

## Topologie de $\mathbb{R}^n$

### Corrigé de l'exercice 1 : Calcul des normes usuelles

- Pour  $x = (3, -4, 12)$ , on obtient  $|x|_1 = 3 + 4 + 12 = 19$ ,  
 $|x|_2 = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$  et  $|x|_\infty = 12$ . Pour  $y = (1, 2, -2)$ , on obtient  
 $|y|_1 = 5$ ,  $|y|_2 = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$  et  $|y|_\infty = 2$ . **Normes de  $x$  : 19, 13, 12 ;**  
**normes de  $y$  : 5, 3, 2.**
- On a  $x + y = (4, -2, 10)$ . Donc  $|x + y|_1 = 16$ ,  
 $|x + y|_2 = \sqrt{16 + 4 + 100} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30} \approx 10,95$  et  $|x + y|_\infty = 10$ . On vérifie  
ensuite :  $16 \leq 19 + 5 = 24$ ,  $2\sqrt{30} \leq 13 + 3 = 16$  et  $10 \leq 12 + 2 = 14$ . **L'inégalité**  
**triangulaire est vérifiée pour les trois normes.**
- Par homogénéité,  $|-2x| = |-2| |x| = 2|x|$  pour toute norme. **On trouve**  $|-2x|_1 = 38$ ,  
 $|-2x|_2 = 26$ ,  $|-2x|_\infty = 24$ .
- Soit  $v = (a, b)$ . L'égalité  $|a| + |b| = \max(|a|, |b|)$  équivaut à  $\min(|a|, |b|) = 0$ , car la  
somme de deux réels positifs vaut leur maximum plus leur minimum. Ainsi,  $a = 0$  ou  $b = 0$ .  
**L'ensemble cherché est la réunion des deux axes de coordonnées.**

### Corrigé de l'exercice 2 : Distances et appartenance à des boules

- On a  $b - a = (3, -4)$ . D'où  $d_1(a, b) = 3 + 4 = 7$ ,  $d_2(a, b) = \sqrt{9 + 16} = 5$  et  
 $d_\infty(a, b) = 4$ . **Les trois distances valent 7, 5 et 4.**
- On calcule  $c - a = (1, 1, 5)$ . D'abord,  $|c - a|_1 = 2,5 \geq 2$ , donc  $c \notin B_1(a, 2)$ . Ensuite,

$\|c - a\|_2 = \sqrt{1 + 2,25} = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,80 < 2$ . Enfin,  $\|c - a\|_\infty = 1,5 < 2$ . **Le point  $c$  est dans  $B_2(a, 2)$  et  $B_\infty(a, 2)$ , mais pas dans  $B_1(a, 2)$ .**

3. Un point  $(x, y)$  est sur  $S_\infty(a, 1)$  si  $\max(|x - 1|, |y - 2|) = 1$ . Autrement dit, il est dans le carré  $[0, 2] \times [1, 3]$  et l'une de ses coordonnées atteint un bord. **La sphère  $S_\infty(a, 1)$  est le bord du carré  $[0, 2] \times [1, 3]$ , de centre  $a$  et de côté  $2$ .**

4. Le milieu est  $m = \frac{a+b}{2} = (\frac{5}{2}, 0)$ . Ainsi,  $m - a = b - m = (\frac{3}{2}, -2)$ , de normes  $\frac{7}{2}, \frac{5}{2}$  et  $2$  : ce sont bien les moitiés de  $7, 5$  et  $4$ . Pour une norme  $N$  quelconque,  $m - a = \frac{1}{2}(b - a)$  et  $b - m = \frac{1}{2}(b - a)$ . Par homogénéité,  $N(m - a) = N(b - m) = \frac{1}{2} N(b - a)$ . **Le milieu est à égale distance des extrémités, à la distance  $\frac{1}{2}d(a, b)$ , pour toute norme.**

## **Corrigé de l'exercice 3 : Des applications qui ne sont pas des normes**

---

1. On a  $N_1(0, 1) = 0$  alors que  $(0, 1) \neq (0, 0)$ . **La séparation est en défaut :  $N_1$  n'est pas une norme.**

2. On a  $N_2(2, 0) = 4$  tandis que  $2 N_2(1, 0) = 2$ . **L'homogénéité est en défaut :  $N_2$  n'est pas une norme.**

3. La séparation est vraie :  $N_3(x, y) = 0$  impose  $\sqrt{|x|} = \sqrt{|y|} = 0$ . De plus,  $N_3(\lambda x, \lambda y) = (\sqrt{|\lambda|}(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}))^2 = |\lambda| N_3(x, y)$ . En revanche, avec  $u = (1, 0)$  et  $v = (0, 1)$ , on a  $N_3(u) = N_3(v) = 1$ , mais  $N_3(u + v) = (1 + 1)^2 = 4 > 2$ . **L'inégalité triangulaire est en défaut :  $N_3$  n'est pas une norme.**

4. D'abord, si  $N_4(x, y) = 0$ , alors  $x = 0$  et  $x - y = 0$ , donc  $y = 0$ . Ensuite,  $N_4(\lambda x, \lambda y) = \max(|\lambda||x|, |\lambda||x - y|) = |\lambda| N_4(x, y)$ . Enfin, pour  $u = (x, y)$  et  $u' = (x', y')$ , on a  $|x + x'| \leq |x| + |x'| \leq N_4(u) + N_4(u')$ . De même,  $|(x + x') - (y + y')| \leq |x - y| + |x' - y'| \leq N_4(u) + N_4(u')$ . En prenant le maximum,  $N_4(u + u') \leq N_4(u) + N_4(u')$ .  **$N_4$  est une norme.**

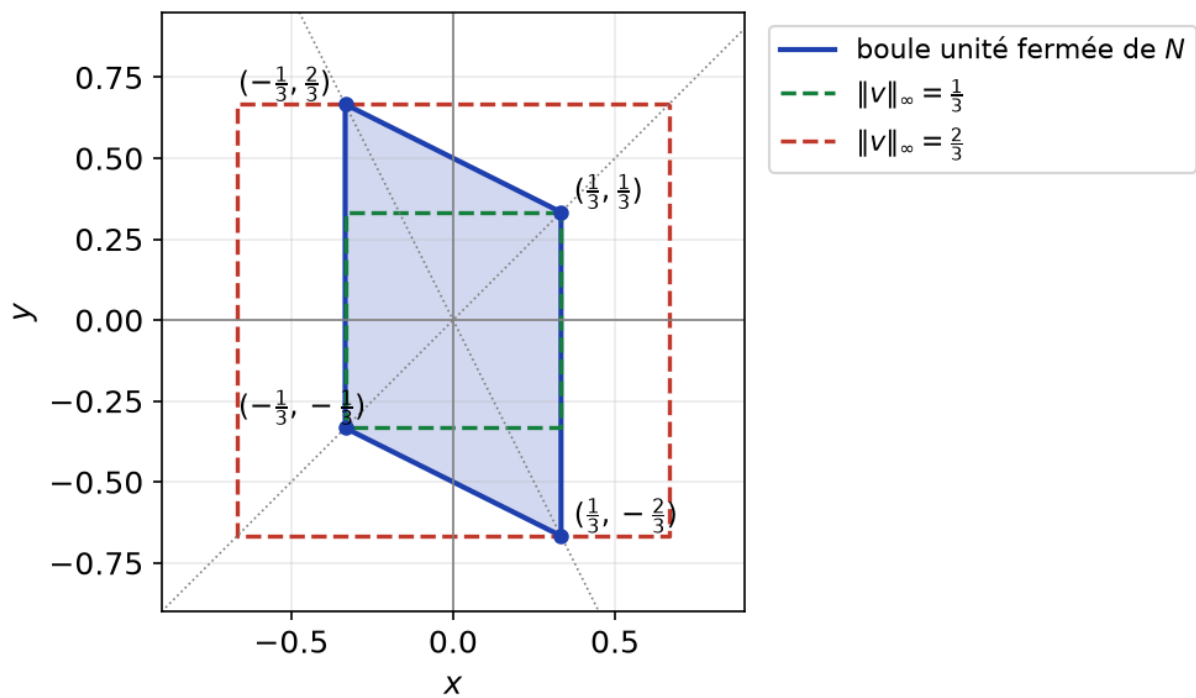
**Point de méthode :** un contre-exemple bien choisi suffit pour réfuter ; en revanche, prouver qu'une

application est une norme demande de vérifier les trois axiomes pour tous les vecteurs.

