

Tribus et mesures

Corrigé de l'exercice 1 : Ensembles dénombrables et argument diagonal

- Supposons $2^m 3^n = 2^{m'} 3^{n'}$. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, les exposants de 2 et de 3 coïncident : $m = m'$ et $n = n'$. L'application est donc injective et $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. Ensuite, si $\mathbb{N}^p$ s'injecte dans $\mathbb{N}$ par ι_p , alors $(x, n) \rightarrow 2^{\iota_p(x)} 3^n$ injecte $\mathbb{N}^{p+1} = \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. **Par récurrence, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable pour tout $p \geq 1$.**
- Tout entier N s'écrit de façon unique en base 2, sous la forme $N = \sum_{k \in A} 2^k$ avec A fini : A est l'ensemble des rangs des chiffres égaux à 1. L'existence donne la surjectivité, et l'unicité donne l'injectivité. **L'application $A \rightarrow \sum_{k \in A} 2^k$ est une bijection, donc les parties finies de $\mathbb{N}$ forment un ensemble dénombrable.**
- L'application $]a, b[\rightarrow (a, b)$ est injective, à valeurs dans $\mathbb{Q}^2$. Or $\mathbb{Q}$ est dénombrable, donc $\mathbb{Q}^2$ aussi, comme produit fini. **Les intervalles ouverts à extrémités rationnelles forment un ensemble dénombrable.**
- Supposons que $D = s(m)$ pour un entier m . Si $m \in D$, alors par définition $m \notin s(m) = D$, ce qui est absurde. Si $m \notin D$, alors $m \notin s(m)$, donc $m \in D$, ce qui est encore absurde. Ainsi, D n'a pas d'antécédent. **Aucune application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est surjective, donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.**
- Raisonnons par l'absurde. Si $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ était dénombrable, alors $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ serait une réunion de deux ensembles dénombrables, donc dénombrable. **C'est faux, donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable.**

Point de méthode : pour prouver qu'un ensemble est dénombrable, on cherche une injection vers un

ensemble déjà connu comme dénombrable ; pour prouver le contraire, on cherche un argument diagonal ou une injection d'un ensemble non dénombrable.

Corrigé de l'exercice 2 : Tribu engendrée sur un ensemble fini

1. La famille $\{\emptyset, \{1\}, \{2,3,4\}, E\}$ est une tribu qui contient A . Réciproquement, toute tribu contenant A contient $\emptyset$, E et A^c . **Donc**
 $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3,4\}, E\}$.
2. On pose $E_1 = A = \{1\}$, $E_2 = B \setminus A = \{2\}$ et $E_3 = B^c = \{3, 4\}$. Ces trois parties sont dans $\sigma(\{A, B\})$ et forment une partition de E . D'après le cours, la tribu engendrée par une partition finie est formée des réunions de ses atomes. De plus, $A = E_1$ et $B = E_1 \cup E_2$, donc $\sigma(\{A, B\}) = \sigma(\{E_1, E_2, E_3\})$. **On obtient les** $2^3 = 8$ **éléments** $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3,4\}, \{1,2\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$ **et** E .
3. Tout élément de cette tribu qui contient 3 contient l'atome $\{3,4\}$, donc contient 4 . **Ainsi**, $\{1,3\} \notin \sigma(\{A, B\})$.
4. Les éléments de la tribu engendrée sont les réunions $\bigcup_{i \in J} E_i$ avec $J \subset \{1, \dots, p\}$. Comme les E_i sont non vides et disjoints, deux parties J distinctes donnent des réunions distinctes. **La tribu possède donc** 2^p **éléments**.

Corrigé de l'exercice 3 : Une algèbre qui n'est pas une tribu

1. D'abord, $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$, car son complémentaire est vide. Ensuite, si A est finie, A^c est de complémentaire fini, et inversement : $\mathcal{F}$ est stable par complémentaire. Enfin, soit $A, B \in \mathcal{F}$. Si A et B sont finies, $A \cup B$ est finie. Sinon, l'une d'elles, disons A , a un complémentaire fini ; alors $(A \cup B)^c \subset A^c$ est fini. **Donc** $\mathcal{F}$ **est une algèbre**.
2. Chaque singleton $\{2k\}$ est dans $\mathcal{F}$. Pourtant, leur réunion est l'ensemble P des entiers pairs, qui est infini, et dont le complémentaire, l'ensemble des impairs, est infini aussi. **Ainsi** $P \notin \mathcal{F}$, **et** $\mathcal{F}$ **n'est pas stable par réunion dénombrable : ce n'est pas une tribu**.
3. La tribu $\sigma(\mathcal{F})$ contient tous les singletons. Or toute partie de $\mathbb{N}$ est la réunion dénombrable de

ses singletons. **Donc** $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

4. Soit $A, B \in \mathcal{F}$ disjointes. Elles ne peuvent pas être toutes deux de complémentaire fini : sinon $A \subset B^c$ serait fini, alors que A est infini. Si A et B sont finies, $\mu(A \cup B) = 0 = \mu(A) + \mu(B)$. Si A est cofinie et B finie, alors $A \cup B$ est cofinie et $\mu(A \cup B) = 1 = 1 + 0$. Ainsi μ est additive. Supposons maintenant qu'une mesure m sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ prolonge μ . Par σ -additivité,

$$m(\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(\{n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\{n\}) = 0,$$

alors que $m(\mathbb{N}) = \mu(\mathbb{N}) = 1$. **Aucune mesure ne prolonge μ : l'additivité finie ne suffit pas.**

Corrigé de l'exercice 4 : Tribu des parties dénombrables ou codénombrables

1. D'abord, $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$, car son complémentaire est vide. Ensuite, la définition est symétrique en A et A^c , donc $\mathcal{T}$ est stable par complémentaire. Enfin, soit (A_n) une suite de $\mathcal{T}$. Si toutes les A_n sont dénombrables, leur réunion l'est aussi, comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables. Sinon, il existe n_0 tel que $A_{n_0}^c$ soit dénombrable ; alors $(\bigcup A_n)^c \subset A_{n_0}^c$ est dénombrable. **Donc $\mathcal{T}$ est une tribu.**
2. Les singletons sont dénombrables, donc ils sont dans $\mathcal{T}$; par minimalité, $\sigma(\text{singletons}) \subset \mathcal{T}$. Réciproquement, une partie dénombrable est une réunion dénombrable de singletons, donc elle est dans $\sigma(\text{singletons})$. Une partie de complémentaire dénombrable est le complémentaire d'un tel ensemble, donc elle y est aussi. **Ainsi $\mathcal{T} = \sigma(\{x\}, x \in \mathbb{R})$.**
3. Le segment $[0,1]$ n'est pas dénombrable. Son complémentaire contient $[2,3]$, donc il n'est pas dénombrable non plus. Par conséquent, $[0,1] \notin \mathcal{T}$. Par ailleurs, les singletons sont fermés, donc boréliens, et $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par minimalité. **Comme $[0,1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{T}$, l'inclusion est stricte.**
4. Une partie ne peut pas être à la fois dénombrable et de complémentaire dénombrable, sinon $\mathbb{R}$ serait dénombrable. Donc μ est bien définie. De plus, $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Soit (A_n) une suite disjointe de $\mathcal{T}$. Si toutes les A_n sont dénombrables, la réunion l'est, et les deux membres de la σ -additivité valent 0. Sinon, soit A_{n_0} de complémentaire dénombrable. Pour

$n \neq n_0$, on a $A_n \subset A_{n_0}^c$, donc A_n est dénombrable et $\mu(A_n) = 0$. Enfin, la réunion contient A_{n_0} , elle est donc codénombrable et de mesure $1 = \sum_n \mu(A_n)$. **Ainsi μ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.**

