

Topologie et continuité

Exercice 1 : Ouverts et fermés par image réciproque

Dans $\mathbb{R}^2$, puis dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère les parties suivantes. Pour chacune, dites si elle est ouverte, fermée, ou ni l'un ni l'autre, en justifiant.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \text{ et } y > x - 1\}$.
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \lfloor y \rfloor = 1\}$.
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } xy \geq 1\}$. On pourra écrire C sans inégalité stricte.
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \neq 0\}$.
5. $P = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M^2 = M\}$, ensemble des matrices de projecteurs.

Exercice 2 : Réunions et intersections infinies

Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ est muni de la valeur absolue.

1. Déterminez $I = \bigcap_{n \geq 1} \left] -\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right[$. Est-ce un ouvert ?
2. Déterminez $J = \bigcup_{n \geq 3} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]$. Est-ce un fermé ?

3. Soit E un espace normé. Démontrez, par la caractérisation séquentielle, qu'une réunion finie $F_1 \cup \dots \cup F_p$ de fermés est fermée.
4. Montrez que $Z = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\}$ est fermé. Que peut-on en conclure sur les réunions infinies de fermés ?

Exercice 3 : Intérieur et adhérence dans $\mathbb{R}$

Déterminez l'intérieur, l'adhérence et la frontière des parties suivantes de $\mathbb{R}$.

1. $A = [0,1[\cup \{2\}$.
2. $\mathbb{Q}$, puis $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
3. $\mathbb{Z}$.
4. $B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 4 : Ouverts et fermés relatifs

On pose $A = [0,1[\cup]2,3]$, partie de $\mathbb{R}$.

1. Montrez que $[0,1[$ est à la fois un ouvert relatif et un fermé relatif de A .
2. Montrez que $]2,3]$ est un fermé relatif de A , mais pas un fermé de $\mathbb{R}$.
3. La partie $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ est-elle un fermé relatif de A ? Un ouvert relatif de A ?
4. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x < 1$ et $f(x) = 1$ si $x > 2$. Montrez que f

est continue et déterminez $f^{-1}\left(\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\right)$. Vérifiez que c'est un ouvert relatif de A .

Exercice 5 : Applications lipschitziennes et uniformément continues

1. Montrez que, pour tous $x, y \geq 0$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$. Déduisez-en que la racine carrée est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrez que la racine carrée n'est lipschitzienne sur aucun intervalle $[0, a]$, $a > 0$.
3. Montrez que $x \rightarrow x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle est lipschitzienne sur $[-a, a]$ pour tout $a > 0$.
4. Montrez que $\sin$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : Formes linéaires sur $C([0,1])$

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$, muni de $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$ ou de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$. On pose

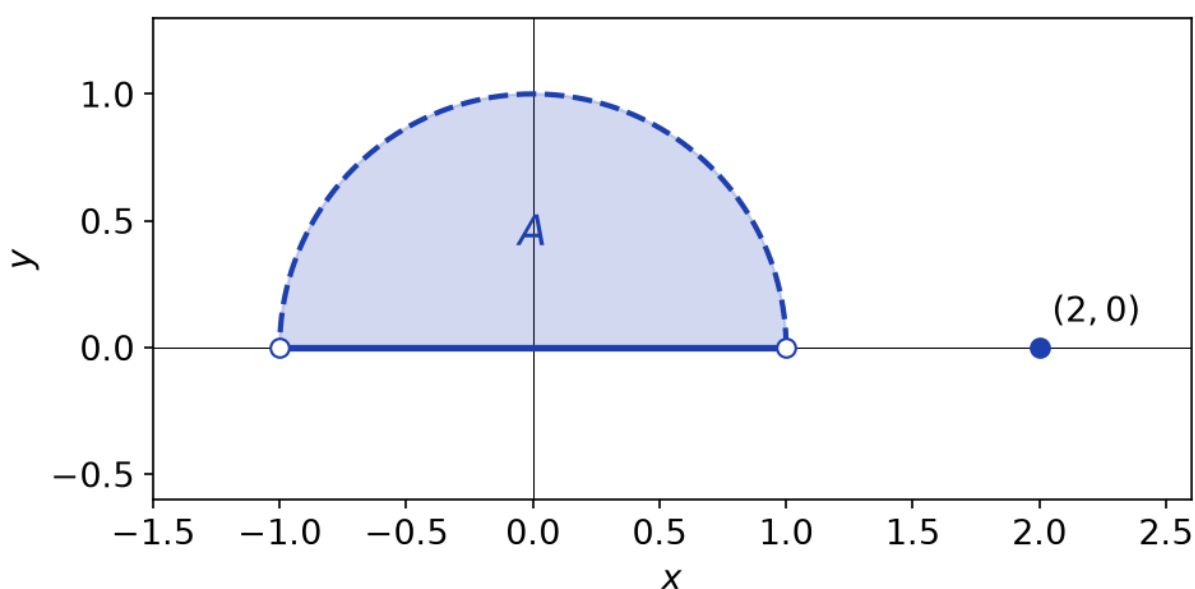
$$\varphi(f) = \int_0^1 t f(t) dt \text{ et } \delta(f) = f(0).$$

