

Tribus et mesures

I. Ensembles dénombrables

La théorie de la mesure repose sur une distinction simple : ce qui est dénombrable et ce qui ne l'est pas. En effet, une mesure est additive pour les réunions dénombrables, mais pas au-delà. Il faut donc d'abord savoir reconnaître un ensemble dénombrable.

1. Définition et premiers exemples

Définition :

Un ensemble D est **dénombrable** s'il existe une injection de D dans $\mathbb{N}$. De manière équivalente, D est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$. Un ensemble qui n'est pas dénombrable est dit **non dénombrable**.

Ainsi, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et toute partie de $\mathbb{N}$ sont dénombrables. Pour $\mathbb{Z}$, l'application qui envoie $n \geq 0$ sur $2n$ et $n < 0$ sur $-2n-1$ est une bijection vers $\mathbb{N}$.

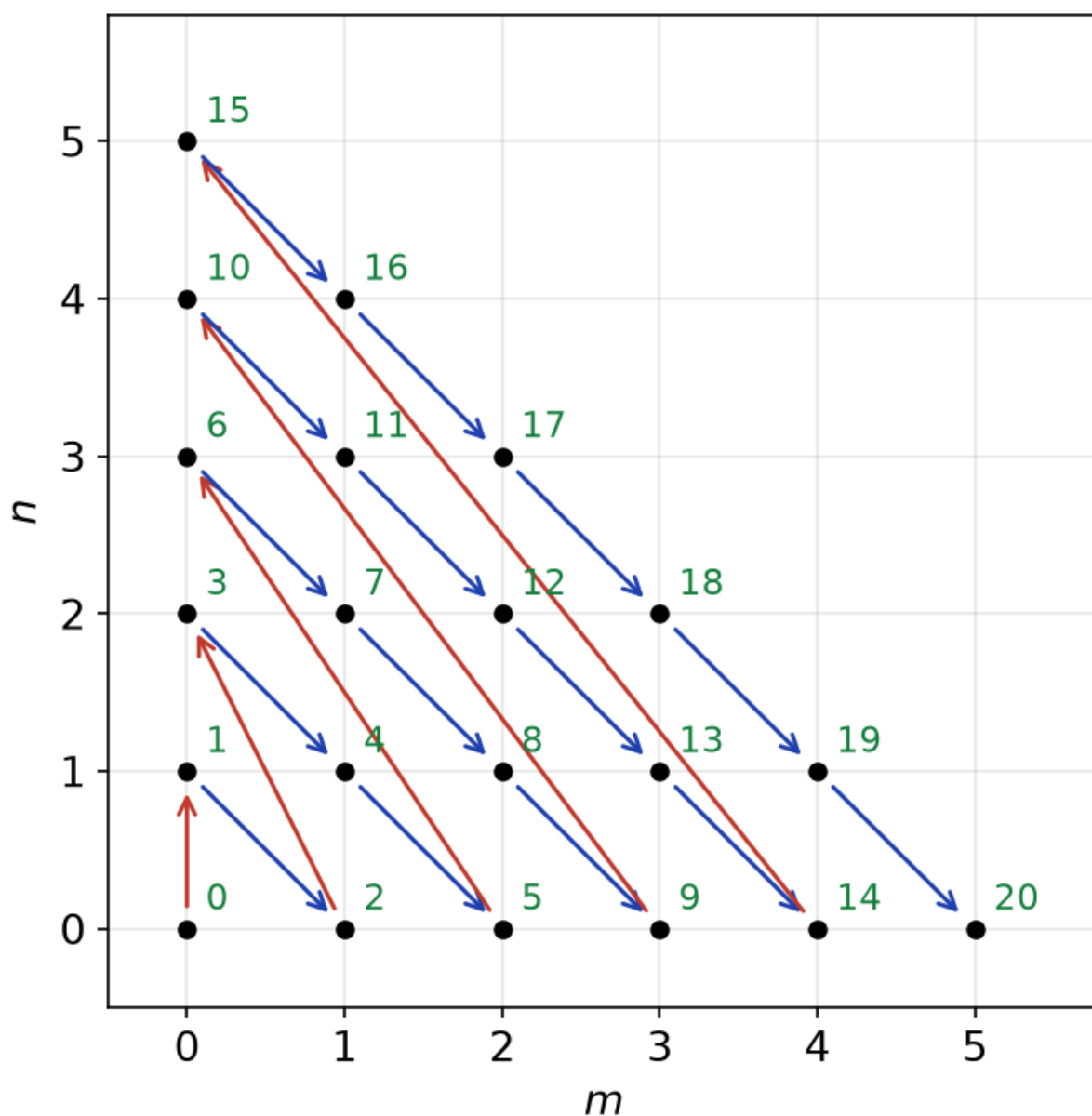
Exemple :

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. D'abord, on parcourt les couples diagonale par diagonale : on range (m, n) selon la valeur de $m+n$, puis selon m . On obtient ainsi la bijection de Cantor

$$\pi(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m.$$

Plus simplement, l'application $(m,n) \rightarrow 2^m 3^n$ est injective par unicité de la décomposition en facteurs premiers.