Corrigé de l'exercice 5 : Réunions de tribus

- On a $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, E\}$ et $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, E\}$. La partie $\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\}$ n'appartient à aucune des deux. **Donc $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ n'est pas stable par réunion : ce n'est pas une tribu.** Ensuite, $\sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ contient $\{1\}$, $\{2\}$, puis $\{3\} = \{1,2\}^c$. Elle contient tous les singletons de l'ensemble fini E . **Donc $\sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \mathcal{P}(E)$.**
- Posons $Q_n = \{n+1, 2, \dots, 1\}$. Les parties $\{0\}, \dots, \{n\}, Q_n$ forment une partition dénombrable de $\mathbb{N}$, et Q_n est le complémentaire de $\{0\} \cup \dots \cup \{n\}$. Donc $\mathcal{A}_n$ est la tribu engendrée par cette partition. D'après le cours, ses éléments sont les réunions d'atomes. **Ainsi $B \in \mathcal{A}_n$ si et seulement si $B \cap Q_n$ vaut $\emptyset$ ou Q_n .**
- Les générateurs de $\mathcal{A}_n$ sont parmi ceux de $\mathcal{A}_{n+1}$, donc $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Montrons que $\mathcal{U}$ est une algèbre. Elle contient $\mathbb{N}$. Si $B \in \mathcal{U}$, alors $B \in \mathcal{A}_n$ pour un n , donc $B^c \in \mathcal{A}_n \subset \mathcal{U}$. Si $B \in \mathcal{A}_n$ et $B' \in \mathcal{A}_m$, alors les deux sont dans $\mathcal{A}_{\max(n,m)}$, donc $B \cup B'$ aussi. **Ainsi $\mathcal{U}$ est une algèbre.**
- Chaque singleton $\{2k\}$ appartient à $\mathcal{A}_{2k} \subset \mathcal{U}$. Cependant, pour tout n , l'ensemble $P \cap Q_n$ des pairs supérieurs à n n'est ni vide ni égal à Q_n . Donc $P \notin \mathcal{A}_n$ pour tout n , et $P \notin \mathcal{U}$. **Une réunion croissante de tribus n'est pas toujours une tribu.**

Corrigé de l'exercice 6 : Tribu image réciproque et tribu transportée

- On a $E = f^{-1}(F)$. Ensuite, $E \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(F \setminus B)$ et $\bigcup_n f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\bigcup_n B_n)$. Comme $\mathcal{B}$ est une tribu, les membres de droite sont des images réciproques d'éléments de $\mathcal{B}$. **Donc $f^{-1}(\mathcal{B})$ est une tribu.**

2. Les mêmes formules donnent le résultat. En effet, $f^{-1}(F) = E \in \mathcal{A}$. Si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, alors $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Enfin, si $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ pour tout n , la réunion est dans $\mathcal{A}$. **Donc $\mathcal{T}$ est une tribu, la tribu transportée.**
3. Prenons $E = \{1, 2\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$, $F = \{a, b, c\}$, $f(1) = a$ et $f(2) = b$. Les images directes forment $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. **Cette famille ne contient pas F : ce n'est pas une tribu.**
4. D'après la question 1, $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ est une tribu. Elle contient $f^{-1}(\mathcal{C})$, donc elle contient $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. Réciproquement, on pose $\mathcal{T}' = \{B \subset F : f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$. C'est une tribu d'après la question 2, et elle contient $\mathcal{C}$. Par minimalité, $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}'$, ce qui signifie $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. **D'où l'égalité $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.**

Point de méthode : la tribu transportée sert à « remonter » une propriété vraie sur des générateurs à toute la tribu engendrée ; c'est l'argument de minimalité le plus fréquent du chapitre.

Corrigé de l'exercice 7 : Générateurs de la tribu borélienne

1. Notons $\mathcal{T} = \sigma(\{[a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\})$. Les demi-droites $[a, +\infty[$ sont fermées, donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Réciproquement, $] -\infty, a[= [a, +\infty[^c \in \mathcal{T}$. Ensuite,

$$]-\infty, a] = \bigcap_{n \geq 1}]-\infty, a + \frac{1}{n}[\in \mathcal{T}.$$

Or ces demi-droites engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ d'après le cours. **Donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}$, puis $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.**

2. Un compact de $\mathbb{R}$ est fermé, donc borélien. Réciproquement, $] -\infty, a] = \bigcup_{n \geq 1} [a - n, a]$ est une réunion dénombrable de compacts. Elle appartient donc à la tribu engendrée par les compacts. **Par le même argument, cette tribu est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.**

3. D'après l'exercice 4, la tribu engendrée par les singletons est la tribu $\mathcal{T}$ des parties dénombrables ou codénombrables. **Elle est incluse dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et ne contient pas $[0, 1]$: l'inclusion est stricte.**

Corrigé de l'exercice 8 : Premières propriétés d'une mesure

1. D'après le cours, pour des parties de mesure finie,

$\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y) - \mu(X \cap Y)$. On l'applique à $X = A \cup B$ et $Y = C$:

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A \cup B) + \mu(C) - \mu((A \cap C) \cup (B \cap C)).$$

Ensuite, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, et

$\mu((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mu(A \cap C) + \mu(B \cap C) - \mu(A \cap B \cap C)$. **En regroupant, on obtient la formule d'inclusion-exclusion annoncée.**

2. On calcule $\mu(A \cup B \cup C) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{12-6+1}{8}$. Ensuite, $A^c \cap B^c \cap C^c$ est le complémentaire de $A \cup B \cup C$. **Donc** $\mu(A \cup B \cup C) = \frac{7}{8}$ **et** $\mu(A^c \cap B^c \cap C^c) = \frac{1}{8}$.

3. Par sous-additivité dénombrable, $\mu(\bigcup A_n) \leq \sum \mu(A_n) = 0$. Dans le second cas, on passe au complémentaire : $\mu(A_n^c) = 1 - 1 = 0$, donc $\mu(\bigcup A_n^c) = 0$. Or $\bigcap A_n = (\bigcup A_n^c)^c$. **Ainsi** $\mu(\bigcap A_n) = 1 - 0 = 1$.

4. Soit (A_n) une suite disjointe et $B_n = A_0 \cup \dots \cup A_n$. La suite (B_n) est croissante, de réunion $\bigcup A_n$. Par additivité finie, $\nu(B_n) = \sum_{k=0}^n \nu(A_k)$. Par continuité croissante,

$$\nu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_n \nu(B_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \nu(A_k).$$

Donc ν est σ -additive : c'est une mesure.