## **Corrigé de l'exercice 4 : Une norme définie par valeurs absolues**

---

1. L'application  $N$  est à valeurs positives. Si  $N(x, y) = 0$ , alors  $2x + y = 0$  et  $x - y = 0$ . Donc  $y = x$  puis  $3x = 0$ , et  $(x, y) = (0, 0)$ . L'homogénéité est immédiate :  $N(\lambda v) = |\lambda| |2x + y| + |\lambda| |x - y|$ . Enfin, l'inégalité triangulaire de la valeur absolue, appliquée à chaque terme, donne  $N(v + v') \leq N(v) + N(v')$ .  **$N$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .**
2. Par l'inégalité triangulaire,  $|a + b| \leq |a| + |b|$  et  $|a - b| \leq |a| + |b|$ . Réciproquement, si  $ab \geq 0$ , alors  $|a + b| = |a| + |b|$ ; si  $ab < 0$ , alors  $|a - b| = |a| + |b|$ . Ainsi, le maximum vaut  $|a| + |b|$ . On applique ce résultat avec  $a = 2x + y$  et  $b = x - y$ . Comme  $a + b = 3x$  et  $a - b = x + 2y$ , **on obtient**  
 $N(x, y) = \max(3|x|, |x + 2y|)$ .
3. La boule unité fermée est donc  $\{|x| \leq \frac{1}{3}\} \cap \{|x + 2y| \leq 1\}$ . C'est l'intersection d'une bande verticale et d'une bande oblique, donc un parallélogramme. Ses sommets s'obtiennent avec  $x = \pm \frac{1}{3}$  et  $x + 2y = \pm 1$ . **Les sommets sont**  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ,  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$  **et**  $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ . La figure ci-dessous montre cette boule, coincée entre deux carrés de la norme infinie.



4. Majoration :  $3|x| \leq 3\|v\|_\infty$  et  $|x + 2y| \leq |x| + 2|y| \leq 3\|v\|_\infty$ . Donc  $N(v) \leq 3\|v\|_\infty$ , avec égalité pour  $v = (1, 0)$ .

Minoration : si  $|x| \geq \frac{1}{2}|y|$ , alors  $N(v) \geq 3|x| \geq \frac{3}{2}\max(|x|, |y|)$ . En effet,  $3|x| \geq \frac{3}{2}|x|$  et  $3|x| \geq \frac{3}{2}|y|$ . Sinon,  $|x| < \frac{1}{2}|y|$ , donc  $|y| = \|v\|_\infty$  et

$N(v) \geq |x + 2y| \geq 2|y| - |x| > \frac{3}{2}|y|$ . Dans les deux cas,  $N(v) \geq \frac{3}{2}\|v\|_\infty$ . L'égalité a lieu pour  $v = (-\frac{1}{2}, 1)$  :  $N(v) = \max(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$  et  $\|v\|_\infty = 1$ .

**Les meilleures constantes sont  $\alpha = \frac{3}{2}$  et  $\beta = 3$ .** Sur la figure, cela se lit ainsi : la boule de  $N$  contient le carré de rayon  $\frac{1}{3}$  et elle est contenue dans le carré de rayon  $\frac{2}{3}$ .

## Corrigé de l'exercice 5 : Une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$

1. On développe :  $(x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 = x^2 + xy + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = x^2 + xy + y^2$ . Cette quantité est une somme de carrés, donc positive, et  $N$  est bien définie. Si elle est nulle, alors

$y = 0$  puis  $x = 0$ .  $N(u) = 0$  implique  $u = 0$ .

2. L'application  $\varphi$  est symétrique, car l'échange de  $u$  et  $u'$  ne change pas l'expression. Elle est linéaire par rapport à  $u'$ , donc bilinéaire par symétrie. De plus,  $\varphi(u, u) = x^2 + xy + y^2$ , qui est strictement positif pour  $u \neq 0$  d'après la question 1. C'est donc un produit scalaire, et  $N(u) = \sqrt{\varphi(u, u)}$ .

Pour l'inégalité triangulaire, on reprend la preuve de Cauchy-Schwarz : le trinôme

$t \rightarrow \varphi(u + tv, u + tv) = N(u)^2 + 2t\varphi(u, v) + t^2 N(v)^2$  est positif, donc

$\varphi(u, v)^2 \leq N(u)^2 N(v)^2$ . Par conséquent,

$N(u + v)^2 = N(u)^2 + 2\varphi(u, v) + N(v)^2 \leq (N(u) + N(v))^2$ .  **$N$  est la norme associée au produit scalaire  $\varphi$ .**

3. On utilise  $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , qui vient de  $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ . Ainsi :

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq x^2 + xy + y^2 \leq \frac{3}{2}(x^2 + y^2).$$

En prenant les racines,  $\frac{1}{\sqrt{2}}|u|_2 \leq N(u) \leq \sqrt{\frac{3}{2}}|u|_2$ . Pour  $u = (1, -1)$ , on a  $N(u)^2 = 1$  et  $|u|_2^2 = 2$  : la minoration est une égalité. Pour  $u = (1, 1)$ , on a  $N(u)^2 = 3$  et  $|u|_2^2 = 2$  : la majoration est une égalité. **Les constantes  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\sqrt{3/2}$  sont optimales.**

4. Sur la droite  $y = x$ , un point  $(t, t)$  vérifie  $N = 1$  si  $3t^2 = 1$ , soit  $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Sa distance euclidienne à l'origine vaut  $\sqrt{2t^2} = \sqrt{2/3}$ . Sur la droite  $y = -x$ , le point  $(t, -t)$  vérifie  $N = 1$  si  $t^2 = 1$ , et sa distance vaut  $\sqrt{2}$ . **La sphère unité de  $N$  est une ellipse de demi-axes  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2/3}$ , dirigés par  $(1, -1)$  et  $(1, 1)$ .**

## Corrigé de l'exercice 6 : Comparaison des normes 1, 2 et infini

1. Soit  $i_0$  tel que  $|x_{i_0}| = |x|_\infty$ . Alors  $|x|_\infty^2 = x_{i_0}^2 \leq \sum_i x_i^2 = |x|_2^2$ . Ensuite, en développant,  $|x|_1^2 = \sum_i x_i^2 + \sum_{i \neq j} |x_i||x_j| \geq |x|_2^2$ . On prend les racines. **On a  $|x|_\infty \leq |x|_2 \leq |x|_1$ .**

2. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs  $(1, \dots, 1)$  et  $(|x_1|, \dots, |x_n|)$  :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n 1 \cdot |x_i| \leq \sqrt{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n} \|x\|_2.$$