La figure ci-dessous montre ce parcours en diagonale. Chaque couple reçoit un numéro, et aucun couple n'est oublié.



2. Stabilité et ensembles non dénombrables

Propriété :

Une partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable. L'image d'un ensemble dénombrable par une application est dénombrable. Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Enfin, une **réunion dénombrable d'ensembles dénombrables** est dénombrable.

Démonstration :

Traisons la réunion $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, avec chaque D_n non vide. Pour chaque n , on choisit une surjection $s_n : \mathbb{N} \rightarrow D_n$. Alors $(n, k) \rightarrow s_n(k)$ est une surjection de $\mathbb{N}^2$ sur D . Par conséquent, D est l'image d'un ensemble dénombrable, donc D est dénombrable.

Par exemple, $\mathbb{Q}$ est dénombrable : c'est l'image de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par $(p, q) \rightarrow p/q$. En revanche, $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

Théorème :

L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0,1\}$ n'est pas dénombrable. Par suite, $\mathbb{R}$ et tout intervalle non trivial ne sont pas dénombrables.

Démonstration :

Soit $(u^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On pose $v_k = 1 - u_k^{(k)}$: c'est l'**argument diagonal**. Pour tout k , la suite v diffère de $u^{(k)}$ au rang k . Donc aucune suite ne recouvre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Ensuite, $v \rightarrow \sum v_k 3^{-k-1}$ est injective de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $[0,1]$, ce qui conclut.

II. Algèbres et tribus

On veut mesurer des parties d'un ensemble E . Cependant, on ne peut pas toujours mesurer toutes les parties. On choisit donc une famille de parties stable par les opérations naturelles. C'est la notion de tribu.

1. Définitions

Définition :

Soit E un ensemble. Une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ est une **algèbre** si $E \in \mathcal{A}$, si $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire et par réunion finie. C'est une **tribu** (ou σ -algèbre) si, de plus, elle est stable par réunion dénombrable : pour toute suite (A_n) de $\mathcal{A}$, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$. Le couple $(E, \mathcal{A})$ est alors un **espace mesurable**.

Par passage au complémentaire, une tribu contient $\emptyset$ et elle est stable par intersection dénombrable. De même, elle est stable par différence $A \setminus B = A \cap B^c$.

Exemple :

Les familles $\{\emptyset, E\}$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des tribus. Pour $A \subset E$, la famille $\{\emptyset, A, A^c, E\}$ est une tribu. Sur $\mathbb{N}$, les parties finies ou de complémentaire fini forment une algèbre. En revanche, ce n'est pas une tribu : l'ensemble des entiers pairs est une réunion dénombrable de singletons, mais il n'est ni fini ni cofini.

Méthode :

Pour **montrer qu'une famille est une tribu**, on vérifie trois points dans l'ordre. D'abord, E appartient à la famille. Ensuite, le complémentaire d'un élément est encore un élément. Enfin, une réunion dénombrable d'éléments en est un. Pour montrer qu'une famille n'est pas une tribu, un

contre-exemple explicite suffit, souvent une réunion dénombrable qui sort de la famille.

2. Tribu engendrée

Proposition :

Une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu. Pour $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, on appelle **tribu engendrée** par $\mathcal{C}$ et on note $\sigma(\mathcal{C})$ l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$. C'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$.

Cette définition est peu constructive. Ainsi, on ne décrit presque jamais $\sigma(\mathcal{C})$ élément par élément. On raisonne plutôt par un argument de minimalité.

Méthode :

Pour prouver $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}$, où $\mathcal{T}$ est une tribu, il suffit de prouver $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$. Pour prouver $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}')$, on montre que $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C}')$ et $\mathcal{C}' \subset \sigma(\mathcal{C})$.

Exemple :

Si $(E_i)_{i \in I}$ est une partition dénombrable de E , alors $\sigma(\{E_i, i \in I\})$ est formée des réunions $\bigcup_{i \in J} E_i$ avec $J \subset I$. En effet, cette famille est une tribu, elle contient les E_i , et toute tribu contenant les E_i contient ces réunions dénombrables. Les E_i sont appelés les **atomes** de la tribu.