1. Montrez que φ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ et que $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$.
2. Montrez que δ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$, de norme 1.
3. Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(t) = \max(0, 1 - nt)$. Calculez $\|f_n\|_1$ et $\delta(f_n)$. Concluez que δ n'est pas continue pour $\|\cdot\|_1$.
4. Montrez que φ est continue pour $\|\cdot\|_1$ avec $\|\varphi\| \leq 1$. En utilisant $g_n(t) = \max(0, 1 - n(1 - t))$, montrez que $\|\varphi\| = 1$.

Exercice 7 : Une partie du plan : intérieur, adhérence, frontière

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa norme euclidienne, on considère la partie

$A = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 < 1, \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \cup \{(2,0)\}$, représentée ci-dessous : un demi-disque ouvert en haut, auquel on ajoute le segment ouvert $] -1,1[\times \{0\}$ et le point isolé $(2,0)$.



1. Montrez que $O = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} x^2 + y^2 < 1, \\ y > 0 \end{array} \right\}$ est un ouvert inclus dans A .
2. Déterminez l'intérieur de A .
3. Déterminez l'adhérence de A .
4. Dédisez-en la frontière de A . La partie A est-elle ouverte ? fermée ?

Exercice 8 : Boules ouvertes, boules fermées et sphères

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé non réduit à $\{0\}$, $a \in E$ et $r > 0$.

1. Montrez que $\overline{B(a, r)} = B_f(a, r)$. On pourra utiliser $x_n = a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x - a)$.
2. Montrez que l'intérieur de $B_f(a, r)$ est $B(a, r)$.
3. Déduisez-en la frontière de $B(a, r)$ et celle de $B_f(a, r)$.
4. Montrez qu'un sous-espace vectoriel V de E d'intérieur non vide est égal à E .

Exercice 9 : Fonctions croissantes et caractérisation séquentielle

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions croissantes de E et $\mathcal{S}$ celui des fonctions strictement croissantes.

1. Montrez que $\mathcal{F}$ est fermé, par la caractérisation séquentielle.
2. Retrouvez ce résultat en écrivant $\mathcal{F}$ comme une intersection d'images réciproques.
3. Montrez que $\mathcal{S}$ n'est pas fermé.
4. Déterminez l'adhérence de $\mathcal{S}$.

Exercice 10 : Une partie ouverte pour une norme et pas pour l'autre

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $U = \left\{ f \in E : \forall t \in]0, 1[, f(t) > 0 \right\}$.

1. Montrez que U est ouvert pour $\|\cdot\|_\infty$.
2. Pour $n \geq 1$, on pose $g_n(t) = 1 - 2\max(0, 1 - nt)$. Calculez $\|g_n - 1\|_1$ et $g_n(0)$.
Déduisez-en que U n'est pas ouvert pour $\|\cdot\|_1$.
3. Montrez que l'adhérence de U pour $\|\cdot\|_\infty$ est $V = \{f \in E : f \geq 0\}$.
4. Montrez que l'intérieur de V pour $\|\cdot\|_1$ est vide.