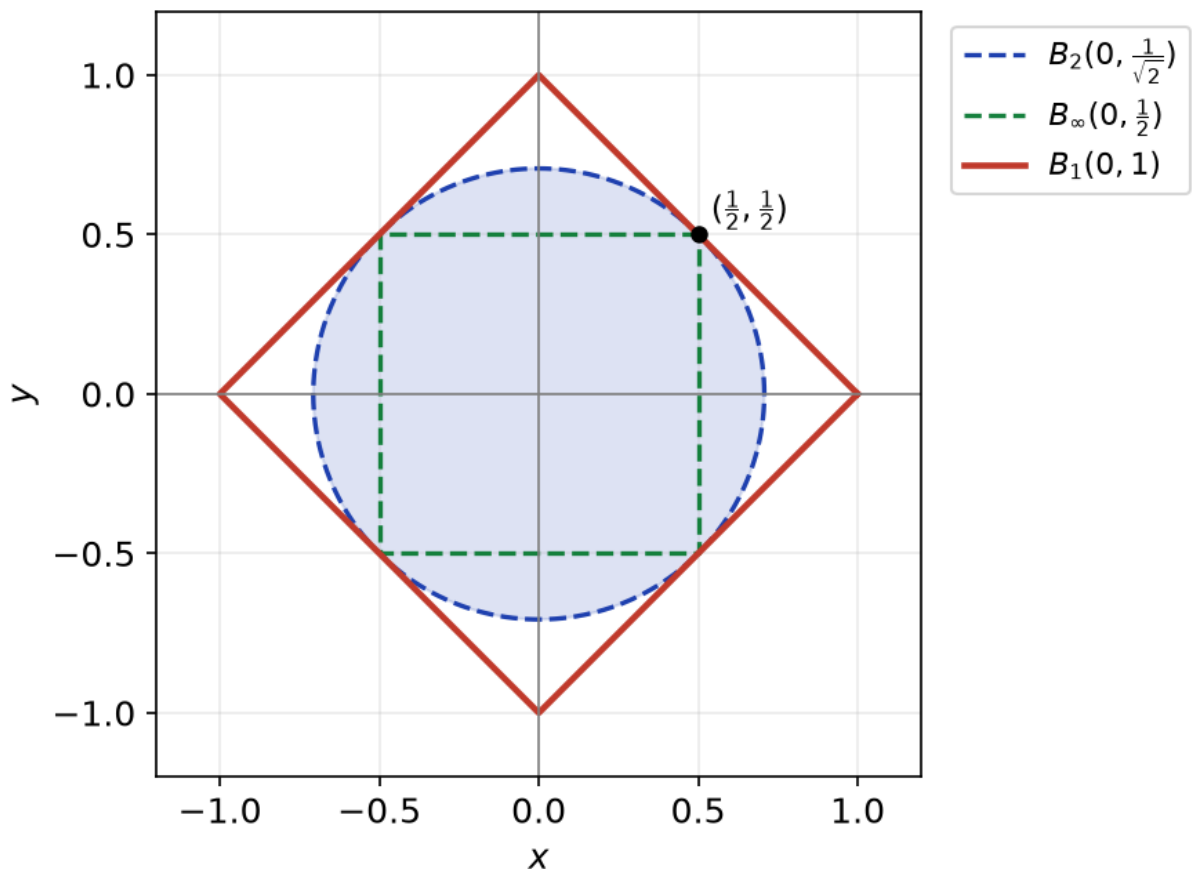
Par ailleurs, chaque  $x_i^2$  est majoré par  $\|x\|_\infty^2$ , donc  $\|x\|_2^2 \leq n \|x\|_\infty^2$ . **On a**  $\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$  **et**  $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$ .

3. On enchaîne les deux inégalités précédentes :  $\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \|x\|_\infty$ . **Donc**  $\|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$ .

4. Pour  $x = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ , les trois normes valent 1 : la constante 1 des deux premières inégalités ne peut pas être diminuée. Pour  $x = (1, \dots, 1)$ , on a  $\|x\|_1 = n$ ,  $\|x\|_2 = \sqrt{n}$  et  $\|x\|_\infty = 1$ . Ainsi,  $\|x\|_1 = \sqrt{n} \|x\|_2$ ,  $\|x\|_2 = \sqrt{n} \|x\|_\infty$  et  $\|x\|_1 = n \|x\|_\infty$ . **Toutes les constantes sont optimales.**

## **Corrigé de l'exercice 7 : Boules des trois normes dans le plan**

1. La boule  $B_1(0, 1)$  est le losange de sommets  $(\pm 1, 0)$ ,  $(0, \pm 1)$ . Ensuite,  $B_2(0, 1)$  est le disque unité. Enfin,  $B_\infty(0, 1)$  est le carré  $[-1, 1]^2$ . **Le losange est inscrit dans le disque, lui-même inscrit dans le carré.**
2. Soit  $v \in B_1(0, 1)$ . D'après l'exercice 6,  $\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq 1$ , donc  $v \in B_2(0, 1)$ . De même, si  $v \in B_2(0, 1)$ , alors  $\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq 1$ . **On a bien**  $B_1(0, 1) \subset B_2(0, 1) \subset B_\infty(0, 1)$ .
3. Si  $\|v\|_\infty \leq r$ , alors  $\|v\|_1 \leq 2\|v\|_\infty \leq 2r$ . Donc  $r = \frac{1}{2}$  convient. Réciproquement, si  $r > \frac{1}{2}$ , le point  $(r, r)$  est dans  $B_\infty(0, r)$  mais  $\|(r, r)\|_1 = 2r > 1$ . **Le plus grand rayon est**  $r = \frac{1}{2}$ .
4. Si  $\|w\|_2 \leq r$ , alors  $\|w\|_1 \leq \sqrt{2} \|w\|_2 \leq \sqrt{2} r$ . Donc  $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$  convient. Réciproquement, si  $r > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , le point  $w = (\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}})$  vérifie  $\|w\|_2 = r$  et  $\|w\|_1 = \sqrt{2} r > 1$ . **Le plus grand rayon est**  $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . La figure ci-dessous montre que les deux boules optimales touchent le losange au point  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .



## Corrigé de l'exercice 8 : Parties bornées du plan et de l'espace

- On a  $2(x^2 + xy + y^2) - (x^2 + y^2) = (x + y)^2 \geq 0$ . Donc, sur  $A$ ,  
 $x^2 + y^2 \leq 2 \times 3 = 6$ .  $A$  est bornée : elle est contenue dans  $B_2(0, \sqrt{6})$ .
- Pour  $k \geq 1$ , le point  $(k, \frac{1}{k})$  est dans  $B$  et sa norme infinie vaut  $k$ .  $B$  n'est pas bornée.
- Sur  $C$ , on a  $x^4 \leq 1$  et  $y^4 \leq 1$ , donc  $|x| \leq 1$  et  $|y| \leq 1$ .  $C$  est bornée, incluse dans  $B_\infty(0, 1)$ .
- Pour tout  $k$ , le point  $(k, k)$  est dans  $D$ , de norme infinie  $k$ .  $D$  n'est pas bornée.
- Sur  $E$ , on a  $0 \leq x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ . Donc  $0 \leq z \leq 1$ , puis  $|x| \leq 1$  et  $|y| \leq 1$ .  $E$  est bornée, incluse dans  $B_\infty(0, 1)$ .
- Si  $A \subset B_N(0, M)$  et  $N' \leq \beta N$ , alors  $A \subset B_{N'}(0, \beta M)$ . Or toutes les normes de

$\mathbb{R}^n$  sont équivalentes. **Le caractère borné ne dépend donc pas de la norme.**

## Corrigé de l'exercice 9 : Limites de suites de $\mathbb{R}^3$

---

- On étudie les coordonnées, ce qui est légitime en dimension finie. D'abord,  
 $(1 + \frac{1}{k})^k = \exp(k \ln(1 + \frac{1}{k}))$ . Or  $k \ln(1 + \frac{1}{k}) \rightarrow 1$ , car  $\ln(1 + h) \sim h$  en  $0$ . Par continuité de l'exponentielle, cette coordonnée tend vers  $e$ . Ensuite,  $k \sin \frac{1}{k} = \frac{\sin h}{h}$  avec  $h = \frac{1}{k} \rightarrow 0$ , donc elle tend vers  $1$ . Enfin,  $\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \rightarrow 0$ . **La suite  $(u_k)$  converge vers  $\ell = (e, 1, 0)$ .**
- La première coordonnée prend les valeurs  $0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$ . Elle n'a donc pas de limite, car ses termes d'indice multiple de  $4$  valent  $1$  et ceux d'indice  $4k + 2$  valent  $-1$ . **La suite  $(v_k)$  diverge.**
- On a  $\frac{2k+1}{k+3} = \frac{2+1/k}{1+3/k} \rightarrow 2$ . Par croissances comparées,  $k^5 e^{-k} \rightarrow 0$ . Enfin,  $\ln(1 + \frac{1}{k}) \rightarrow \ln 1 = 0$ . **La suite  $(w_k)$  converge vers  $(2, 0, 0)$ .**
- On a  $|u_k - \ell|_\infty = \max(|(1 + \frac{1}{k})^k - e|, |k \sin \frac{1}{k} - 1|, |\frac{1}{\sqrt{k}}|)$ . C'est le maximum de trois suites qui tendent vers  $0$ , donc il tend vers  $0$ . De plus,  $|u_k - \ell|_1 \leq 3|u_k - \ell|_\infty$ . **On a aussi  $|u_k - \ell|_1 \rightarrow 0$ , conformément à l'équivalence des normes.**