3. Image réciproque et trace

Proposition :

Soit $f: E \rightarrow F$ et $\mathcal{B}$ une tribu sur F . Alors $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur E . De plus, si $A \subset E$ et $\mathcal{A}$ est une tribu sur E , la **tribu trace** $\{A \cap X, X \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur A .

La preuve tient au fait que l'image réciproque commute avec le complémentaire et les réunions. Par exemple, $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$.

III. La tribu borélienne

Définition :

Soit X un espace topologique, par exemple $\mathbb{R}^d$. La **tribu borélienne** $\mathcal{B}(X)$ est la tribu engendrée par les ouverts de X . Ses éléments sont les **boréliens**.

Les fermés sont boréliens, comme complémentaires d'ouverts. Ensuite, les singletons de $\mathbb{R}$ sont fermés, donc boréliens. Par conséquent, toute partie dénombrable de $\mathbb{R}$ est borélienne, par exemple $\mathbb{Q}$. De même, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est borélien.

Théorème :

La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par chacune des familles suivantes : les intervalles ouverts $]a, b[$; les demi-droites $] -\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{Q}$; les intervalles $]a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$.

Démonstration :

Notons $\mathcal{T} = \sigma(\{]-\infty, a], a \in \mathbb{Q}\})$. Chaque $]-\infty, a]$ est fermé, donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Réciproquement, pour $a \in \mathbb{R}$, on choisit des rationnels a_n décroissant vers a . Alors $]-\infty, a] = \bigcap_n]-\infty, a_n] \in \mathcal{T}$. Ensuite, $]-\infty, b[= \bigcup_n]-\infty, b - \frac{1}{n}]$, donc $]a, b[=]-\infty, b[\cap]-\infty, a]^c \in \mathcal{T}$. Or tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts à extrémités rationnelles. Donc tout ouvert est dans $\mathcal{T}$, et $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}$.

Remarque :

On a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. En exercice, on montre qu'aucune mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ invariante par translation ne donne à $[0,1]$ une masse finie non nulle. C'est pourquoi on ne peut pas mesurer toutes les parties de $\mathbb{R}$.

IV. Mesures positives

1. Définition et exemples

Définition :

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une **mesure positive** est une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et, pour toute suite (A_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Cette propriété est la σ -**additivité**. Le triplet $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un **espace mesuré**. La mesure est finie si $\mu(E) < +\infty$, de probabilité si $\mu(E) = 1$, et σ -finie si E est réunion dénombrable de parties de mesure finie.

Exemple :

La **mesure de Dirac** en $a \in E$ est $\delta_a(A) = 1$ si $a \in A$, et 0 sinon. La **mesure de comptage** sur $\mathcal{P}(E)$ associe à A son cardinal, éventuellement $+\infty$. Enfin, si (a_n) est une suite de $[0, +\infty]$, la formule $\mu = \sum_n a_n \delta_n$ définit une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, avec

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} a_n.$$

Pour la dernière mesure, la σ -additivité résulte du théorème de sommation par paquets pour les familles positives. De plus, toute mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est de cette forme, avec $a_n = \mu(\{n\})$.

2. Propriétés élémentaires

Proposition :

Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$ et $A, B, A_n \in \mathcal{A}$.

(i) Monotonie : si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$. Si de plus $\mu(A) < +\infty$, alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(ii) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(iii) **Sous-additivité dénombrable** : $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu(A_n)$.

Démonstration :

Pour (i), on écrit $B = A \cup (B \setminus A)$, réunion disjointe. Donc

$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$. Pour (ii), on décompose $A \cup B$ en $A \setminus B$, $A \cap B$

et $B \setminus A$, puis on additionne. Pour (iii), on pose $B_0 = A_0$ et

$B_n = A_n \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{n-1})$. Les B_n sont disjoints, de même réunion que les A_n , et $B_n \subset A_n$. Ainsi, $\mu(\bigcup A_n) = \sum \mu(B_n) \leq \sum \mu(A_n)$.