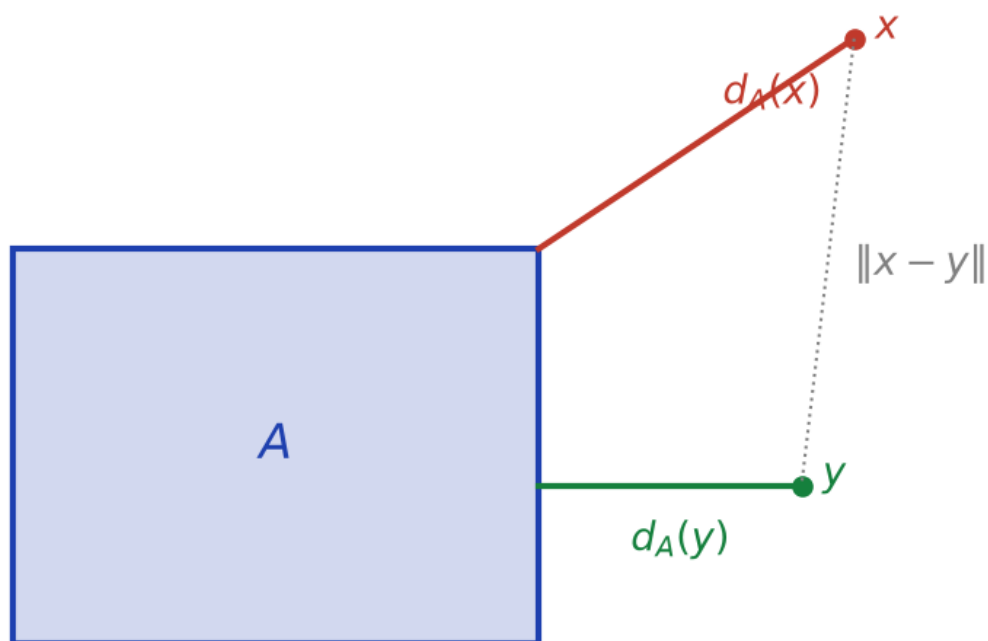
Exercice 11 : Limites en un point adhérent

On travaille sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dont $(0,0)$ est un point adhérent. Étudiez l'existence d'une limite en $(0,0)$ pour chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.
2. $g(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.
3. $h(x,y) = \frac{x y^2}{x^2 + y^4}$. Calculez d'abord la limite le long de chaque droite $y = mx$, puis le long de la parabole $x = y^2$.
4. La fonction g se prolonge-t-elle en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$? Et h ?

Exercice 12 : Fonction distance à une partie

Soit E un espace normé et A une partie non vide de E . On pose $d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$. La figure ci-dessous représente deux points x, y et leurs distances à une partie A .



1. Montrez que $|d_A(x) - d_A(y)| \leq \|x - y\|$ pour tous $x, y \in E$.
2. Montrez que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
3. Dédisez-en que tout fermé F non vide est de la forme $g^{-1}(\{0\})$ avec $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue.
4. Soit F et G deux fermés non vides et disjoints. Montrez que $h = \frac{d_F}{d_F + d_G}$ est bien définie et continue, qu'elle vaut 0 sur F et 1 sur G . Dédisez-en deux ouverts disjoints $U \supset F$ et $V \supset G$.

Exercice 13 : Densité de $GL_n(K)$ et polynôme caractéristique de AB

Soit $n \geq 1$ et $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $M_n(K)$ d'une norme quelconque.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrez que $A - \frac{1}{p} I_n$ est inversible pour tout entier p assez grand. Dédisez-en que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrez que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A inversible. Montrez que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
4. Dédisez-en, par densité, que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour toutes matrices A, B .

Exercice 14 : Équation de Cauchy et densité de $\mathbb{Q}$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y . On pose $a = f(1)$.

1. Montrez que $f(0) = 0$, puis que $f(nx) = n f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrez que $f(r) = ar$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
3. Rappelez pourquoi $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, puis concluez que $f(x) = ax$ pour tout réel x .