Corrigé de l'exercice 9 : Une mesure discrète sur $\mathbb{N}$

1. Pour $A \subset \mathbb{N}$, on a $\mu(A) = \sum_{n \in A, n \geq 1} 2^{-n}$. Si (A_k) est une suite disjointe, le

théorème de sommation par paquets pour les séries à termes positifs donne

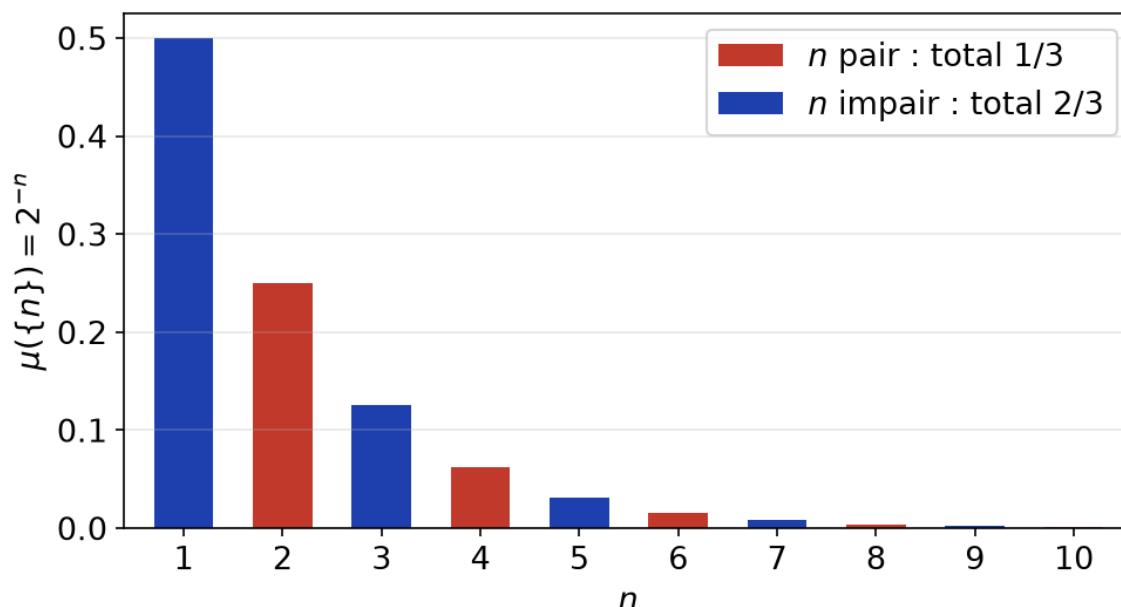
$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k \mu(A_k). \text{ De plus, } \mu(\mathbb{N}) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} = 1. \text{ Enfin, tous les poids } 2^{-n}$$

sont strictement positifs pour $n \geq 1$, et le poids de 0 est nul. **Donc μ est une probabilité, et $\mu(A) = 0$ si et seulement si $A \subset \{0\}$.**

2. Les entiers pairs non nuls sont les $2k$ avec $k \geq 1$. On somme une série géométrique de raison $\frac{1}{4}$:

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^{+\infty} 4^{-k} = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}.$$

Par complémentarité, $\mu(I) = 1 - \frac{1}{3}$. **Ainsi $\mu(P) = \frac{1}{3}$ et $\mu(I) = \frac{2}{3}$.** La figure ci-dessous représente les poids : les barres rouges, d'indice pair, totalisent un tiers.



3. Pour $N \geq 1$, $\mu(\{n \geq N\}) = \sum_{n \geq N} 2^{-n} = 2^{-N} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = 2^{1-N}$. Les multiples non nuls de 3 sont les $3k$, $k \geq 1$, et 0 est de poids nul. **Donc $\mu(\{n \geq N\}) = 2^{1-N}$ et la mesure des multiples de 3 vaut $\sum_{k \geq 1} 8^{-k} = \frac{1}{7}$.**

4. La suite (A_N) est décroissante, d'intersection vide, et $\mu(A_1) = 1$ est finie. La continuité décroissante prévoit donc $\mu(A_N) \rightarrow 0$, ce que confirme $2^{1-N} \rightarrow 0$. En revanche, pour la mesure de comptage, $c(A_N) = +\infty$ pour tout N . **La limite vaut $+\infty \neq 0 = c(\emptyset)$: sans hypothèse de finitude, la continuité décroissante tombe en défaut.**

5. On a $\nu(\{0,1,2\}) = \delta_0(\{0,1,2\}) + 3 = 1 + 3$. Ensuite, P contient 0 et une infinité d'éléments. **Donc** $\nu(\{0,1,2\}) = 4$ **et** $\nu(P) = +\infty$.

Corrigé de l'exercice 10 : Mesures sur un ensemble dénombrable et atomes

1. Toute partie $A \subset \mathbb{N}$ est réunion disjointe et dénombrable de ses singletons. Par σ -additivité,

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} \mu(\{n\}) = \sum_n \mu(\{n\}) \delta_n(A). \text{ Donc } \mu = \sum_n \mu(\{n\}) \delta_n.$$
2. Supposons $\mu(\{n\}) = a$ pour tout n . Alors $\mu(\mathbb{N}) = \sum_n a$ vaut 0 si $a = 0$ et $+\infty$ si $a > 0$. **Dans les deux cas $\mu(\mathbb{N}) \neq 1$: il n'existe pas de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$.**
3. On a $\mathbb{N} = \bigcup_n \{0, \dots, n\}$, et chaque $\{0, \dots, n\}$ est de mesure $n+1$, finie. Cependant, $c(\mathbb{N}) = +\infty$. **La mesure de comptage est σ -finie mais pas finie.**

4. Soit $x_1, \dots, x_m$ des éléments distincts de S_k . Par additivité et monotonie,

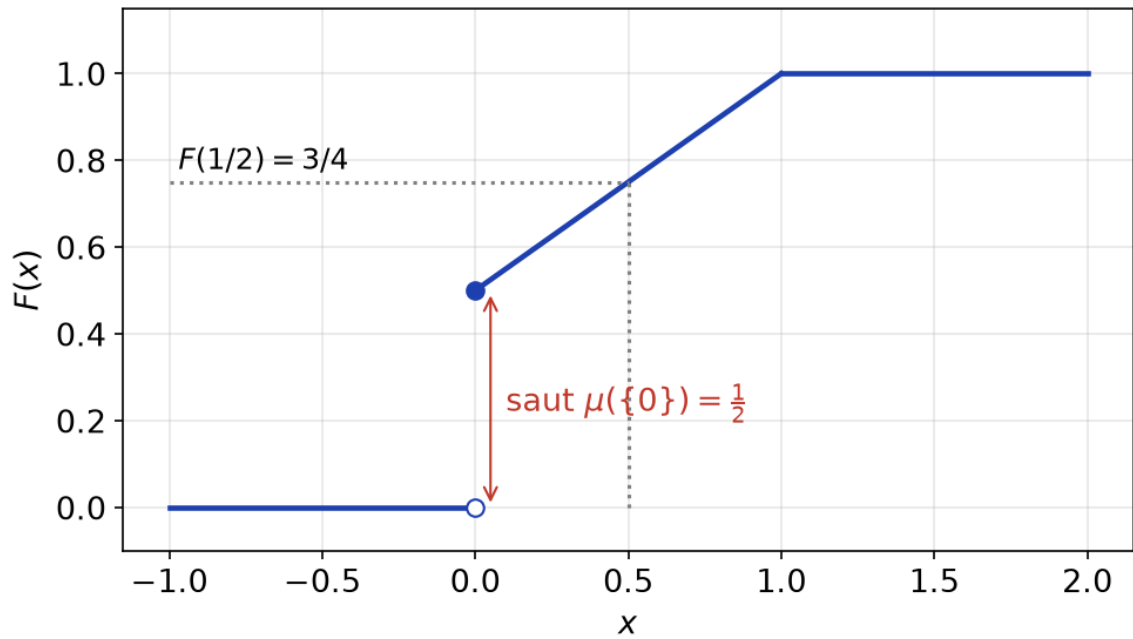
$$\frac{m}{k} < \sum_{i=1}^m \mu(\{x_i\}) = \mu(\{x_1, \dots, x_m\}) \leq \mu(E).$$

Donc $m < k \mu(E)$, et S_k est fini. Or un point est un atome si et seulement si $\mu(\{x\}) > \frac{1}{k}$ pour un certain $k \geq 1$. **L'ensemble des atomes est $\bigcup_k S_k$, réunion dénombrable d'ensembles finis : il est dénombrable.**