3. Continuité monotone

Théorème :

(i) **Continuité croissante** : si (A_n) est une suite croissante de $\mathcal{A}$, alors

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

(ii) **Continuité décroissante** : si (A_n) est décroissante et si $\mu(A_0) < +\infty$, alors

$$\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

Démonstration :

Pour (i), on pose $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Les B_n sont disjoints et $A_n = B_0 \cup \dots \cup B_n$. Par σ -additivité,

$$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(B_k) = \lim_n \sum_{k=0}^n \mu(B_k) = \lim_n \mu(A_n).$$

Pour (ii), la suite $C_n = A_0 \setminus A_n$ est croissante. On applique (i) à (C_n) , puis la formule

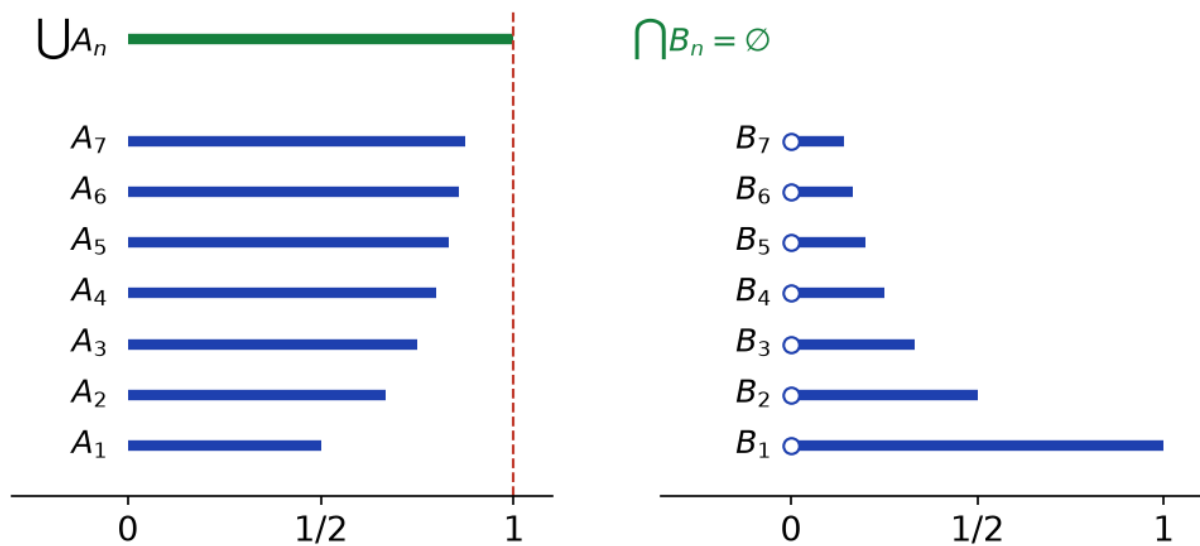
$$\mu(A_0 \setminus A_n) = \mu(A_0) - \mu(A_n),$$

valable car $\mu(A_0)$ est finie.

Comme le montre la figure ci-dessous, une suite croissante d'intervalles « remplit » leur réunion. À l'inverse, une suite décroissante peut se vider complètement.

$A_n = [0, 1 - \frac{1}{n+1}]$ croissante

$B_n =]0, \frac{1}{n}[$ décroissante



Attention :

L'hypothèse $\mu(A_0) < +\infty$ est indispensable. Par exemple, pour la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, les ensembles $A_n = \{n, 1, \dots, 1\}$ décroissent et $\mu(A_n) = +\infty$ pour tout n . Pourtant, leur intersection est vide, de mesure nulle.

Méthode :

Pour **utiliser la continuité monotone**, on écrit l'ensemble étudié comme limite d'une suite monotone d'ensembles simples. Par exemple, $\{x\} = \bigcap_n]x - \frac{1}{n}, x]$ ou $] -\infty, x[= \bigcup_n] -\infty, x - \frac{1}{n}]$. Ensuite, on vérifie la condition de finitude dans le cas décroissant, puis on passe à la limite.

Exemple :

Soit μ une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $F(x) = \mu(]-\infty, x])$ sa **fonction de répartition**. Si

x_n décroît vers x , les ensembles $] -\infty, x_n]$ décroissent vers $] -\infty, x]$. Par continuité décroissante, $F(x_n) \rightarrow F(x)$. Ainsi, F est continue à droite.

4. Unicité d'une mesure

Une mesure est souvent définie sur une petite famille, par exemple sur les intervalles. Il faut alors savoir si ces valeurs la déterminent. Le résultat suivant répond à cette question ; on le démontre dans un problème de la fiche d'exercices.

Théorème :

Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de E stable par intersection finie. Si deux mesures μ et ν sur $\sigma(\mathcal{C})$ coïncident sur $\mathcal{C}$, vérifient $\mu(E) = \nu(E) < +\infty$, alors $\mu = \nu$. Le résultat s'étend au cas où E est réunion croissante d'éléments E_n de $\mathcal{C}$ avec $\mu(E_n) < +\infty$.

