

Topologie de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 : Calcul des normes usuelles

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $x = (3, -4, 12)$ et $y = (1, 2, -2)$.

1. Calculer $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$, puis $\|y\|_1$, $\|y\|_2$, $\|y\|_\infty$.
2. Calculer les trois normes de $x + y$ et vérifier l'inégalité triangulaire pour chacune.
3. Sans nouveau calcul de coordonnées, donner les trois normes de $-2x$.
4. Déterminer l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^2$ tels que $\|v\|_1 = \|v\|_\infty$.

Exercice 2 : Distances et appartenance à des boules

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $a = (1, 2)$, $b = (4, -2)$ et $c = (2, 3, 5)$. On note d_1 , d_2 , d_∞ les distances associées aux trois normes usuelles, et B_1 , B_2 , B_∞ les boules ouvertes correspondantes.

1. Calculer $d_1(a, b)$, $d_2(a, b)$ et $d_\infty(a, b)$.
2. Le point c appartient-il à $B_1(a, 2)$? à $B_2(a, 2)$? à $B_\infty(a, 2)$?
3. Décrire géométriquement la sphère $S_\infty(a, 1)$.
4. Soit m le milieu de $[a, b]$. Vérifier que $d(a, m) = d(m, b) = \frac{1}{2} d(a, b)$ pour chacune des

trois distances, puis le démontrer pour une norme quelconque.

Exercice 3 : Des applications qui ne sont pas des normes

Pour chacune des applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$, dire si c'est une norme. Justifier par une preuve ou par un contre-exemple.

1. $N_1(x, y) = |x|$.
2. $N_2(x, y) = x^2 + y^2$.
3. $N_3(x, y) = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$.
4. $N_4(x, y) = \max(|x|, |x - y|)$.

Exercice 4 : Une norme définie par valeurs absolues

Pour $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(v) = |2x + y| + |x - y|$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que, pour tous réels a et b , $|a| + |b| = \max(|a + b|, |a - b|)$. En déduire que $N(x, y) = \max(3|x|, |x + 2y|)$.
3. Représenter la boule unité fermée de N et donner ses sommets.
4. Déterminer les meilleures constantes α et β telles que $\alpha \|v\|_\infty \leq N(v) \leq \beta \|v\|_\infty$ pour tout v .

Exercice 5 : Une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$

Pour $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(u) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$.

1. Montrer que $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$. En déduire que N est bien définie et que $N(u) = 0$ implique $u = 0$.
2. Pour $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$, on pose $\varphi(u, u') = xx' + \frac{1}{2}(xy' + x'y) + yy'$. Montrer que φ est un produit scalaire et que $N(u) = \sqrt{\varphi(u, u)}$. En déduire que N est une norme.
3. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{2}} \|u\|_2 \leq N(u) \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \|u\|_2$ et que ces constantes sont optimales.
4. Montrer que la sphère unité de N coupe la droite $y = x$ en deux points à distance euclidienne $\sqrt{2/3}$ de l'origine, et la droite $y = -x$ en deux points à distance $\sqrt{2}$.

Exercice 6 : Comparaison des normes 1, 2 et infini

Soit $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.
2. Montrer que $\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$ et que $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$.
3. En déduire que $\|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$.
4. Montrer que chacune des constantes 1, $\sqrt{n}$ et n obtenues est optimale, en précisant un cas d'égalité.

Exercice 7 : Boules des trois normes dans le plan

Dans $\mathbb{R}^2$, on note B_1 , B_2 , B_∞ les boules fermées des trois normes usuelles.

1. Représenter sur un même dessin $B_1(0, 1)$, $B_2(0, 1)$ et $B_\infty(0, 1)$.
2. Démontrer que $B_1(0, 1) \subset B_2(0, 1) \subset B_\infty(0, 1)$.
3. Déterminer le plus grand réel $r > 0$ tel que $B_\infty(0, r) \subset B_1(0, 1)$.
4. Déterminer le plus grand réel $r > 0$ tel que $B_2(0, r) \subset B_1(0, 1)$.

Exercice 8 : Parties bornées du plan et de l'espace

Dire si chacune des parties suivantes est bornée, en justifiant.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \leq 3\}$.
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$.
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 \leq 1\}$.
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - y\| \leq 1\}$.
5. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.
6. Expliquer pourquoi la réponse ne dépend pas de la norme choisie.