Exercice 15 : Norme subordonnée d'une matrice

On note $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ les normes subordonnées aux normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ de $\mathbb{K}^n$.

1. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrez que $\|M\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |m_{ij}|$.
2. Montrez que $\|M\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |m_{ij}|$.

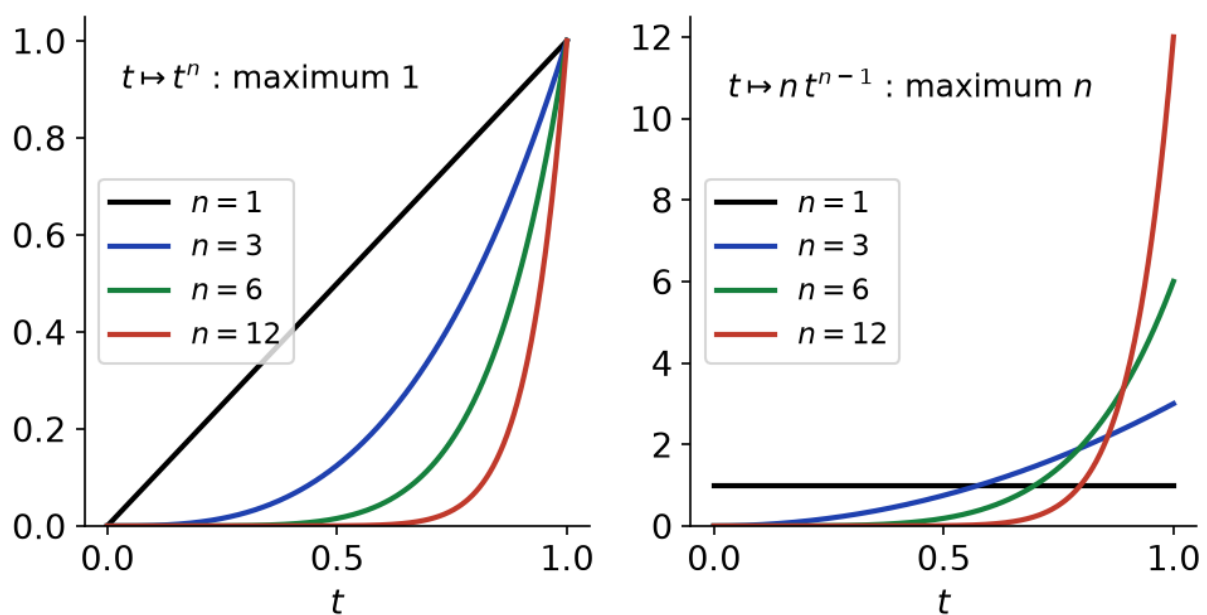
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculez $\|A\|_\infty$ et $\|A\|_1$, et donnez un vecteur où chaque norme est atteinte.
4. Montrez que toute valeur propre complexe λ d'une matrice M vérifie $|\lambda| \leq \|M\|$, pour toute norme subordonnée. Vérifiez-le sur les valeurs propres de A .
5. Majorez $\|A^k x\|_\infty$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 : Dérivation des polynômes : continue ou non

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on note $D: P \rightarrow P'$. Pour $P = \sum_k a_k X^k$, on pose

$$N_\infty(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|, \quad N_1(P) = \sum_k |a_k|, \quad N(P) = \sum_k k! |a_k|.$$

La figure ci-dessous représente les fonctions $t \rightarrow t^n$ et leurs dérivées sur $[0,1]$.



1. Justifiez que N_∞ , N_1 et N sont des normes sur E .
2. Montrez que D n'est continue ni pour N_∞ ni pour N_1 .
3. Montrez que D est continue pour N et calculez sa norme subordonnée.