V. Mesure extérieure et mesure de Lebesgue

Il reste à construire une mesure qui prolonge la longueur des intervalles. L'idée de Carathéodory consiste à mesurer d'abord toutes les parties par excès, puis à ne garder que celles qui se comportent bien.

1. Mesure extérieure

Définition :

Une **mesure extérieure** sur E est une application $\mu^* : \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, +\infty]$ telle que $\mu^*(\emptyset) = 0$, croissante, et dénombrablement sous-additive. Une partie A est dite μ^* -**mesurable** si, pour toute partie $T \subset E$,

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c).$$

Exemple :

La **mesure extérieure de Lebesgue** d'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_n (b_n - a_n) \right. \\ \left. , \because \right. \\ \left. , A \subset \bigcup_n]a_n, b_n[\right\}.$$

On recouvre A par une suite d'intervalles ouverts et on minimise la longueur totale. Ainsi, $\lambda^*(\{x\}) = 0$, car $\{x\} \subset]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ pour tout $\varepsilon > 0$.

2. Théorème de prolongement de Carathéodory

Théorème :

Soit μ^* une mesure extérieure sur E et $\mathcal{M}$ l'ensemble des parties μ^* -mesurables. Alors $\mathcal{M}$ est une tribu, et la restriction de μ^* à $\mathcal{M}$ est une mesure. De plus, toute partie N telle que $\mu^*(N) = 0$ appartient à $\mathcal{M}$.

Démonstration :

Par sous-additivité, on a toujours $\mu^*(T) \leq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c)$. Il suffit donc de prouver l'inégalité inverse. Si $\mu^*(N) = 0$, alors $\mu^*(T \cap N) = 0$ et $\mu^*(T \cap N^c) \leq \mu^*(T)$, donc $N \in \mathcal{M}$. Ensuite, la définition est symétrique en A et A^c : $\mathcal{M}$ est stable par complémentaire.

Soit $A, B \in \mathcal{M}$. On teste A avec T , puis B avec $T \cap A^c$:

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c \cap B) + \mu^*(T \cap A^c \cap B^c).$$

Or $T \cap (A \cup B) = (T \cap A) \cup (T \cap A^c \cap B)$. Par sous-additivité,

$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap (A \cup B)) + \mu^*(T \cap (A \cup B)^c)$. Donc $\mathcal{M}$ est une algèbre.

Soit enfin (A_k) une suite disjointe de $\mathcal{M}$, $B_n = A_0 \cup \dots \cup A_n$ et $B = \bigcup_k A_k$. Par récurrence, en testant A_n avec $T \cap B_n$, on obtient $\mu^*(T \cap B_n) = \sum_{k=0}^n \mu^*(T \cap A_k)$. Comme $B_n \in \mathcal{M}$ et $B^c \subset B_n^c$,

$$\mu^*(T) \geq \sum_{k=0}^n \mu^*(T \cap A_k) + \mu^*(T \cap B^c).$$

On fait tendre n vers l'infini et on utilise la sous-additivité :

$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap B) + \mu^*(T \cap B^c)$. Donc $B \in \mathcal{M}$. Le choix $T = B$ donne alors la σ -additivité. Enfin, toute réunion dénombrable se ramène à une réunion disjointe grâce aux différences successives.

3. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Théorème :

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont λ^* -mesurables et $\lambda^*([a, b]) = b - a$. Par conséquent, la tribu $\mathcal{L}$ des parties λ^* -mesurables contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. La restriction λ de λ^* à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est l'unique mesure sur les boréliens telle que $\lambda([a, b]) = b - a$ pour tous $a < b$. C'est la **mesure de Lebesgue**.

L'inégalité $\lambda^*([a, b]) \leq b - a$ est immédiate. L'inégalité inverse repose sur la compacité de $[a, b]$: on la démontre en exercice. Quant à l'unicité, elle découle du théorème d'unicité, car les intervalles $]a, b]$ sont stables par intersection et $\mathbb{R} = \bigcup_n]-n, n]$.

Proposition :

La mesure de Lebesgue est invariante par translation : $\lambda(x + A) = \lambda(A)$. De plus, $\lambda(cA) = |c| \lambda(A)$ pour $c \in \mathbb{R}$. Enfin, $\lambda(\{x\}) = 0$, donc $\lambda([a, b]) = \lambda(]a, b[) = b - a$.

VI. Ensembles négligeables et propriété presque partout

Définition :

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie $N \subset E$ est **négligeable** si elle est incluse dans un $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$. Une propriété $P(x)$ est vraie **presque partout** (en abrégé p.p.) si l'ensemble des x où elle est fautive est négligeable.