## Corrigé de l'exercice 10 : Une suite récurrente dans le plan

---

- On calcule  $x_1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$  et  $y_1 = 1 - 1 = 0$ . Puis  $x_2 = \frac{3}{4}$  et  $y_2 = \frac{3}{8}$ . Ainsi  $u_1 = (\frac{3}{2}, 0)$  et  $u_2 = (\frac{3}{4}, \frac{3}{8})$ .
- Par l'inégalité triangulaire,  $|x_{k+1}| \leq \frac{1}{2}|x_k| + \frac{1}{4}|y_k| \leq \frac{3}{4}|u_k|_\infty$ . De même pour  $|y_{k+1}|$ . Donc  $|u_{k+1}|_\infty \leq \frac{3}{4}|u_k|_\infty$ . Par récurrence,  $|u_k|_\infty \leq 4(\frac{3}{4})^k$ , qui tend vers  $0$ . Enfin,

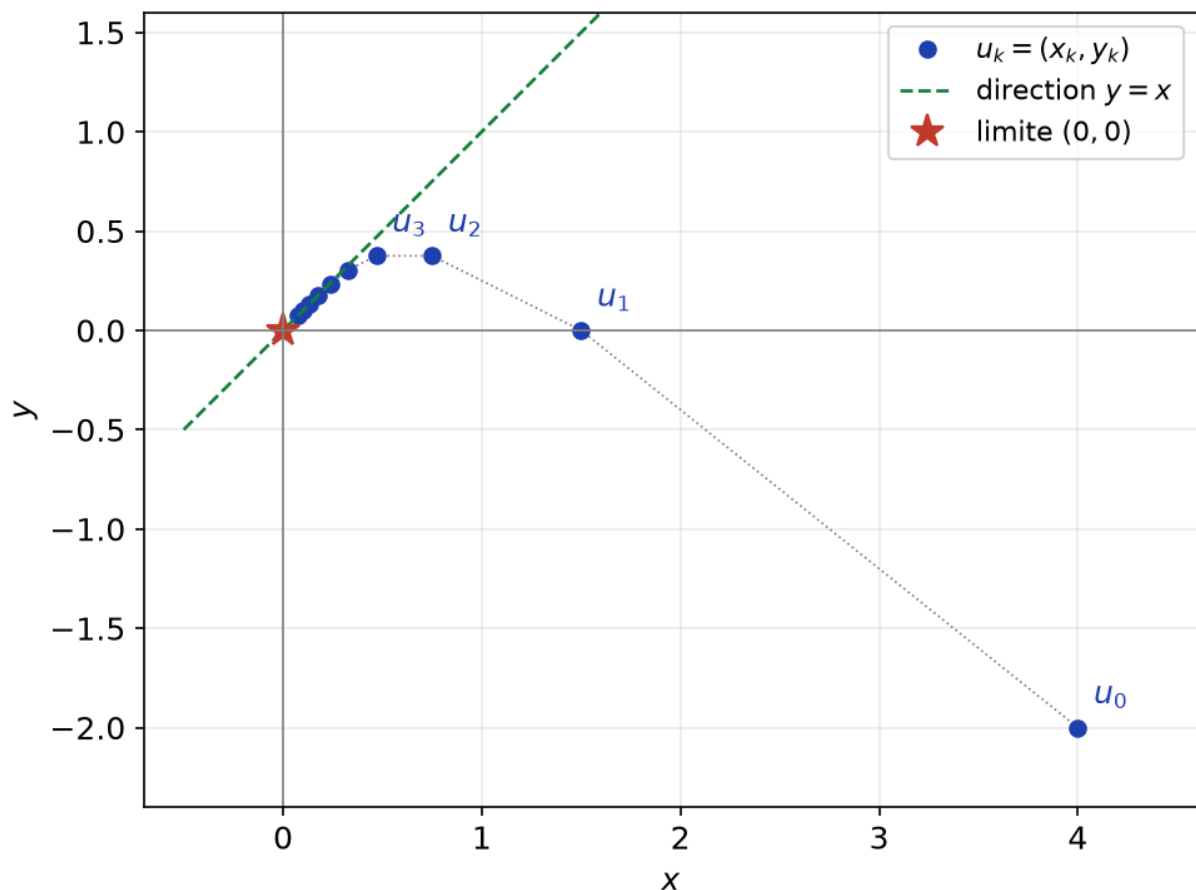
$|u_k|_2 \leq \sqrt{2} |u_k|_\infty$ . **La suite converge vers**  $(0, 0)$ , et  $|u_k|_2 \leq 4\sqrt{2} \left(\frac{3}{4}\right)^k$ .

3. En ajoutant puis en soustrayant les deux relations, on obtient  $s_{k+1} = \frac{3}{4}s_k$  et  $d_{k+1} = \frac{1}{4}d_k$ .  
Comme  $s_0 = 2$  et  $d_0 = 6$ , on a  $s_k = 2\left(\frac{3}{4}\right)^k$  et  $d_k = 6\left(\frac{1}{4}\right)^k$ . On revient à  
 $x_k = \frac{s_k + d_k}{2}$  et  $y_k = \frac{s_k - d_k}{2}$  :

$$x_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k + 3\left(\frac{1}{4}\right)^k, \quad y_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k - 3\left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

Pour  $k = 1$ , on retrouve  $x_1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$  et  $y_1 = 0$ . **Ce sont les formules explicites cherchées.**

4. On factorise :  $u_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k w_k$  avec  $w_k = (1 + 3^{1-k}, 1 - 3^{1-k})$ . Comme  $x_k > 0$ ,  $u_k$  n'est jamais nul, et  $\frac{|u_k|_2}{|u_k|_2} = \frac{|w_k|_2}{|w_k|_2}$ . Or  $w_k \rightarrow (1, 1)$ , et la norme est continue, donc  
 $|w_k|_2 \rightarrow \sqrt{2}$ . **La suite**  $\frac{u_k}{|u_k|_2}$  **converge vers**  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . Autrement dit, la suite arrive en 0 tangentiellement à la droite  $y = x$  : la composante selon  $(1, -1)$  décroît quatre fois plus vite par étape. La figure suivante le confirme.