5. Le point $\frac{1}{n}$ est dans $]0, \frac{1}{2}]$ si et seulement si $n \geq 2$. Donc $\mu(]0, \frac{1}{2}]) = \sum_{n \geq 2} 2^{-n} = \frac{1}{2}$. Ensuite, aucun $\frac{1}{n}$ ne vaut 0, donc $\mu(\{0\}) = 0$. Enfin, $]0, \varepsilon]$ contient tous les $\frac{1}{n}$ pour $n \geq 1/\varepsilon$. **Ainsi $\mu(]0, \frac{1}{2}]) = \frac{1}{2}$, $\mu(\{0\}) = 0$ et $\mu(]0, \varepsilon]) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. Les atomes forment ici un ensemble infini dénombrable qui s'accumule en 0.**

Corrigé de l'exercice 11 : Continuité monotone et fonction de répartition

1. Si $x \leq y$, alors $]-\infty, x] \subset]-\infty, y]$, donc $F(x) \leq F(y)$ par monotonie. Ensuite, les ensembles $]-\infty, -n]$ décroissent vers $\emptyset$, et μ est finie. Par continuité décroissante, $F(-n) \rightarrow 0$. Comme F est croissante, sa limite en $-\infty$ existe et vaut donc 0. De même, $]-\infty, n]$ croît vers $\mathbb{R}$. **Par continuité croissante, $F(n) \rightarrow \mu(\mathbb{R}) = 1$, et F tend vers 1 en $+\infty$.**
2. Soit x_n une suite décroissante de limite x . Les ensembles $]-\infty, x_n]$ décroissent vers $]-\infty, x]$, donc $F(x_n) \rightarrow F(x)$. Comme F est croissante, cela prouve la continuité à droite. Ensuite, les ensembles $]-\infty, x - \frac{1}{n}]$ croissent vers $]-\infty, x[$. Donc $F(x - \frac{1}{n}) \rightarrow \mu(]-\infty, x[)$, et cette limite est $F(x^-)$ par monotonie. Enfin, $]-\infty, x]$ est la réunion disjointe de $]-\infty, x[$ et $\{x\}$. **Donc $\mu(\{x\}) = F(x) - F(x^-)$.**
3. La fonction F est continue à droite. Elle est donc continue en x si et seulement si $F(x^-) = F(x)$. **D'après la question 2, cela équivaut à $\mu(\{x\}) = 0$.**
4. L'application $B \rightarrow \lambda(B \cap [0,1])$ est une mesure. En effet, si les B_n sont disjoints, les $B_n \cap [0,1]$ le sont aussi. Une combinaison à coefficients positifs de mesures est une mesure. **De plus, $\mu(\mathbb{R}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lambda([0,1]) = 1$, donc μ est une probabilité.**
5. Pour $x < 0$, la demi-droite $]-\infty, x]$ ne contient pas 0 et ne rencontre pas $[0,1]$, donc $F(x) = 0$. Pour $0 \leq x \leq 1$, on obtient $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lambda([0, x])$. Pour $x \geq 1$, $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. **Finalement $F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = \frac{1+x}{2}$ si $0 \leq x \leq 1$, et $F(x) = 1$ si $x \geq 1$.** Comme le montre la figure ci-dessous, F présente un saut de hauteur $\frac{1}{2}$ en 0, puis croît linéairement.



6. D'après la question 2, $\mu(\{0\}) = F(0) - F(0^-) = \frac{1}{2}$. Ensuite,
 $\mu([0, \frac{1}{2}]) = F(\frac{1}{2}) - F(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$. De plus, $\mu([0, \frac{1}{2}]) = \mu(\{0\}) + \mu(]0, \frac{1}{2}])$. Enfin, $\mathbb{Q}$
 contient 0 et $\lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$. **On trouve** $\mu(\{0\}) = \frac{1}{2}$, $\mu(]0, \frac{1}{2}]) = \frac{1}{4}$,
 $\mu([0, \frac{1}{2}]) = \frac{3}{4}$ **et** $\mu(\mathbb{Q}) = \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 12 : Lemme de Borel-Cantelli

1. Un point x est dans $\limsup A_n$ si et seulement si, pour tout N , il existe $n \geq N$ tel que $x \in A_n$. **Autrement dit, l'ensemble $\{n : x \in A_n\}$ n'est pas majoré, donc il est infini.**

2. Pour tout N , on a $\limsup A_n \subset \bigcup_{n \geq N} A_n$. Par monotonie et sous-additivité,

$$\mu(\limsup A_n) \leq \sum_{n \geq N} \mu(A_n).$$

Le membre de droite est le reste d'une série convergente, donc il tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$. **Ainsi $\mu(\limsup A_n) = 0$: presque tout point n'appartient qu'à un**

nombre fini de A_n .

3. Chaque intervalle de A_q est de longueur $\frac{2}{q^3}$, et il y en a $q + 1$. Par sous-additivité,
 $\lambda(A_q) \leq \frac{2(q+1)}{q^3}$. Or $q + 1 \leq 2q$ pour $q \geq 1$, donc $\lambda(A_q) \leq \frac{4}{q^2}$. La série $\sum \frac{4}{q^2}$
converge. D'après la question 2, $N = \limsup A_q$ est négligeable. Or $x \in A_q$ signifie
exactement qu'il existe $p \in \{0, \dots, q\}$ avec $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^3}$. **Donc, pour tout**
 $x \in [0,1] \setminus N$, c'est-à-dire presque partout, un tel q n'existe que pour un nombre
fini de valeurs.
4. Prenons $A_n =]0, \frac{1}{n}[$ pour $n \geq 1$. La série $\sum \lambda(A_n) = \sum \frac{1}{n}$ diverge. Cependant, la
suite est décroissante, donc $\bigcup_{n \geq N} A_n = A_N$. Ainsi $\limsup A_n = \bigcap_N]0, \frac{1}{N}[= \emptyset$, de
mesure nulle : la réciproque est fausse.

Corrigé de l'exercice 13 : Ensembles négligeables pour la mesure de Lebesgue

1. L'application $(k, n) \rightarrow k 2^{-n}$ est définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, qui est dénombrable. Son image,
l'ensemble des dyadiques, est donc dénombrable. **D'après le cours, toute partie dénombrable**
de $\mathbb{R}$ est négligeable : les dyadiques forment un ensemble négligeable.
2. Soit N négligeable, inclus dans A borélien avec $\lambda(A) = 0$. Si N contenait un intervalle
 $]a, b[$ avec $a < b$, on aurait $b - a = \lambda(]a, b[) \leq \lambda(A) = 0$, ce qui est absurde. Donc
 N est d'intérieur vide. **Par passage au complémentaire, $\mathbb{R} \setminus N$ rencontre tout**
intervalle ouvert non vide : il est dense.
3. On a $[0,1] = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \cup ([0,1] \setminus \mathbb{Q})$, réunion disjointe. Donc $1 = 0 + \lambda([0,1] \setminus \mathbb{Q})$. Si
 $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ était dénombrable, sa mesure serait nulle. **Donc $\lambda([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = 1$, et cet**
ensemble n'est pas dénombrable.
4. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable, donc négligeable. Ensuite, $]0, n[\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 1$,
donc $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \geq \lambda(]0, n[) = n$ par monotonie. **Donc $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = +\infty$.**
5. On énumère $\mathbb{Q} \cap]0,1[= \{r_1, 2, \dots\}$. On pose
 $I_k =]r_k - \varepsilon 2^{-k-1}, r_k + \varepsilon 2^{-k-1}[$, de longueur $\varepsilon 2^{-k}$, et $U = \bigcup_k I_k \cap]0,1[$.
C'est un ouvert, comme réunion d'ouverts. Il contient les rationnels de $]0,1[$, qui sont denses dans

$[0,1]$. Donc U est un ouvert dense de $[0,1]$, et $\lambda(U) \leq \sum_k \epsilon 2^{-k} = \epsilon$.