Par sous-additivité, une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable. La mesure est dite **complète** si tout ensemble négligeable est mesurable. D'après le théorème de Carathéodory, la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{L}$ est complète.

Propriété :

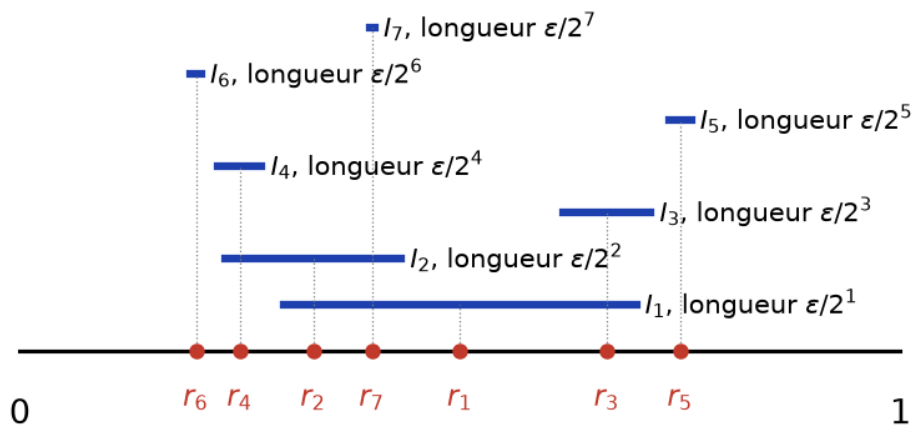
Toute partie dénombrable de $\mathbb{R}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue. En particulier, $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ et $\lambda([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = 1$.

Démonstration :

Soit $D = \{r_1, r_2, \dots\}$ et $\varepsilon > 0$. On recouvre r_k par un intervalle I_k de longueur $\varepsilon / 2^k$. Alors $D \subset \bigcup_k I_k$, donc $\lambda(D) \leq \sum_k \varepsilon 2^{-k} = \varepsilon$. Ceci vaut pour tout

$\varepsilon > 0$, donc $\lambda(D) = 0$.

La figure ci-dessous illustre ce recouvrement. Les intervalles sont de plus en plus courts, si bien que leur longueur totale reste inférieure à ε .



Méthode :

Pour **montrer qu'un ensemble est négligeable**, on dispose de trois outils. D'abord, on l'inclut dans un ensemble mesurable de mesure arbitrairement petite, souvent une réunion d'intervalles. Ensuite, on l'écrit comme réunion dénombrable d'ensembles négligeables. Enfin, on l'inclut dans une intersection décroissante $\bigcap_n A_n$ avec $\mu(A_n) \rightarrow 0$.

Attention :

Un ensemble négligeable n'est pas forcément dénombrable. Par exemple, l'ensemble triadique de Cantor est de mesure nulle et pourtant en bijection avec $\mathbb{R}$. À l'inverse, $\mathbb{Q}$ est dense, mais il est négligeable.

Exemple :

La fonction indicatrice $1_{\mathbb{Q}}$ est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$. De même, la suite $x \rightarrow x^n$ tend vers 0 presque partout sur $[0,1]$, car elle converge vers 0 hors du singleton $\{1\}$.

VII. Fonctions mesurables et fonctions étagées

1. Fonctions mesurables

Définition :

Soit $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Une application $f : E \rightarrow F$ est **mesurable** si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. Lorsque E et F sont munis de leurs tribus boréliennes, on dit que f est **borélienne**.

Proposition :

Si $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$, alors f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ pour tout $C \in \mathcal{C}$. En particulier, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si $\{f \leq a\} \in \mathcal{A}$ pour tout $a \in \mathbb{Q}$.

Démonstration :

La famille $\mathcal{T} = \left\{ B \subset F \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \right\}$ est une tribu sur F , appelée tribu transportée. Par hypothèse, elle contient $\mathcal{C}$. Par minimalité, elle contient $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$. Autrement dit, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. La seconde affirmation découle du théorème sur les générateurs de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Il en découle de nombreux exemples. Ainsi, toute application continue entre espaces topologiques est borélienne, car l'image réciproque d'un ouvert est ouverte. De même, toute fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne, car $\{f \leq a\}$ est alors un intervalle. Enfin, 1_A est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.

Théorème :

La composée de deux applications mesurables est mesurable. Si $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables, alors $f + g$, fg , $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ le sont. Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, alors $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$ sont mesurables. En particulier, une limite simple de fonctions mesurables est mesurable.