## Corrigé de l'exercice 11 : Normes non équivalentes en dimension infinie

- Un polynôme est déterminé par la suite de ses coefficients, presque tous nuls. Ainsi,  $N_1$  et  $N_\infty$  sont les normes 1 et infinie de cette suite finie. La séparation, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire se vérifient coefficient par coefficient, comme dans  $\mathbb{R}^n$ . **Ce sont des normes sur  $\mathbb{R}[X]$ .**
- Pour tout indice  $j$ , on a  $|a_j| \leq \sum_k |a_k|$ . On passe au maximum. **Donc**  

$$N_\infty(P) \leq N_1(P).$$
- Tous les coefficients de  $P_m$  valent 1, et il y en a  $m+1$ . Donc  $N_1(P_m) = m+1$  et  $N_\infty(P_m) = 1$ . Si l'on avait  $N_1 \leq C N_\infty$ , on aurait  $m+1 \leq C$  pour tout  $m$ , ce qui est absurde. **Les normes  $N_1$  et  $N_\infty$  ne sont pas équivalentes.**

4. Le polynôme  $Q_m$  a  $m$  coefficients égaux à  $\frac{1}{m}$ . Donc  $N_\infty(Q_m) = \frac{1}{m} \rightarrow 0$ , alors que  $N_1(Q_m) = 1$  pour tout  $m$ . **La suite  $(Q_m)$  tend vers 0 pour  $N_\infty$ , mais pas pour  $N_1$  : en dimension infinie, la convergence dépend de la norme.**

## Corrigé de l'exercice 12 : Ouverts et fermés du plan

---

- Soit  $(x, y) \in A$  et  $r = \min(2 - |(x, y)|_2, y) > 0$ . Soit  $(x', y') \in B_2((x, y), r)$ . D'une part,  $|(x', y')|_2 \leq |(x, y)|_2 + |(x' - x, y' - y)|_2 < |(x, y)|_2 + r \leq 2$ . D'autre part,  $y' \geq y - |y' - y| > y - r \geq 0$ . **La boule  $B_2((x, y), r)$  est incluse dans  $A$ , donc  $A$  est ouverte.**
- Soit  $(x_k, y_k)$  une suite de  $B$  qui converge vers  $(a, b)$ . Alors  $x_k \rightarrow a$  et  $y_k \rightarrow b$ . En passant à la limite dans l'inégalité large  $y_k \geq x_k^2$ , on obtient  $b \geq a^2$ . **Donc  $(a, b) \in B$ , et  $B$  est fermée.**
- Le point  $(1, 0)$  est dans  $C$ . Pourtant, pour tout  $r > 0$ , le point  $(1 + \frac{r}{2}, 0)$  est dans  $B_2((1, 0), r)$  mais pas dans  $C$  :  $C$  n'est pas ouverte. Par ailleurs, la suite  $(\frac{1}{k}, 0)$  est dans  $C$  et converge vers  $(0, 0) \notin C$  :  $C$  n'est pas fermée.  **$C$  n'est ni ouverte ni fermée.**
- Soit  $(p_k, q_k)$  une suite de  $\mathbb{Z}^2$  qui converge vers  $(a, b)$ . Il existe  $K$  tel que  $|p_k - a| < \frac{1}{2}$  pour  $k \geq K$ . Alors  $|p_k - p_K| < 1$  pour  $k \geq K$ , et comme ce sont des entiers,  $p_k = p_K$ . Donc  $a = p_K \in \mathbb{Z}$ . De même,  $b \in \mathbb{Z}$ . Ainsi,  $\mathbb{Z}^2$  est fermée. En revanche, pour tout  $r > 0$ , la boule  $B_\infty((0, 0), r)$  contient le point  $(\frac{\min(r, 1)}{2}, 0)$ , qui n'est pas à coordonnées entières.  **$\mathbb{Z}^2$  est fermée mais pas ouverte.**

## Corrigé de l'exercice 13 : Réunions et intersections infinies

---

- Si  $(x_j, y_j) \in F_k$  converge vers  $(a, b)$ , le passage à la limite dans  $\frac{1}{k} \leq x_j \leq 1$  et  $0 \leq y_j \leq 1$  donne  $(a, b) \in F_k$ . Donc  $F_k$  est fermé. Ensuite, si  $0 < x \leq 1$ , il existe  $k$

tel que  $\frac{1}{k} \leq x$ , donc  $(x, y) \in F_k$  pour  $y \in [0, 1]$ . Inversement, aucun  $F_k$  ne contient de point d'abscisse 0. Ainsi,  $\bigcup_k F_k = ]0, 1] \times [0, 1]$ . Or  $(\frac{1}{k}, 0) \rightarrow (0, 0)$ , qui n'est pas dans cette réunion. **La réunion vaut  $]0, 1] \times [0, 1]$  et n'est pas fermée.**

2. Si  $|x|_2 \leq 1$ , alors  $|x|_2 < 1 + \frac{1}{k}$  pour tout  $k$ . Si  $|x|_2 > 1$ , on choisit  $k$  tel que  $\frac{1}{k} < |x|_2 - 1$ , et  $x \notin U_k$ . Donc l'intersection est la boule fermée  $B_f(0, 1)$ . Or le point  $(1, 0)$  en fait partie, alors que  $(1 + \frac{r}{2}, 0)$  n'en fait pas partie pour tout  $r > 0$ .

**L'intersection vaut  $B_f(0, 1)$  et n'est pas ouverte.**

3. Soit  $U_1, U_2$  ouverts et  $a \in U_1 \cap U_2$ . Il existe  $r_1, r_2 > 0$  tels que  $B(a, r_i) \subset U_i$ . Avec  $r = \min(r_1, r_2) > 0$ , on a  $B(a, r) \subset U_1 \cap U_2$ . **L'intersection est ouverte.** Pour une famille infinie, la borne inférieure des rayons peut être nulle, comme à la question 2 avec  $r_k = \frac{1}{k}$  au point  $(1, 0)$ .

## **Corrigé de l'exercice 14 : Boules ouvertes, boules fermées et sphères**

---

- Soit  $x \in B(a, r)$  et  $\rho = r - N(x - a) > 0$ . Pour  $y \in B(x, \rho)$ , on a  $N(y - a) \leq N(y - x) + N(x - a) < \rho + N(x - a) = r$ . **Donc  $B(x, \rho) \subset B(a, r)$ , et la boule ouverte est un ouvert.**
- Soit  $(u_k)$  une suite de  $B_f(a, r)$  qui converge vers  $\ell$ . L'inégalité triangulaire renversée donne  $|N(u_k - a) - N(\ell - a)| \leq N(u_k - \ell) \rightarrow 0$ . Donc  $N(\ell - a) = \lim N(u_k - a) \leq r$ . **Ainsi  $\ell \in B_f(a, r)$ , et la boule fermée est un fermé.**
- Le même argument montre que  $N(\ell - a) = r$  si  $N(u_k - a) = r$  pour tout  $k$ . Autrement, on peut écrire  $S(a, r) = B_f(a, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(a, r))$ , intersection de deux fermés. **La sphère est un fermé.**
- Une suite de  $\{a\}$  est constante égale à  $a$ , donc sa limite est  $a$ . Ainsi,  $\{a\}$  est fermé. Une partie finie est une réunion finie de singletons, donc de fermés. **Toute partie finie de  $\mathbb{R}^n$  est fermée.**