Corrigé de l'exercice 14 : L'ensemble triadique de Cantor

- On raisonne par récurrence. C'est vrai pour $n = 0$. Si K_n est la réunion de 2^n segments disjoints de longueur 3^{-n} , le retrait du tiers central de chacun laisse deux segments disjoints de longueur 3^{-n-1} . On obtient 2^{n+1} segments disjoints. **Par additivité**,

$$\lambda(K_n) = 2^n 3^{-n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
- Chaque K_n est une réunion finie de segments, donc un fermé. L'intersection K est fermée et bornée, donc compacte, et elle est borélienne. Elle contient 0 , donc elle n'est pas vide. La suite (K_n) est décroissante et $\lambda(K_0) = 1$ est finie. **Par continuité décroissante**,

$$\lambda(K) = \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$
- À l'étape $n + 1$, on retire 2^n intervalles de longueur 3^{-n-1} . La longueur totale retirée vaut donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2/3} = 1.$$

On retire une longueur totale égale à 1, ce qui confirme que $\lambda(K) = 1 - 1 = 0$.

- Par récurrence : pour $n = 0$, l'unique segment est $[0, 1]$, avec $a = 0$. Si $[a, a + 3^{-n}]$ est un segment de K_n , le retrait du tiers central laisse $[a, a + 3^{-n-1}]$ et $[a + 2 \cdot 3^{-n-1}, a + 3^{-n}]$. Cela revient à choisir $\epsilon_{n+1} \in \{0, 2\}$. Soit maintenant

$$x = \sum_{k \geq 1} \epsilon_k 3^{-k} \text{ et } a_n = \sum_{k=1}^n \epsilon_k 3^{-k}.$$
Le reste vérifie

$$0 \leq x - a_n \leq \sum_{k > n} 2 \cdot 3^{-k} = 3^{-n}.$$
Donc $x \in [a_n, a_n + 3^{-n}] \subset K_n$ pour tout n , c'est-à-dire $x \in K$.
- Soit deux suites distinctes et k le premier rang où elles diffèrent, avec $\epsilon_k = 0$ et $\epsilon'_k = 2$. Les termes suivants diffèrent au plus de 2 chacun, donc

$$x' - x \geq 2 \cdot 3^{-k} - \sum_{j > k} 2 \cdot 3^{-j} = 2 \cdot 3^{-k} - 3^{-k} = 3^{-k} > 0.$$

L'application est donc injective de $\{0, 2\}^{\mathbb{N}^*}$ dans K . Or $\{0, 2\}^{\mathbb{N}^*}$ est en bijection avec $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, qui n'est pas dénombrable. **Ainsi K est négligeable mais non dénombrable.**

Point de méthode : la continuité décroissante est l'outil naturel pour mesurer un ensemble défini comme intersection d'une suite décroissante, à condition que le premier terme soit de mesure finie.

Corrigé de l'exercice 15 : Mesure extérieure de Lebesgue d'un segment

1. Soit $\varepsilon > 0$. L'intervalle $]a - \varepsilon, b + \varepsilon[$, complété par des intervalles vides, recouvre $[a, b]$.
Donc $\lambda^*([a, b]) \leq b - a + 2\varepsilon$. **En faisant tendre ε vers 0, on obtient**
 $\lambda^*([a, b]) \leq b - a$.

2. Pour $p = 1$: si $[a, b] \subset]a_1, b_1[$, alors $a_1 < a$ et $b < b_1$, donc $b_1 - a_1 > b - a$.
Supposons le résultat vrai au rang $p - 1$, pour tout segment. Le point b appartient à l'un des intervalles ; quitte à renuméroter, $b \in]a_p, b_p[$. Si $a_p < a$, alors $b_p - a_p > b - a$ et c'est fini. Sinon, $a \leq a_p < b$, et le segment $[a, a_p]$ ne rencontre pas $]a_p, b_p[$. Il est donc recouvert par les $p - 1$ autres intervalles. Par hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=1}^{p-1} (b_k - a_k) > a_p - a. \text{ De plus, } b_p - a_p > b - a_p. \text{ **En additionnant,}**$$

$$\sum_{k=1}^p (b_k - a_k) > b - a.$$

3. Soit $(]a_n, b_n[)$ un recouvrement dénombrable de $[a, b]$. Le segment est compact. D'après le théorème de Borel-Lebesgue, un nombre fini de ces intervalles le recouvrent déjà. D'après la question 2, leur longueur totale dépasse $b - a$, donc $\sum_n (b_n - a_n) > b - a$. En passant à la borne inférieure, $\lambda^*([a, b]) \geq b - a$. **Avec la question 1, $\lambda^*([a, b]) = b - a$.**

4. D'une part, $]a, b[$ se recouvre lui-même, donc $\lambda^*(]a, b[) \leq b - a$. D'autre part, pour $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$, on a $[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset]a, b[$, donc $\lambda^*(]a, b[) \geq b - a - 2\varepsilon$ par croissance. Ainsi $\lambda^*(]a, b[) = b - a$. Ensuite, $\lambda^*(\mathbb{R}) \geq \lambda^*([0, n]) = n$ pour tout n . Enfin, par sous-additivité,

$$1 = \lambda^*([0, 1]) \leq \lambda^*([0, 1] \cap \mathbb{Q}) + \lambda^*([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = 0 + \lambda^*([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \leq 1.$$

On obtient $\lambda^*(]a, b[) = b - a$, $\lambda^*(\mathbb{R}) = +\infty$ et $\lambda^*([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = 1$.

Corrigé de l'exercice 16 : Mesures extérieures et parties mesurables

1. On a $\mu^*(\emptyset) = 0$. Si $A \subset B$ et $A \neq \emptyset$, alors $B \neq \emptyset$, donc $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Enfin, si $\bigcup A_n$ est non vide, l'un des A_n est non vide, donc $\sum \mu^*(A_n) \geq 1$. **Ainsi μ^* est une mesure extérieure.**
2. Les parties $\emptyset$ et E sont toujours mesurables. Soit A avec $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$. Avec $T = E$, on obtient $\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c) = 1 + 1 = 2$, alors que $\mu^*(T) = 1$. **Les seules parties μ^* -mesurables sont $\emptyset$ et E .**
3. On a $\nu^*(\emptyset) = 0$. Une partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable, ce qui donne la croissance. Si $\bigcup A_n$ n'est pas dénombrable, l'un des A_n ne l'est pas, sans quoi la réunion serait dénombrable. Alors $\sum \nu^*(A_n) \geq 1$. **Donc ν^* est une mesure extérieure.**
4. Une partie dénombrable N vérifie $\nu^*(N) = 0$. D'après le théorème de Carathéodory, elle est mesurable. Son complémentaire l'est aussi, car les parties mesurables forment une tribu. Réciproquement, si A et A^c sont tous deux non dénombrables, le test avec $T = \mathbb{R}$ donne $1 + 1 \neq 1$. **Les parties mesurables forment la tribu $\mathcal{T}$ de l'exercice 4, et Carathéodory fournit la mesure μ de cet exercice.**