Démonstration :

Pour la somme, l'application $x \rightarrow (f(x), g(x))$ est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$, car $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendrée par les pavés $] -\infty, a] \times] -\infty, b]$. On compose ensuite avec l'application continue $(u, v) \rightarrow u + v$. Pour le supremum, on écrit $\{\sup_n f_n \leq a\} = \bigcap_n \{f_n \leq a\}$, qui est dans $\mathcal{A}$. Enfin, $\limsup f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$.

2. Fonctions étagées

Définition :

Une **fonction étagée** sur $(E, \mathcal{A})$ est une fonction mesurable $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont ses valeurs distinctes et $A_i = \varphi^{-1}(\{\alpha_i\})$, alors

$$\varphi = \sum_{i=1}^p \alpha_i 1_{A_i},$$

où les A_i forment une partition mesurable de E . C'est l'**écriture canonique** de φ .

Les fonctions étagées jouent le rôle des fonctions en escalier de l'intégrale de Riemann. Cependant, les A_i ne sont plus des intervalles, mais des ensembles mesurables quelconques. C'est ce gain de souplesse qui fait la force de l'intégrale de Lebesgue.

3. Approximation par des fonctions étagées

Théorème :

Soit $f : E \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable. Pour $n \geq 1$, on pose

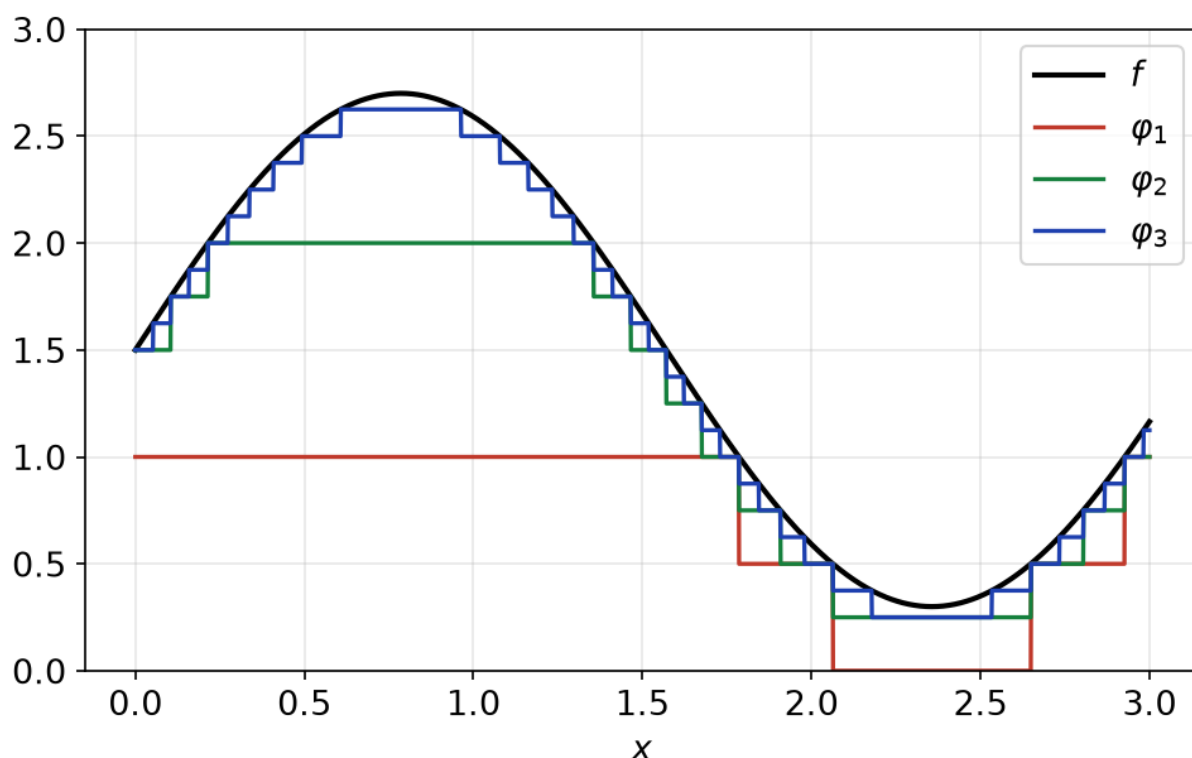
$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n \cdot 2^n - 1} \frac{k}{2^n} 1_{\{k \cdot 2^{-n} \leq f < (k+1) \cdot 2^{-n}\}} + n \cdot 1_{\{f \geq n\}}.$$

Alors (φ_n) est une suite croissante de fonctions étagées positives qui converge simplement vers f . Si f est bornée, la convergence est uniforme.