Exercice 9 : Limites de suites de $\mathbb{R}^3$

Étudier la convergence des suites suivantes, définies pour $k \geq 1$, et donner leur limite éventuelle.

$$1. \left(\begin{array}{l} u_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \\ k \sin \frac{1}{k}, \\ \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \end{array} \right).$$

$$2. \left(\begin{array}{l} v_k = \left(\cos \frac{k\pi}{2}, \right. \\ \left. \frac{1}{k}, \right. \\ \left. 0 \right) \end{array} \right).$$

$$3. \left(\begin{array}{l} w_k = \left(\frac{2k+1}{k+3}, \right. \\ k^5 e^{-k}, \\ \left. \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right) \end{array} \right).$$

4. Pour la suite (u_k) , vérifier que $|u_k - \ell|_\infty \rightarrow 0$, où ℓ est la limite trouvée. Que dire de $|u_k - \ell|_1$?

Exercice 10 : Une suite récurrente dans le plan

On définit une suite $u_k = (x_k, y_k)$ de $\mathbb{R}^2$ par $u_0 = (4, -2)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + \frac{y_k}{4}, \quad y_{k+1} = \frac{x_k}{4} + \frac{y_k}{2}.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer que $|u_{k+1}|_\infty \leq \frac{3}{4}|u_k|_\infty$ pour tout k . En déduire que (u_k) converge vers $(0, 0)$, et majorer $|u_k|_2$.
3. On pose $s_k = x_k + y_k$ et $d_k = x_k - y_k$. Exprimer s_{k+1} et d_{k+1} en fonction de

s_k et d_k , puis donner x_k et y_k en fonction de k .

4. Montrer que $\frac{u_k}{|u_k|_2}$ converge et donner sa limite. Interpréter.

Exercice 11 : Normes non équivalentes en dimension infinie

Cet exercice sort du cadre de $\mathbb{R}^n$; il montre le rôle de la dimension finie. Sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels, on pose, pour $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$:

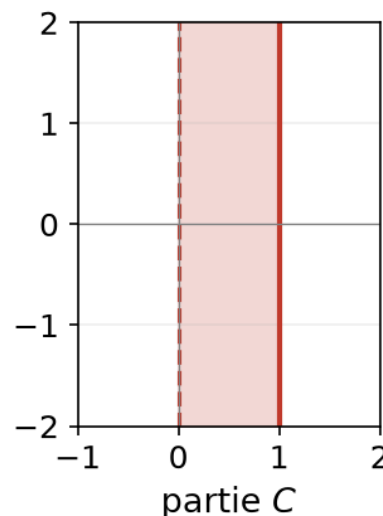
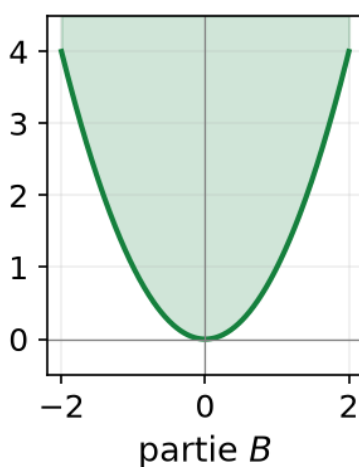
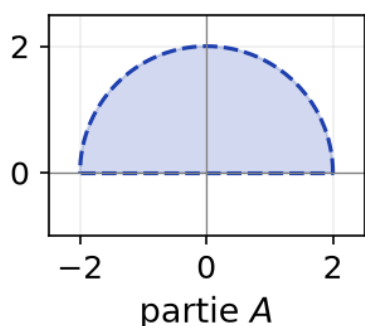
$$N_1(P) = \sum_{k=0}^d |a_k|, \quad N_\infty(P) = \max_{0 \leq k \leq d} |a_k|.$$

1. Justifier brièvement que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $N_\infty(P) \leq N_1(P)$ pour tout P .
3. On pose $P_m = 1 + X + \dots + X^m$. Calculer $N_1(P_m)$ et $N_\infty(P_m)$. En déduire qu'il n'existe aucune constante C telle que $N_1 \leq C N_\infty$.
4. On pose $Q_m = \frac{1}{m} P_{m-1}$ pour $m \geq 1$. Montrer que (Q_m) tend vers 0 pour N_∞ mais pas pour N_1 .