Corrigé de l'exercice 17 : Invariance de la mesure de Lebesgue

1. L'application $\tau : t \rightarrow t - x$ est continue, donc borélienne, et $x + A = \tau^{-1}(A)$. Ainsi $x + A$ est borélien. Ensuite, $\nu(\emptyset) = 0$, et si les A_n sont disjoints, les $x + A_n$ le sont aussi, avec $x + \bigcup A_n = \bigcup (x + A_n)$. Donc ν est une mesure. De plus, $\nu([a, b]) = \lambda([a + x, b + x]) = b - a$. La famille des $[a, b]$, complétée par $\emptyset$, est stable par intersection : $[a, b] \cap [c, d] = [\max(a, c), \min(b, d)]$ ou $\emptyset$. Elle engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et $\mathbb{R} = \bigcup_n]-n, n]$ avec des mesures finies. **Le théorème d'unicité donne $\nu = \lambda$, c'est-à-dire $\lambda(x + A) = \lambda(A)$.**
2. De même, $cA = h^{-1}(A)$ avec $h(t) = t/c$ continue, donc cA est borélien, et $A \rightarrow \lambda(cA)$ est une mesure. Si $c > 0$, $c[a, b] = [ca, cb]$, de mesure $c(b - a)$. Si

$c < 0$, $c]a, b] = [cb, ca[$, de mesure $ca - cb = |c|(b - a)$. Les deux mesures $A \rightarrow \lambda(cA)$ et $|c| \lambda$ coïncident donc sur les $]a, b]$ et sont finies sur les $]-n, n]$. **Par unicité**, $\lambda(cA) = |c| \lambda(A)$ pour tout borélien A .

3. Pour $q \geq 1$, l'intervalle $]0, 1]$ est la réunion disjointe des q translatés $\frac{k}{q} +]0, \frac{1}{q}]$, pour $0 \leq k \leq q - 1$. Par invariance et additivité, $\alpha = q \mu(]0, \frac{1}{q}])$. De même, $]0, \frac{p}{q}]$ est réunion de p translatés, donc $\mu(]0, t]) = \alpha t$ pour $t = \frac{p}{q}$ rationnel positif. Pour $t > 0$ réel, on choisit des rationnels t_n qui décroissent vers t . Les $]0, t_n]$ décroissent vers $]0, t]$ et $\mu(]0, t_1]) = \alpha t_1$ est finie. Par continuité décroissante, $\mu(]0, t]) = \lim \alpha t_n = \alpha t$. Par invariance, $\mu(]a, b]) = \mu(]0, b - a]) = \alpha(b - a)$. **Le théorème d'unicité donne alors $\mu = \alpha \lambda$.**

Point de méthode : pour identifier deux mesures, on les compare sur une famille stable par intersection qui engendre la tribu, puis on invoque le théorème d'unicité.

Corrigé de l'exercice 18 : Fonctions mesurables usuelles

- Pour $B \subset \mathbb{R}$, l'ensemble $1_A^{-1}(B)$ vaut $\emptyset$, A , A^c ou E , selon que B contient ou non 0 et 1. Si $A \in \mathcal{A}$, ces quatre ensembles sont mesurables. Réciproquement, $A = 1_A^{-1}(\{1\})$, et $\{1\}$ est borélien. **Donc 1_A est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.**
- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $S = \{x : f(x) \leq a\}$. Si $y \in S$ et $x \leq y$, alors $f(x) \leq f(y) \leq a$, donc $x \in S$. Une partie de $\mathbb{R}$ qui contient tous les réels inférieurs à l'un de ses points est un intervalle de la forme $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $]-\infty, c[$ ou $]-\infty, c]$. **Dans tous les cas S est borélien, donc f est borélienne d'après le critère du cours.**
- D'abord, $\mathbb{Q}$ est borélien, donc $1_{\mathbb{Q}}$ est borélienne par la question 1. Ensuite, la partie entière est croissante, donc borélienne par la question 2. Enfin, $x \rightarrow x^2$ et $x \rightarrow e^x$ sont continues, les indicatrices de $[0, 1]$ et $]1, +\infty[$ sont boréliennes. **Par stabilité par produit et somme, h est borélienne.**
- D'après l'exercice 2, les éléments de $\mathcal{A}$ sont les réunions des atomes $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3, 4\}$. Si f est mesurable, $f^{-1}(\{f(3)\})$ est un élément de $\mathcal{A}$ contenant 3, donc il contient 4 : $f(4) = f(3)$. Réciproquement, si $f(3) = f(4)$, toute image réciproque est une réunion d'atomes. **Les fonctions mesurables sont celles qui vérifient $f(3) = f(4)$; la fonction $f(k) = k$ n'est donc pas mesurable.**

Corrigé de l'exercice 19 : Suites de fonctions mesurables

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on a $\sup_n f_n(x) \leq a$ si et seulement si $f_n(x) \leq a$ pour tout n . Donc $\{\sup_n f_n \leq a\} = \bigcap_n \{f_n \leq a\} \in \mathcal{A}$, et $\sup_n f_n$ est mesurable. Ensuite, $\inf_n f_n = -\sup_n (-f_n)$ est mesurable. Enfin, $g_n = \sup_{k \geq n} f_k$ est mesurable pour tout n . **Donc $\limsup f_n = \inf_n g_n$ est mesurable.**
2. Comme $\mathbb{R}$ est complet, la suite $(f_n(x))$ converge si et seulement si elle est de Cauchy. On traduit cette condition avec des quantificateurs dénombrables :

$$C = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{N \geq 0} \bigcap_{p, q \geq N} \left\{ |f_p - f_q| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Chaque fonction $|f_p - f_q|$ est mesurable, comme composée de $f_p - f_q$ par la valeur absolue continue. **Les ensembles de la formule sont donc dans $\mathcal{A}$, et $C \in \mathcal{A}$ par stabilité par réunion et intersection dénombrables.**

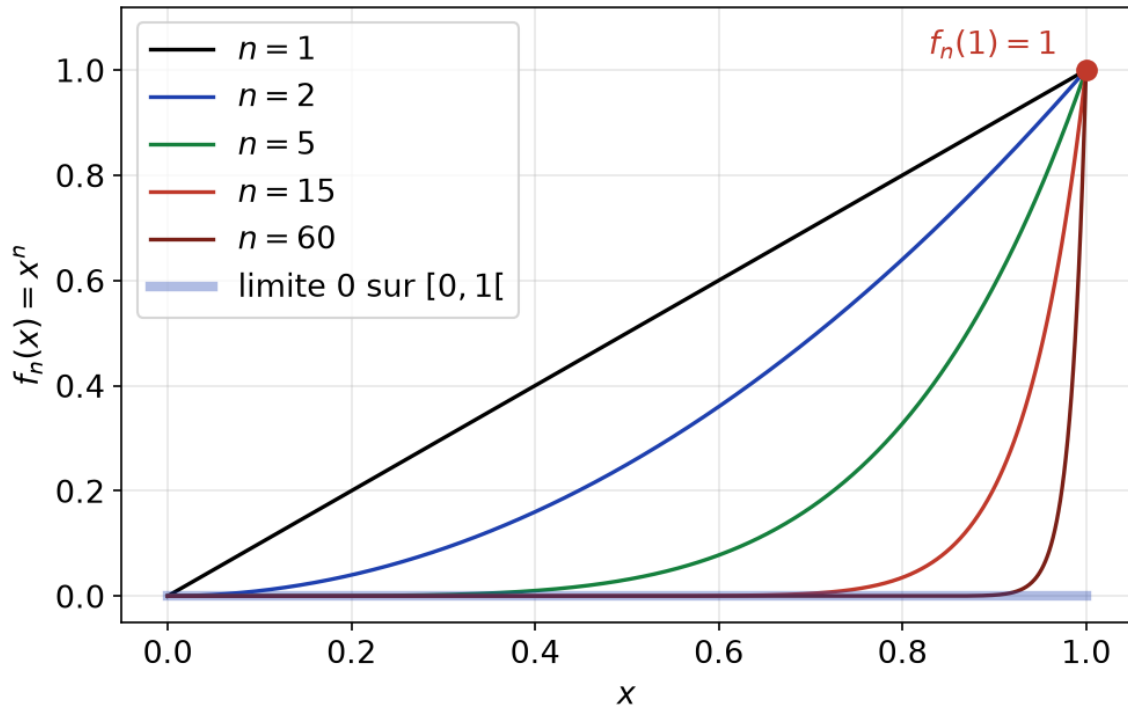
3. Les fonctions $h_n = f_n 1_C$ sont mesurables, comme produits de fonctions mesurables. Pour $x \in C$, $h_n(x) = f_n(x) \rightarrow f(x)$. Pour $x \notin C$, $h_n(x) = 0 = f(x)$. Ainsi, h_n converge simplement vers f sur E . **Une limite simple de fonctions mesurables est mesurable, donc f est mesurable.**
4. La fonction g est dérivable, donc continue. Les fonctions $k_n: x \rightarrow n(g(x + \frac{1}{n}) - g(x))$ sont donc continues, donc boréliennes. Par définition de la dérivée, $k_n(x) \rightarrow g'(x)$ pour tout x . **Ainsi g' est limite simple de fonctions boréliennes : elle est borélienne, même si elle n'est pas continue.**