## Corrigé de l'exercice 15 : Intérieur, adhérence et frontière de parties du plan

---

1. L'ouvert  $]0, 1[^2$  est inclus dans  $A$ , donc dans  $\text{Int}(A)$ . Les autres points de  $A$  vérifient  $x = 0$  ou  $y = 1$ . Toute boule centrée en  $(0, y)$  contient un point d'abscisse négative, et toute boule centrée en  $(x, 1)$  contient un point d'ordonnée supérieure à 1. Ces points ne sont donc pas intérieurs. Ensuite, le fermé  $[0, 1]^2$  contient  $A$ , donc  $\overline{A} \subset [0, 1]^2$ .  
Réciproquement, pour  $(x, y) \in [0, 1]^2$ , la suite  $\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right)x, y + \frac{1-y}{k}\right)_{k \geq 2}$  est dans  $A$  et converge vers  $(x, y)$ .  $\text{Int}(A) = ]0, 1[^2$ ,  $\overline{A} = [0, 1]^2$  et  $\text{Fr}(A)$  est le bord du carré  $[0, 1]^2$ .
2. L'ensemble  $U = \{0 < x^2 + y^2 < 1\}$  est l'intersection de la boule ouverte  $B_2(0, 1)$  et du complémentaire du fermé  $\{0\}$ . C'est un ouvert inclus dans  $B$ . Un point  $v$  du cercle unité n'est pas intérieur, car  $(1+t)v \notin B$  pour tout  $t > 0$ . Donc  $\text{Int}(B) = U$ . Ensuite, le disque fermé contient  $B$  et il est fermé. Il reste à atteindre l'origine :  $(\frac{1}{k}, 0) \in B$  tend vers  $(0, 0)$ .  $\text{Int}(B) = \{0 < x^2 + y^2 < 1\}$ ,  $\overline{B} = B_{2,f}(0, 1)$ , et  $\text{Fr}(B)$  est le cercle unité réuni avec  $\{(0, 0)\}$ .
3. Toute boule  $B_\infty((a, b), r)$  contient le point  $(a', b)$  où  $a'$  est un irrationnel de  $]a-r, a+r[$ . Donc  $\text{Int}(C) = \emptyset$ . Par ailleurs, tout réel est limite d'une suite de rationnels, donc tout  $(a, b)$  est limite d'une suite de  $\mathbb{Q}^2$ .  $\text{Int}(C) = \emptyset$ ,  $\overline{C} = \mathbb{R}^2$  et  $\text{Fr}(C) = \mathbb{R}^2$ .
4. Toute boule centrée en  $(\frac{1}{k}, 0)$  contient des points d'ordonnée non nulle, donc  $\text{Int}(D) = \emptyset$ . Ensuite,  $(\frac{1}{k}, 0) \rightarrow (0, 0)$ , donc  $(0, 0) \in \overline{D}$ . Montrons que  $D \cup \{(0, 0)\}$  est fermé. L'ensemble  $T = \{\frac{1}{k} \mid k \geq 1\} \cup \{0\}$  est fermé dans  $\mathbb{R}$ , car son complémentaire est la réunion des ouverts  $] -\infty, 0[$ ,  $]1, +\infty[$  et  $] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}[$ . Si une suite de  $D \cup \{(0, 0)\}$  converge vers  $(a, b)$ , alors  $b = 0$  et  $a \in T$ .  $\text{Int}(D) = \emptyset$  et  $\overline{D} = \text{Fr}(D) = D \cup \{(0, 0)\}$ .

## Corrigé de l'exercice 16 : Adhérence et intérieur d'une boule

---

1. La boule fermée est un fermé qui contient  $B(a, r)$ , donc  $\overline{B(a, r)} \subset B_f(a, r)$ .  
Réciproquement, soit  $x$  tel que  $N(x - a) = r$ . On pose  $x_k = a + (1 - \frac{1}{k})(x - a)$ . Alors  $N(x_k - a) = (1 - \frac{1}{k})r < r$ , donc  $x_k \in B(a, r)$ . De plus,  $N(x_k - x) = \frac{r}{k} \rightarrow 0$ .  
**Ainsi  $x \in \overline{B(a, r)}$ , et  $\overline{B(a, r)} = B_f(a, r)$ .**
2. La boule ouverte est un ouvert inclus dans  $B_f(a, r)$ , donc elle est incluse dans son intérieur.  
Réciproquement, soit  $x$  tel que  $N(x - a) = r$  et  $\rho > 0$ . Le point  $y = x + t(x - a)$ , avec  $0 < t < \frac{\rho}{r}$ , vérifie  $N(y - x) = tr < \rho$  et  $N(y - a) = (1 + t)r > r$ . Toute boule centrée en  $x$  sort donc de  $B_f(a, r)$ . **L'intérieur de  $B_f(a, r)$  est  $B(a, r)$ .**
3. La frontière de  $B(a, r)$  vaut  $B_f(a, r) \setminus B(a, r)$ , et celle de  $B_f(a, r)$  vaut la même différence. **Les deux frontières sont égales à la sphère  $S(a, r)$ .**

**Point de méthode :** ces calculs utilisent les segments issus du centre, donc la structure d'espace vectoriel. Pour une distance quelconque, sans norme, l'adhérence de la boule ouverte peut être plus petite que la boule fermée.

## Corrigé de l'exercice 17 : Propriétés de la frontière

---

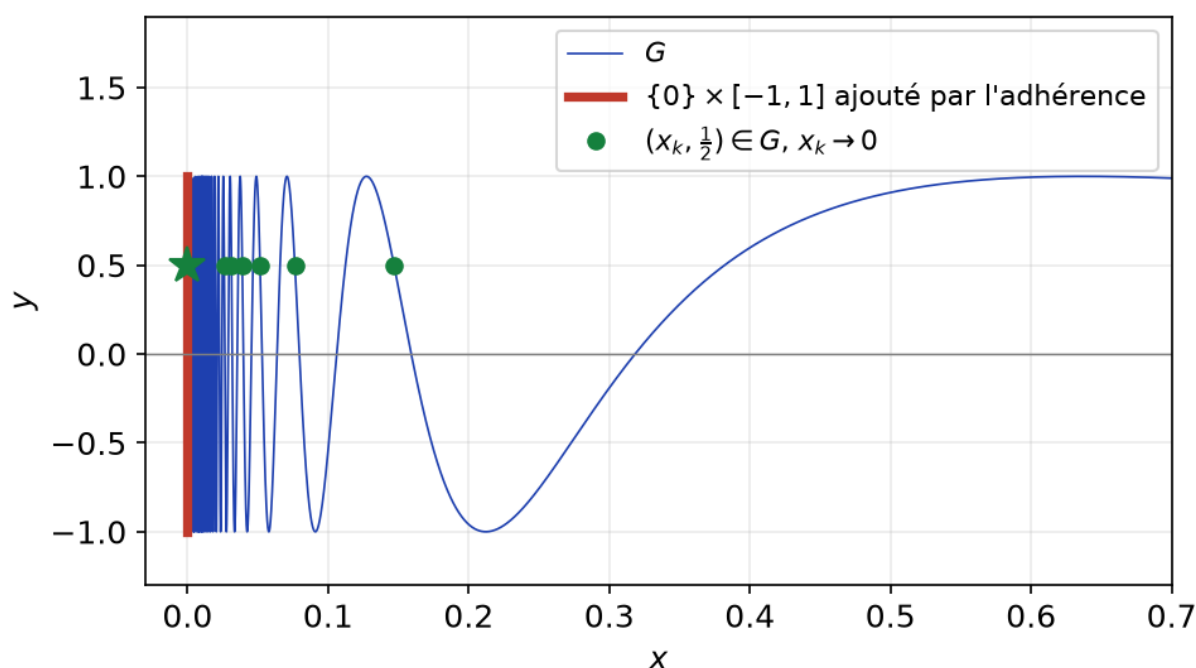
1. Par définition,  $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \text{Int}(A) = \overline{A} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(A))$ . Or, d'après le résultat admis,  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(A) = \overline{A^c}$ . Donc  $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ . C'est une intersection de deux fermés, donc un fermé. Enfin, cette expression est symétrique en  $A$  et  $A^c$ , car  $(A^c)^c = A$ . **La frontière est fermée et  $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(A^c)$ .**
2. Si  $A$  est ouverte, alors  $\text{Int}(A) = A$ , donc  $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus A$  ne rencontre pas  $A$ . Réciproquement, supposons  $A \cap \text{Fr}(A) = \emptyset$ . Tout  $a \in A$  est dans  $\overline{A}$  sans être dans  $\text{Fr}(A)$ , donc  $a \in \text{Int}(A)$ . Ainsi  $A \subset \text{Int}(A)$ , et  $A$  est ouverte.  
 **$A$  est ouverte si et seulement si  $A \cap \text{Fr}(A) = \emptyset$ .**
3. La partie  $A$  est fermée si et seulement si  $A^c$  est ouverte. D'après la question 2, cela équivaut à  $A^c \cap \text{Fr}(A^c) = \emptyset$ . Comme  $\text{Fr}(A^c) = \text{Fr}(A)$ , cela équivaut à  $\text{Fr}(A) \subset A$ .  **$A$  est fermée si et seulement si elle contient sa frontière.**
4. D'après la question 1,  $a \in \text{Fr}(A)$  équivaut à  $a \in \overline{A}$  et  $a \in \overline{A^c}$ . La caractérisation séquentielle de l'adhérence, appliquée à  $A$  puis à  $A^c$ , conclut. **Un point frontière est limite**

à la fois d'une suite de  $A$  et d'une suite du complémentaire.