Exercice 12 : Ouverts et fermés du plan

On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$, représentées sur la figure ci-dessous (bord en pointillés s'il est exclu, en trait plein s'il est inclus) :

$$A = \{(x, y) \mid \min(x^2 + y^2 < 4, y > 0)\}, \quad B = \{(x, y) \mid y \geq x^2\}, \quad C = \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1\}.$$



1. Montrer que A est ouverte en exhibant, pour chaque point, une boule incluse dans A .
2. Montrer que B est fermée à l'aide de la caractérisation séquentielle.
3. Montrer que C n'est ni ouverte ni fermée.
4. Montrer que $\mathbb{Z}^2$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Est-elle ouverte ?

Exercice 13 : Réunions et intersections infinies

1. Pour $k \geq 1$, on pose $F_k = [\frac{1}{k}, 1] \times [0, 1]$. Montrer que chaque F_k est fermé, puis déterminer $\bigcup_{k \geq 1} F_k$. Cette réunion est-elle fermée ?
2. Pour $k \geq 1$, on pose $U_k = B_2(0, 1 + \frac{1}{k})$, boule ouverte de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $\bigcap_{k \geq 1} U_k$. Cette intersection est-elle ouverte ?
3. Démontrer qu'une intersection de deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert. Où l'argument échoue-t-il ?

pour une intersection infinie ?

Exercice 14 : Boules ouvertes, boules fermées et sphères

Soit N une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.

1. Montrer que la boule ouverte $B(a, r)$ est un ouvert.
2. Montrer que la boule fermée $B_f(a, r)$ est un fermé, en utilisant la caractérisation séquentielle.
3. En déduire que la sphère $S(a, r)$ est un fermé.
4. Montrer qu'un singleton, puis toute partie finie de $\mathbb{R}^n$, est fermé.

Exercice 15 : Intérieur, adhérence et frontière de parties du plan

Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}^2$.

1. $A = [0, 1[\times]0, 1]$.
2. $B = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.
3. $C = \mathbb{Q}^2$.
4. $D = \left\{ \left(\frac{1}{k}, 0 \right) \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 1 \right\}$.

Exercice 16 : Adhérence et intérieur d'une boule

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.

1. Montrer que $\overline{B(a, r)} = B_f(a, r)$.
2. Montrer que l'intérieur de $B_f(a, r)$ est $B(a, r)$.
3. En déduire la frontière de $B(a, r)$ et celle de $B_f(a, r)$.

Exercice 17 : Propriétés de la frontière

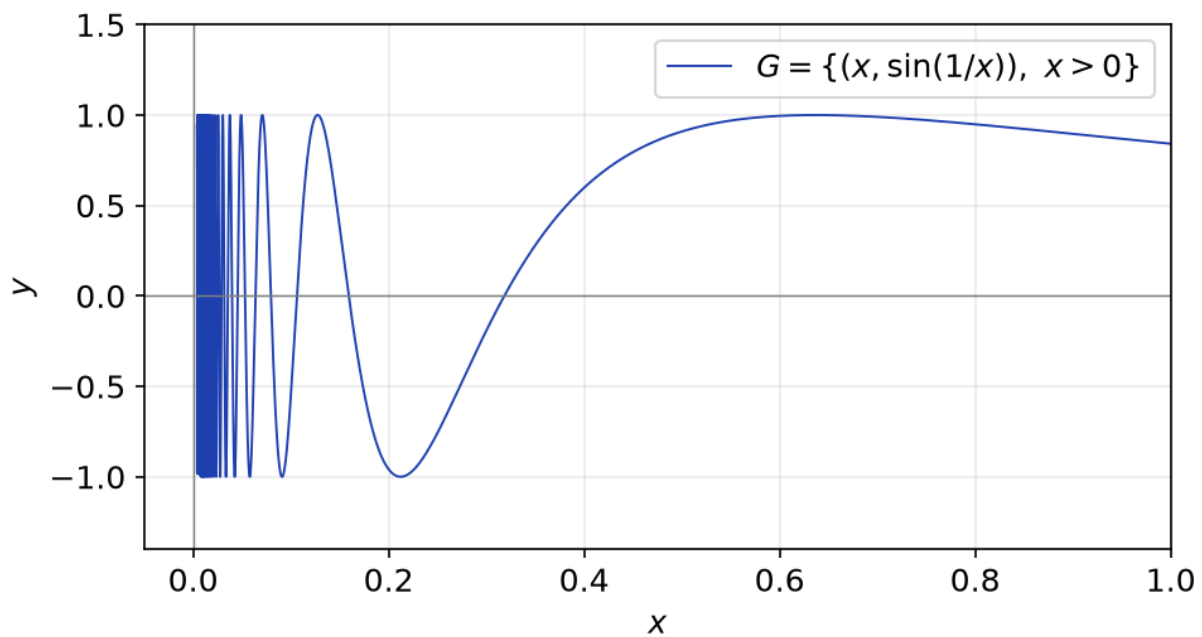
Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ et $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ son complémentaire. On admet que $\overline{A^c}$ est le complémentaire de $\text{Int}(A)$.