Démonstration :

Chaque ensemble $\{k \cdot 2^{-n} \leq f < (k+1) \cdot 2^{-n}\}$ est mesurable, donc φ_n est étagée. On vérifie que $\varphi_n = \min(n, 2^{-n} \lfloor 2^n f \rfloor)$. Or $2 \lfloor t \rfloor \leq \lfloor 2t \rfloor$, donc $2^{-n} \lfloor 2^n f \rfloor \leq 2^{-n-1} \lfloor 2^{n+1} f \rfloor$, et la suite est croissante. Si $f(x) < +\infty$, alors pour $n > f(x)$ on a $0 \leq f(x) - \varphi_n(x) < 2^{-n}$. Si $f(x) = +\infty$, alors $\varphi_n(x) = n \rightarrow +\infty$. Enfin, si $f \leq M$, l'inégalité $0 \leq f - \varphi_n < 2^{-n}$ vaut partout dès que $n > M$.

La figure ci-dessous montre les trois premières approximations d'une fonction continue. Chaque étape double la finesse verticale et relève le plafond d'une unité.



Méthode :

Pour **approcher une fonction mesurable positive**, on découpe l'axe des valeurs, et non celui des abscisses. On calcule les ensembles $f^{-1}([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[)$, on attribue à chacun la valeur basse $k2^{-n}$, puis on tronque à n . Pour une fonction de signe quelconque, on traite séparément $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$.

Ce qu'il faut retenir

- Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, mais $\mathbb{R}$ ne l'est pas (argument diagonal).
- Une tribu contient $\mathcal{E}$ et elle est stable par complémentaire et réunion dénombrable ; une algèbre ne l'est que pour les réunions finies.
- La tribu engendrée $\sigma(\mathcal{C})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$: pour $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}$, il suffit de $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$.

- La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les ouverts, ou par les demi-droites $] -\infty, a]$ avec a rationnel.
- Une mesure est σ -additive ; elle est croissante, sous-additive, et continue sur les suites monotones (avec une condition de finitude pour les suites décroissantes).
- Dirac, comptage et $\sum a_n \delta_n$ sont les mesures discrètes de base.
- Le théorème de Carathéodory fabrique une tribu et une mesure complète à partir d'une mesure extérieure ; il donne la mesure de Lebesgue, unique mesure borélienne telle que $\lambda([a,b]) = b - a$.
- Toute partie dénombrable de $\mathbb{R}$ est négligeable ; une propriété vraie hors d'un négligeable est vraie presque partout.
- Une fonction est mesurable dès que les images réciproques d'une famille génératrice sont mesurables ; les fonctions continues, monotones, les limites simples de fonctions mesurables sont mesurables.
- Toute fonction mesurable positive est limite croissante de fonctions étagées $\varphi_n = \min(n, 2^{-n} \lfloor 2^n f \rfloor)$.

Questions fréquentes sur tribus et mesures

Quelle différence y a-t-il entre une algèbre et une tribu ?

Une algèbre est stable par complémentaire et par réunion finie, une tribu l'est aussi par réunion dénombrable. Par exemple, les parties finies ou cofinies de $\mathbb{N}$ forment une algèbre, mais pas une tribu : l'ensemble des entiers pairs est une réunion dénombrable de singletons qui n'est ni fini ni cofini.

Pourquoi ne pas mesurer toutes les parties de $\mathbb{R}$?

Parce qu'aucune mesure invariante par translation définie sur toutes les parties de $\mathbb{R}$ ne donne à $[0,1]$ une masse finie non nulle. L'ensemble de Vitali, construit avec l'axiome du choix, fournit la contradiction. On se restreint donc à la tribu borélienne, ou à la tribu de Lebesgue.

Quand peut-on utiliser la continuité décroissante d'une mesure ?

Il faut une suite décroissante d'ensembles mesurables dont l'un au moins est de mesure finie. Sans cette hypothèse, le résultat est faux : pour la mesure de comptage, les ensembles $\{n, n+1, \dots\}$ ont tous une mesure infinie alors que leur intersection est vide.

Un ensemble négligeable est-il forcément dénombrable ?

Non. Tout ensemble dénombrable est de mesure de Lebesgue nulle, mais la réciproque est fausse. L'ensemble triadique de Cantor est compact, de mesure nulle, et pourtant en bijection avec l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 2\}$, qui n'est pas dénombrable.

Pour aller plus loin en L3

- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur tribus et mesures](#)
- À maîtriser avant : [Espaces métriques : ouverts, fermés, continuité](#)
- Chapitre précédent : [Complétude, espaces de Banach et point fixe](#)
- Chapitre suivant : [Intégrale de Lebesgue et théorèmes de convergence](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)