## Corrigé de l'exercice 18 : Graphe d'une fonction et caractérisation séquentielle

---

1. Soit  $(x_k, f(x_k))$  une suite de  $\Gamma_f$  qui converge vers  $(a, b)$ . Alors  $x_k \rightarrow a$  et  $f(x_k) \rightarrow b$ . Par continuité de  $f$  en  $a$ , on a aussi  $f(x_k) \rightarrow f(a)$ . Par unicité de la limite,  $b = f(a)$ . **Donc  $(a, b) \in \Gamma_f$  : le graphe est fermé.**
2. Soit  $(x_k, \frac{1}{x_k})$  une suite de  $H$  qui converge vers  $(a, b)$ . En passant à la limite dans  $x_k \cdot \frac{1}{x_k} = 1$ , on obtient  $ab = 1$ . Donc  $a \neq 0$ . Comme  $x_k > 0$ , on a  $a \geq 0$ , donc  $a > 0$  et  $b = \frac{1}{a}$ . **Ainsi  $(a, b) \in H$ , et  $H$  est fermée.** La fonction explose en  $0$ , ce qui empêche le graphe d'accumuler des points sur l'axe vertical.
3. On pose  $\theta = \arcsin c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $x_k = \frac{1}{\theta + 2k\pi}$  pour  $k \geq 1$ . Comme  $\theta + 2k\pi \geq 2\pi - \frac{\pi}{2} > 0$ , on a  $x_k > 0$ , et  $x_k \rightarrow 0$ . De plus,  $\sin \frac{1}{x_k} = \sin(\theta + 2k\pi) = c$ . La suite  $(x_k, c)$  est donc dans  $G$  et converge vers  $(0, c)$ . Or ce point n'est pas dans  $G$ , dont les points ont une abscisse strictement positive.  **$G$  n'est pas fermée.**
4. La question 3 donne  $G \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \subset \overline{G}$ . Réciproquement, soit  $(a, b) \in \overline{G}$ , limite d'une suite  $(x_k, \sin \frac{1}{x_k})$  avec  $x_k > 0$ . Alors  $a \geq 0$ . Si  $a > 0$ , la continuité de  $x \rightarrow \sin \frac{1}{x}$  en  $a$  donne  $b = \sin \frac{1}{a}$ , donc  $(a, b) \in G$ . Si  $a = 0$ , le passage à la limite dans  $-1 \leq \sin \frac{1}{x_k} \leq 1$  donne  $b \in [-1, 1]$ . **On conclut que  $\overline{G} = G \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ .**  
La figure ci-dessous illustre la construction pour  $c = \frac{1}{2}$ .



## Corrigé de l'exercice 19 : Parties compactes du plan

On utilise le théorème du cours : dans  $\mathbb{R}^2$ , une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

1. Sur  $A$ ,  $x^2 + y^2 \leq x^2 + 2y^2 \leq 4$ , donc  $A$  est bornée. Si  $(x_k, y_k) \in A$  converge vers  $(a, b)$ , le passage à la limite donne  $a^2 + 2b^2 \leq 4$  :  $A$  est fermée.  **$A$  est compacte.**
2. L'argument de l'exercice 18 montre que  $B$  est fermée : une limite  $(a, b)$  vérifie  $ab = 1$ . Cependant,  $B$  n'est pas bornée, car  $(k, \frac{1}{k}) \in B$ .  **$B$  n'est pas compacte.**
3. Si  $(x_k, y_k) \in C$  converge vers  $(a, b)$ , alors  $a^2 + b^4 = 1$ , donc  $C$  est fermée. De plus,  $x^2 \leq 1$  et  $y^4 \leq 1$  donnent  $\|(x, y)\|_\infty \leq 1$ .  **$C$  est compacte.**
4. La partie  $D$  est incluse dans  $[0, 1]^2$ , donc bornée. Ses points sont les  $(t, t)$  avec  $t \in T = \{\frac{1}{k} \mid k \geq 1\} \cup \{0\}$ , fermé de  $\mathbb{R}$  (exercice 15). Une limite de points de  $D$  s'écrit donc  $(a, a)$  avec  $a \in T$  :  $D$  est fermée, donc compacte. En revanche,  $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \in D'$  converge vers  $(0, 0) \notin D'$ . Toutes ses suites extraites convergent vers ce point extérieur à

$D'$  .  $D$  est compacte,  $D'$  ne l'est pas.

5. La suite  $(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{k})$  est dans  $E$  et converge vers  $(\frac{1}{2}, 1) \notin E$  . Donc  $E$  n'est pas fermée.  
 $E$  n'est pas compacte.

## Corrigé de l'exercice 20 : Suites extraites et Bolzano-Weierstrass

---

- On trouve  $u_0 = (1, 1)$ ,  $u_1 = (-1, \frac{1}{2})$ ,  $u_2 = (1, -\frac{1}{2})$ ,  $u_3 = (-1, -1)$ ,  
 $u_4 = (1, -\frac{1}{2})$  et  $u_5 = (-1, \frac{1}{2})$ . De plus,  $(-1)^{k+6} = (-1)^k$  et  
 $\cos \frac{(k+6)\pi}{3} = \cos(\frac{k\pi}{3} + 2\pi) = \cos \frac{k\pi}{3}$  . **La suite est 6-périodique.**
- Soit  $(u_{\varphi(k)})$  une suite extraite qui converge vers  $L$  . L'un des six restes modulo 6, noté  $r$ , est atteint par une infinité d'indices  $\varphi(k)$  . Le long de ces indices, la suite est constante égale à  $u_r$  . Cette nouvelle extraction converge vers  $L$ , donc  $L = u_r$  . Réciproquement,  $(u_{6k+r})_k$  est constante égale à  $u_r$ , donc converge vers  $u_r$  . **Les limites possibles sont  $(1, 1)$ ,  $(-1, \frac{1}{2})$ ,  $(1, -\frac{1}{2})$  et  $(-1, -1)$ .**
- Les extractions  $(u_{6k})$  et  $(u_{6k+3})$  ont des limites différentes,  $(1, 1)$  et  $(-1, -1)$ . Or toute extraction d'une suite convergente converge vers la même limite. **La suite  $(u_k)$  diverge.**
- Pour tout  $k$ ,  $|v_k|_2 = 1$  : la suite est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une extraction convergente, de limite  $L$  . Chaque terme appartient au cercle unité, qui est un fermé (c'est une sphère). Par la caractérisation séquentielle des fermés,  $L$  appartient au cercle.  **$(v_k)$  admet une extraction convergente dont la limite est sur le cercle unité.**

## Corrigé de l'exercice 21 : Distance à une partie fermée

---

- Pour tout  $a \in A$ , on a  $d(x, A) \leq |x - a|_2 \leq |x - y|_2 + |y - a|_2$ . En passant à la borne inférieure en  $a$ ,  $d(x, A) \leq |x - y|_2 + d(y, A)$ . En échangeant  $x$  et  $y$ , on obtient l'autre

inégalité. **Donc**  $|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|_2$ .