1. Montrer que $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. En déduire que $\text{Fr}(A)$ est fermée et que $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(A^c)$.
2. Montrer que A est ouverte si et seulement si $A \cap \text{Fr}(A) = \emptyset$.
3. Montrer que A est fermée si et seulement si $\text{Fr}(A) \subset A$.
4. Montrer qu'un point a est dans $\text{Fr}(A)$ si et seulement s'il existe une suite de A et une suite de A^c qui convergent toutes deux vers a .

Exercice 18 : Graphe d'une fonction et caractérisation séquentielle

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que son graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que le graphe $H = \{(\frac{1}{x}) \mid x > 0, 0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$, bien que $]0, +\infty[$ ne soit pas fermé dans $\mathbb{R}$.
3. On considère $G = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x > 0\}$, dessinée ci-dessous. Soit $c \in [-1, 1]$. Construire une suite (x_k) de réels strictement positifs, de limite 0, telle que $\sin(\frac{1}{x_k}) = c$ pour tout k . En déduire que G n'est pas fermée.
4. Déterminer $\overline{G}$.



Exercice 19 : Parties compactes du plan

Dire si chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ est compacte, en justifiant.

1. $A = \{(x, y) \mid x^2 + 2y^2 \leq 4\}$.
2. $B = \{(x, y) \mid xy = 1\}$.
3. $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^4 = 1\}$.

4. $D = \left\{ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \mid k \geq 1 \right\} \cup \{(0, 0)\}$, puis $D' = D \setminus \{(0, 0)\}$.
5. $E = [0, 1] \times [0, 1[$.

Exercice 20 : Suites extraites et Bolzano-Weierstrass

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = ((-1)^k, \cos \frac{k\pi}{3}) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer $u_0, \dots, u_5$ et vérifier que $u_{k+6} = u_k$.
2. Déterminer les limites possibles des suites extraites convergentes de (u_k) .
3. La suite (u_k) converge-t-elle ?
4. On pose $v_k = (\cos k, \sin k)$. Justifier que (v_k) admet une suite extraite convergente et que sa limite appartient au cercle unité.

Exercice 21 : Distance à une partie fermée

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. Pour une partie non vide A et $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|_2$.

1. Montrer que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|_2$ pour tous x, y .
2. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
3. On suppose A fermée. Montrer qu'il existe $a_0 \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - a_0\|_2$.
4. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $P = \{(t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ et $x_0 = (0, 2)$. Justifier que P est fermée, puis calculer $d(x_0, P)$ et les points de P qui réalisent cette distance.

5. Soit $A = B_2(0, 1)$, boule ouverte de $\mathbb{R}^2$, et $x = (2, 0)$. Calculer $d(x, A)$. Cette distance est-elle atteinte ?

Exercice 22 : Problème : équivalence des normes en dimension finie

Soit N une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique. On pose $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} N(e_i)$.

1. Montrer que $N(x) \leq \beta \|x\|_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $|N(x) - N(y)| \leq \beta \|x - y\|_1$. En déduire que si $u_k \rightarrow x$ pour $\|\cdot\|_1$, alors $N(u_k) \rightarrow N(x)$.
3. Montrer que $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1\}$ est une partie compacte de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$.
4. On pose $\alpha = \inf_{x \in S} N(x)$. Montrer que cette borne inférieure est atteinte, puis que $\alpha > 0$.
5. En déduire que $\alpha \|x\|_1 \leq N(x) \leq \beta \|x\|_1$ pour tout x , puis que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.
6. Application : pour $N(x, y) = |2x + y| + |x - y|$ sur $\mathbb{R}^2$, calculer β et α . On pourra utiliser l'expression $N(x, y) = \max(3|x|, |x + 2y|)$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [topologie de \$\mathbb{R}^n\$, cours de maths en L2](#)
- Chapitre précédent : [Groupes, sous-groupes et morphismes](#)
- Chapitre suivant : [Plusieurs variables : limites et dérivées partielles](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)