Corrigé de l'exercice 20 : Égalité presque partout

1. L'ensemble $U = \{f \neq g\}$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par la fonction continue $f - g$. Il est donc ouvert. Par hypothèse, il est négligeable. Or un ouvert non vide contient un intervalle $]a, b[$ avec $a < b$, de mesure $b - a > 0$. **Donc $U = \emptyset$, c'est-à-dire**

$f = g$ partout.

2. Pour $0 \leq x < 1$, on a $x^n \rightarrow 0$, tandis que $f_n(1) = 1$ pour tout n . La suite converge donc vers 0 sauf sur $\{1\}$, qui est de mesure nulle. **Ainsi $f_n \rightarrow 0$ presque partout, mais pas en $x = 1$.** La figure ci-dessous montre les courbes qui s'écrasent sur l'axe, sauf au point $(1,1)$ qui reste fixe.



3. On a $\{1\}_{\mathbb{Q}} \neq \{0\} = \mathbb{Q}$, qui est négligeable. Donc $1_{\mathbb{Q}}$ est égale presque partout à la fonction nulle, continue. Supposons maintenant g continue et égale presque partout à $u = 1_{[0, +\infty[}$. L'ensemble $N = \{g \neq u\}$ est négligeable, donc son complémentaire est dense d'après l'exercice 13. Ainsi $g = 1$ sur une partie dense de $]0, +\infty[$, puis $g = 1$ sur $]0, +\infty[$ par continuité. De même, $g = 0$ sur $] -\infty, 0[$. **Par continuité en 0, on obtient $g(0) = 1$ et $g(0) = 0$, ce qui est absurde : $1_{[0, +\infty[}$ n'est égale presque partout à aucune fonction continue.**
4. L'ensemble $\{f \neq g\}$ est borélien. Il est négligeable pour δ_0 si et seulement si sa mesure est nulle, donc si et seulement s'il ne contient pas 0. **Ainsi $f = g$ δ_0 -presque partout si et seulement si $f(0) = g(0)$.**

Corrigé de l'exercice 21 : Approximation par des fonctions étagées

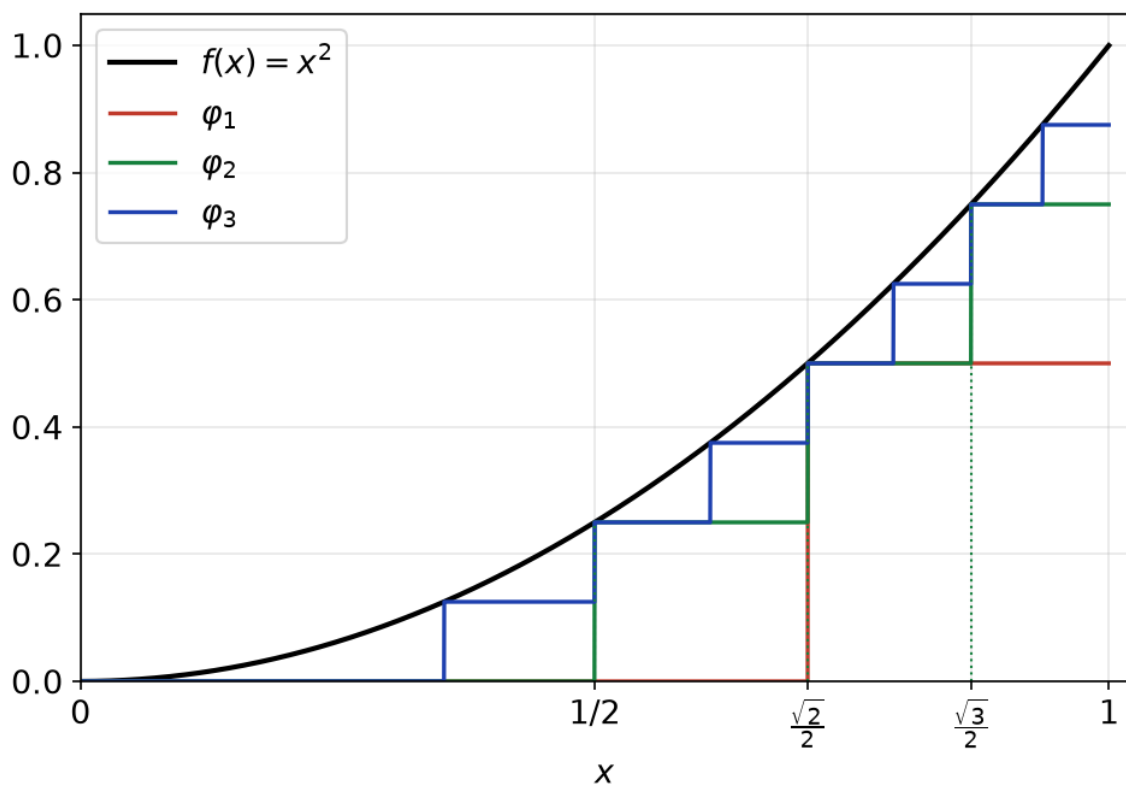
1. Pour $x \in [0,1]$, on a $x^2 \in [\alpha, \beta[$ si et seulement si $x \in [\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}[$. Pour $n = 1$, les seuils sont $\frac{1}{2}$ et 1 , et $f \geq 1$ seulement en $x = 1$. Donc

$$\varphi_1 = 0 \cdot 1_{[0, \frac{\sqrt{2}}{2}[} + \frac{1}{2} 1_{[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1[} + 1 \cdot 1_{\{1\}}.$$

Pour $n = 2$, les seuils sont $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ et 1 . On obtient

$$\varphi_2 = \frac{1}{4} 1_{[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[} + \frac{1}{2} 1_{[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}[} + \frac{3}{4} 1_{[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1[} + 1_{\{1\}}, \text{ la valeur } 0 \text{ étant prise sur } [0, \frac{1}{2}[.$$

La figure ci-dessous montre ces paliers, dont les abscisses sont des racines carrées.



2. Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, on a $f(x) \leq 1 \leq n$. De plus,
 $2^{-n} \lfloor 2^n f(x) \rfloor \leq f(x) \leq 1 \leq n$, donc le minimum vaut $2^{-n} \lfloor 2^n f(x) \rfloor$. Or
 $\lfloor t \rfloor \leq t < \lfloor t \rfloor + 1$ pour tout réel t . Avec $t = 2^n f(x)$, puis division par 2^n , on obtient
l'encadrement voulu. **Ainsi** $0 \leq f - \varphi_n < 2^{-n}$, **et la convergence est uniforme sur**
 $[0,1]$.