Exercice 17 : Applications multilinéaires continues

1. Soit $B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire. Montrez qu'il existe $C \geq 0$ tel que $|B(x, y)| \leq C|x|_\infty |y|_\infty$, puis que B est continue.
2. Montrez que $(A, B) \rightarrow AB$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, puis que $A \rightarrow A^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$.
3. Sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $\Phi(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt$. Montrez que Φ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$.
4. Avec $h_n(t) = n \max(0, 1 - nt)$, montrez que Φ n'est pas continue pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 18 : Opérateur de primitivation

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $T: E \rightarrow E$ défini par $T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Justifiez que T est un endomorphisme de E .
2. On munit E de $\|\cdot\|_\infty$. Montrez que T est continue et calculez $\|T\|$.
3. On munit E de $\|\cdot\|_1$. Montrez, par une intégration par parties, que

$$\|T(f)\|_1 \leq \int_0^1 (1-t)|f(t)| dt, \text{ puis que } T \text{ est continue avec } \|T\| \leq 1.$$

4. Avec $f_n(t) = \max(0, 1 - nt)$, montrez que $\|T\| = 1$ pour $\|\cdot\|_1$.
5. Montrez que cette norme n'est atteinte en aucune fonction non nulle.

Exercice 19 : Forme linéaire continue et noyau fermé

Soit E un espace normé et φ une forme linéaire non nulle sur E .

1. Montrez que si φ est continue, alors $\ker \varphi$ est fermé.
2. On suppose φ non continue. Montrez qu'il existe une suite (y_n) de E telle que $\varphi(y_n) = 1$ et $\|y_n\| \rightarrow 0$.
3. Dédisez-en que, si φ n'est pas continue, $\ker \varphi$ est dense dans E . Concluez que φ est continue si et seulement si $\ker \varphi$ est fermé.
4. Application : sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_1$, montrez que $H = \{f : f(0) = 0\}$ est dense.

Exercice 20 : Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. On pose $\alpha = \inf (G \cap]0, +\infty[)$.

1. Justifiez que α existe.
2. On suppose $\alpha > 0$. Montrez que $\alpha \in G$, puis que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
3. On suppose $\alpha = 0$. Montrez que G est dense dans $\mathbb{R}$.

- Montrez que $G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, 1-périodique et $\sqrt{2}$ -périodique. Montrez que f est constante.

Exercice 21 : Croissance d'une fonction uniformément continue

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue.

- Montrez qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$.
- Soit $x > 0$ et $N = \lfloor x/\delta \rfloor + 1$. En découpant $[0, x]$ en N morceaux égaux, montrez que $|f(x) - f(0)| \leq \frac{x}{\delta} + 1$.
- Déduisez-en qu'il existe $a, b \geq 0$ tels que $|f(x)| \leq a|x| + b$ pour tout réel x .
- Déduisez-en que $x \rightarrow x^2$ et $\exp$ ne sont pas uniformément continues sur $\mathbb{R}$.
- Montrez que $x \rightarrow \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, bien qu'elle soit bornée. La réciproque de la question 3 est-elle vraie ?

Exercice 22 : Problème : formes linéaires sur $\mathbb{R}[X]$ et normes non équivalentes

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on considère les normes $N_1\left(\sum a_k X^k\right) = \sum |a_k|$ et $N_\infty(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $e_a : P \rightarrow P(a)$ la forme linéaire d'évaluation en a .

- Montrez que $N_\infty \leq N_1$.
- En étudiant $P_n = (1 - X)^n$, montrez que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

3. Montrez que e_α est continue pour N_1 si et seulement si $|\alpha| \leq 1$, et que sa norme vaut alors 1.
4. Montrez que e_α est continue pour N_∞ si et seulement si $\alpha \in [0,1]$, et que sa norme vaut alors 1.
5. Montrez que $H_2 = \{P : P(2) = 0\}$ est dense dans E pour N_1 et pour N_∞ . On pourra utiliser $Q_n = X^n / 2^n$.
6. Montrez que $H_{-1} = \{P : P(-1) = 0\}$ est fermé pour N_1 mais dense pour N_∞ .
7. Soit $\psi(P) = \int_0^1 P(t) dt$. Montrez que ψ est continue pour les deux normes, de norme 1 dans les deux cas.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [topologie et continuité, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Normes, espaces vectoriels normés et suites](#)
- Chapitre précédent : [Normes, espaces vectoriels normés et suites](#)
- Chapitre suivant : [Compacité, connexité par arcs et dimension finie](#)

- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)