminer les parties μ^* -mesurables.
3. Sur $\mathbb{R}$, on pose $\nu^*(A) = 0$ si A est dénombrable et $\nu^*(A) = 1$ sinon. Montrer que ν^* est une mesure extérieure.

4. Montrer que les parties ν^* -mesurables sont exactement les parties dénombrables ou de complémentaire dénombrable. Quelle mesure le théorème de Carathéodory fournit-il ?

Exercice 17 : Invariance de la mesure de Lebesgue

On utilise le théorème d'unicité des mesures du cours.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x + A$ est borélien pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, puis que $\nu(A) = \lambda(x + A)$ définit une mesure égale à λ .
2. Soit $c \neq 0$. Montrer de même que $\lambda(cA) = |c| \lambda(A)$ pour tout borélien A .
3. Soit μ une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ invariante par translation, telle que $\mu([0,1]) = \alpha < +\infty$. Montrer que $\mu([0, \frac{1}{q}]) = \frac{\alpha}{q}$ pour tout $q \geq 1$, puis que $\mu([0,t]) = \alpha t$ pour tout $t > 0$. En déduire que $\mu = \alpha \lambda$.

Exercice 18 : Fonctions mesurables usuelles

1. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $A \subset E$. Montrer que 1_A est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.
2. Montrer que toute fonction croissante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne.
3. Justifier que les fonctions $1_{\mathbb{Q}}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et $h : x \mapsto x^2 1_{[0,1]}(x) + e^x 1_{]1, +\infty[}(x)$ sont boréliennes.
4. On munit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ de la tribu $\mathcal{A} = \sigma(\{\{1\}, \{1, 2\}\})$ de l'exercice 2. Caractériser les fonctions $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables. La fonction $f(k) = k$ est-elle mesurable ?

Exercice 19 : Suites de fonctions mesurables

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et (f_n) une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On admet qu'une fonction $g : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable dès que $\{g \leq a\} \in \mathcal{A}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$ et $\limsup f_n$ sont mesurables.
2. Montrer que l'ensemble C des $x \in E$ tels que la suite $(f_n(x))$ converge dans $\mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{A}$.
3. On pose $f(x) = \lim f_n(x)$ si $x \in C$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que f est mesurable.
4. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que g' est borélienne.

Exercice 20 : Égalité presque partout

1. Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et égales λ -presque partout. Montrer que $f = g$.
2. Pour $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = x^n$. Montrer que (f_n) converge λ -presque partout vers 0, mais pas partout.
3. Montrer que $1_{\mathbb{Q}}$ est égale presque partout à une fonction continue, mais que $1_{[0, +\infty[}$ ne l'est pas.
4. On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Dirac δ_0 . À quelle condition deux fonctions boréliennes f et g sont-elles égales δ_0 -presque partout ?

Exercice 21 : Approximation par des fonctions étagées

On munit $[0, 1]$ de sa tribu borélienne et on pose $f(x) = x^2$. Pour $n \geq 1$, on note $\varphi_n = \min(n, 2^{-n} \lfloor 2^n f \rfloor)$ l'approximation du cours.

1. Écrire φ_1 et φ_2 sous forme canonique, en précisant les ensembles sur lesquels elles sont constantes.

- Montrer que $0 \leq f - \varphi_n < 2^{-n}$ sur $[0,1]$ pour tout $n \geq 1$.
- Pour une fonction étagée positive $\varphi = \sum \alpha_i \cdot 1_{A_i}$ écrite sous forme canonique, on pose $I(\varphi) = \sum \alpha_i \lambda(A_i)$. Calculer $I(\varphi_2)$ et comparer à $\frac{1}{3}$.
- Montrer que $g = 1_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}}$ est une fonction étagée et calculer $I(g)$. Pourquoi g n'est-elle pas une fonction en escalier ?

Exercice 22 : Problème : un ensemble non mesurable

Sur $[0,1]$, on note $x \sim y$ lorsque $x - y \in \mathbb{Q}$. On admet l'axiome du choix.

- Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $[0,1]$.
- On choisit une partie $V \subset [0,1]$ qui contient exactement un élément de chaque classe d'équivalence. Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ une énumération de $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ et $V_n = r_n + V$. Montrer que les V_n sont deux à deux disjoints.
- Montrer que $[0,1] \subset \bigcup_n V_n \subset [-1,2]$.
- On suppose que V est borélien. En utilisant l'invariance par translation de λ , obtenir une contradiction.
- En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, puis qu'aucune mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ invariante par translation ne vérifie $0 < \mu([0,1]) < +\infty$.

Exercice 23 : Problème : lemme de classe monotone et unicité des mesures

Une famille $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(E)$ est une **classe monotone** si $E \in \mathcal{M}$, si $B \setminus A \in \mathcal{M}$ dès que $A, B \in \mathcal{M}$ et $A \subset B$, et si $\mathcal{M}$ est stable par réunion croissante dénombrable.

- Montrer qu'une tribu est une classe monotone et qu'une intersection de classes monotones est une

classe monotone. On note $m(\mathcal{C})$ la plus petite classe monotone contenant $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$.

2. Montrer qu'une classe monotone stable par intersection finie est une tribu.
3. On suppose $\mathcal{C}$ stable par intersection finie. Pour $A \in \mathcal{C}$, on pose $\mathcal{M}_1 = \{B \in m(\mathcal{C}) : A \cap B \in m(\mathcal{C})\}$. Montrer que $\mathcal{M}_1 = m(\mathcal{C})$.
4. Pour $B \in m(\mathcal{C})$, on pose $\mathcal{M}_2 = \{A \in m(\mathcal{C}) : A \cap B \in m(\mathcal{C})\}$. Montrer que $\mathcal{M}_2 = m(\mathcal{C})$. En déduire que $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.
5. Soit μ et ν deux mesures finies sur $\sigma(\mathcal{C})$, égales sur $\mathcal{C}$ et telles que $\mu(E) = \nu(E)$. Montrer que $\mu = \nu$.
6. Sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$, on prend $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$, $\mu = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_4)$ et $\nu = \frac{1}{2}(\delta_2 + \delta_3)$. Montrer que μ et ν coïncident sur $\mathcal{C}$ et sur E , mais pas sur $\sigma(\mathcal{C})$. Quelle hypothèse manque ?

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [tribus et mesures, cours de maths en L3](#)
- À maîtriser avant : [Espaces métriques : ouverts, fermés, continuité](#)
- Chapitre précédent : [Complétude, espaces de Banach et point fixe](#)

- Chapitre suivant : [Intégrale de Lebesgue et théorèmes de convergence](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)