3. On utilise les longueurs des ensembles de la question 1. Le point $\{1\}$ est de mesure nulle, donc

$$I(\varphi_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{8}.$$

Numériquement, $I(\varphi_2) \approx 0,232$. Comme $\varphi_2 \leq f$, cette valeur est inférieure à l'aire $\frac{1}{3}$ sous la parabole. **On a** $I(\varphi_2) = \frac{5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{8} \approx 0,232 < \frac{1}{3}$.

4. La fonction g ne prend que les valeurs 0 et 1, et $g = 1_A$ avec $A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ borélien. Donc g est étagée, et $I(g) = \lambda(A) = 1$ d'après l'exercice 13. Cependant, A et son complémentaire sont denses dans $[0,1]$, donc g n'est constante sur aucun intervalle non trivial. **Ainsi g est étagée avec $I(g) = 1$, mais ce n'est pas une fonction en escalier : c'est tout l'intérêt de découper l'axe des valeurs.**

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : un ensemble non mesurable

- On a $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, d'où la réflexivité. Si $x - y \in \mathbb{Q}$, alors $y - x \in \mathbb{Q}$, d'où la symétrie. Enfin, si $x - y$ et $y - z$ sont rationnels, leur somme $x - z$ l'est aussi. **Donc $\sim$ est une relation d'équivalence.**
- Supposons $r_n + v = r_m + v'$ avec $v, v' \in V$. Alors $v - v' = r_m - r_n \in \mathbb{Q}$, donc $v \sim v'$. Comme V contient un seul élément par classe, $v = v'$, puis $r_n = r_m$ et $n = m$. **Les V_n sont donc deux à deux disjoints.**
- Soit $x \in [0,1]$ et v l'élément de V équivalent à x . Alors $r = x - v$ est rationnel et appartient à $[-1,1]$, car x et v sont dans $[0,1]$. Donc $r = r_n$ pour un n , et $x \in V_n$. Par ailleurs, $V_n \subset [-1,1] + [0,1] = [-1,2]$. **Ainsi $[0,1] \subset \bigcup_n V_n \subset [-1,2]$.**
- Si V est borélien, chaque V_n l'est, et $\lambda(V_n) = \lambda(V)$ par invariance. Par σ -additivité et monotonie,

$$1 = \lambda([0,1]) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(V_n) \leq \lambda([-1,2]) = 3.$$

Si $\lambda(V) = 0$, la somme est nulle, ce qui contredit la minoration. Si $\lambda(V) > 0$, la somme est

infinie, ce qui contredit la majoration. **Donc V n'est pas borélien.**

5. La partie V n'est pas borélienne, **donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$** . Soit ensuite μ une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ invariante par translation avec $0 < \mu([0,1]) < +\infty$. Le segment $[-1,2]$ est inclus dans la réunion des trois translatés $[0,1] - 1$, $[0,1]$ et $[0,1] + 1$, donc $\mu([-1,2]) \leq 3 \mu([0,1]) < +\infty$. Le même raisonnement donne $0 < \mu([0,1]) \leq \sum_n \mu(V) \leq \mu([-1,2]) < +\infty$, ce qui est impossible. **Une telle mesure n'existe pas.**

Point de méthode : la contradiction vient de ce qu'une somme dénombrable de termes égaux vaut 0 ou $+\infty$; on retrouve l'obstacle de l'exercice 10 sur la probabilité uniforme.

Corrigé de l'exercice 23 : Problème : lemme de classe monotone et unicité des mesures

1. Une tribu contient E . De plus, $B \setminus A = B \cap A^c$ est dans la tribu, et une réunion croissante est une réunion dénombrable. Donc une tribu est une classe monotone. Les trois propriétés passent à l'intersection, car chacune porte sur des éléments de toutes les classes. **Une intersection de classes monotones est une classe monotone, ce qui justifie la définition de $m(\mathcal{C})$.**
2. Soit $\mathcal{M}$ une classe monotone stable par intersection finie. D'abord, $A^c = E \setminus A \in \mathcal{M}$. Ensuite, $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{M}$. Enfin, pour une suite (A_n) , les ensembles $B_n = A_0 \cup \dots \cup A_n$ sont dans $\mathcal{M}$ et croissent vers $\bigcup A_n$. **Donc $\bigcup A_n \in \mathcal{M}$, et $\mathcal{M}$ est une tribu.**
3. D'abord, $\mathcal{M}_1$ contient $\mathcal{C}$, car $A \cap C \in \mathcal{C}$ pour $C \in \mathcal{C}$. Ensuite, $E \in \mathcal{M}_1$, car $A \cap E = A$. Si $B \subset B'$ sont dans $\mathcal{M}_1$, alors $A \cap (B' \setminus B) = (A \cap B') \setminus (A \cap B)$, différence de deux éléments emboîtés de $m(\mathcal{C})$. Enfin, $A \cap \bigcup B_n = \bigcup (A \cap B_n)$ est une réunion croissante. Donc $\mathcal{M}_1$ est une classe monotone contenant $\mathcal{C}$. **Par minimalité, $m(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}_1$, d'où $\mathcal{M}_1 = m(\mathcal{C})$.**
4. D'après la question 3, pour tout $A \in \mathcal{C}$ et tout $B \in m(\mathcal{C})$, on a $A \cap B \in m(\mathcal{C})$. Donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_2$. Les mêmes vérifications montrent que $\mathcal{M}_2$ est une classe monotone, donc $\mathcal{M}_2 = m(\mathcal{C})$. Ainsi $m(\mathcal{C})$ est stable par intersection finie. D'après la question 2, c'est une tribu contenant $\mathcal{C}$, donc $\sigma(\mathcal{C}) \subset m(\mathcal{C})$. Inversement, $\sigma(\mathcal{C})$ est une classe monotone contenant $\mathcal{C}$. **Donc $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.**

5. Posons $\mathcal{D} = \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : \mu(A) = \nu(A)\}$. Il contient $\mathcal{C}$ et E . Si $A \subset B$ sont dans $\mathcal{D}$, alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A)$, car les mesures sont finies. Si (A_n) est croissante dans $\mathcal{D}$, la continuité croissante donne $\mu(\bigcup A_n) = \lim \mu(A_n) = \lim \nu(A_n) = \nu(\bigcup A_n)$. Donc $\mathcal{D}$ est une classe monotone contenant $\mathcal{C}$. Ainsi $\mathcal{D} \supset m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$, c'est-à-dire $\mu = \nu$.
6. On a $\{1\} = \{1,2\} \cap \{1,3\}$, $\{2\} = \{1,2\} \setminus \{1\}$, $\{3\} = \{1,3\} \setminus \{1\}$ et $\{4\} = (\{1,2\} \cup \{1,3\})^c$. Donc $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(E)$. Ensuite, $\mu(\{1,2\}) = \frac{1}{2} = \nu(\{1,2\})$, $\mu(\{1,3\}) = \frac{1}{2} = \nu(\{1,3\})$ et $\mu(E) = \nu(E) = 1$. Pourtant, $\mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ et $\nu(\{1\}) = 0$. **Les mesures diffèrent : il manque la stabilité de $\mathcal{C}$ par intersection, puisque $\{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\} \notin \mathcal{C}$.**

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [tribus et mesures, cours de maths en L3](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur tribus et mesures](#)
- À maîtriser avant : [Espaces métriques : ouverts, fermés, continuité](#)
- Chapitre précédent : [Complétude, espaces de Banach et point fixe](#)
- Chapitre suivant : [Intégrale de Lebesgue et théorèmes de convergence](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)