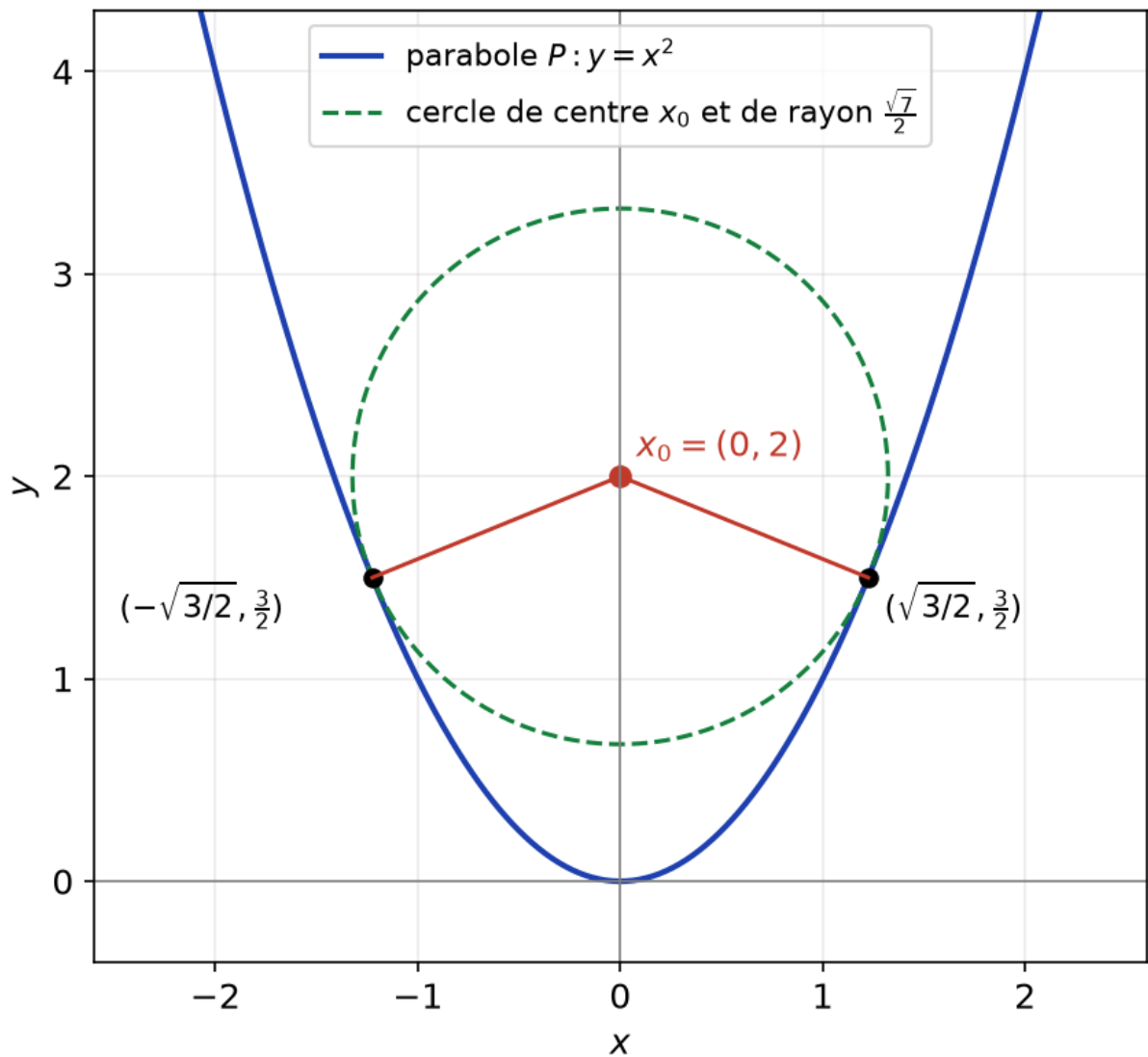
2. Par définition de la borne inférieure,  $d(x, A) = 0$  signifie que, pour tout  $r > 0$ , il existe  $a \in A$  avec  $|x - a|_2 < r$ . Autrement dit, toute boule  $B(x, r)$  rencontre  $A$ . **C'est exactement la définition de**  $x \in \overline{A}$ .

3. Soit  $\delta = d(x, A)$ . Pour tout  $k \geq 1$ , on choisit  $a_k \in A$  tel que  $|x - a_k|_2 < \delta + \frac{1}{k}$ . La suite  $(a_k)$  est bornée, car  $|a_k|_2 \leq |x|_2 + \delta + 1$ . Par Bolzano-Weierstrass, une extraction  $(a_{\varphi(k)})$  converge vers un point  $a_0$ , qui appartient à  $A$  car  $A$  est fermée. Par continuité de la norme,  $|x - a_0|_2 = \lim |x - a_{\varphi(k)}|_2 \leq \delta$ . Comme  $|x - a_0|_2 \geq \delta$  par définition, **on a**  $d(x, A) = |x - a_0|_2$  **avec**  $a_0 \in A$ .

4. La partie  $P$  est le graphe de la fonction continue  $t \rightarrow t^2$ , donc elle est fermée (exercice 18). Ensuite, pour  $t \in \mathbb{R}$  :

$$|x_0 - (t, t^2)|_2^2 = t^2 + (t^2 - 2)^2 = t^4 - 3t^2 + 4 = \left(t^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}.$$

Le minimum  $\frac{7}{4}$  est atteint exactement quand  $t^2 = \frac{3}{2}$ . **Donc**  $d(x_0, P) = \frac{\sqrt{7}}{2}$ , **atteinte aux deux points**  $(\pm\sqrt{3/2}, \frac{3}{2})$ . La figure ci-dessous montre le cercle de centre  $x_0$  et de rayon  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ , tangent à la parabole en ces deux points.



5. Pour  $a \in \mathcal{A}$ , on a  $\|x - a\|_2 \geq \|x\|_2 - \|a\|_2 > 2 - 1 = 1$ . Donc  $d(x, \mathcal{A}) \geq 1$ . De plus,  $a_k = (1 - \frac{1}{k}, 0) \in \mathcal{A}$  vérifie  $\|x - a_k\|_2 = 1 + \frac{1}{k} \rightarrow 1$ . Ainsi,  $d(x, \mathcal{A}) = 1$ . Cependant, l'inégalité stricte montre qu'aucun point de  $\mathcal{A}$  n'est à distance exactement 1. **On a  $d(x, \mathcal{A}) = 1$ , et cette distance n'est pas atteinte** : l'hypothèse «  $\mathcal{A}$  fermée » de la question 3 est donc indispensable.

## Corrigé de l'exercice 22 : Problème : équivalence des normes en dimension finie

1. On écrit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . Par l'inégalité triangulaire et l'homogénéité,

$$N(x) \leq \sum_i |x_i| N(e_i) \leq \beta \sum_i |x_i|. \text{ Donc } N(x) \leq \beta |x|_1.$$

2. L'inégalité triangulaire renversée puis la question 1 donnent

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq \beta |x - y|_1. \text{ Si } |u_k - x|_1 \rightarrow 0, \text{ alors}$$

$$|N(u_k) - N(x)| \leq \beta |u_k - x|_1 \rightarrow 0. \text{ Donc } N(u_k) \rightarrow N(x) : N \text{ est continue}$$

pour  $\|\cdot\|_1$ .

3. La partie  $S$  est la sphère unité de  $\|\cdot\|_1$ . Elle est bornée par définition. Elle est fermée, car si  $|u_k|_1 = 1$  et  $u_k \rightarrow \ell$ , alors  $|\ell|_1 = \lim |u_k|_1 = 1$  par l'inégalité triangulaire renversée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass s'applique à  $\|\cdot\|_1$ , car il ne fait intervenir que les coordonnées.  **$S$  est fermée et bornée, donc compacte.**

4. Soit  $(u_k)$  une suite de  $S$  telle que  $N(u_k) \rightarrow \alpha$ , qui existe par définition de la borne inférieure. Par compacité, une extraction  $(u_{\varphi(k)})$  converge vers  $x_0 \in S$ . Par la question 2,  $N(u_{\varphi(k)}) \rightarrow N(x_0)$ , donc  $N(x_0) = \alpha$  : la borne est atteinte. Or  $|x_0|_1 = 1$ , donc  $x_0 \neq 0$ , et la séparation donne  $N(x_0) > 0$ . **La borne inférieure  $\alpha$  est atteinte et  $\alpha > 0$ .**

5. Pour  $x = 0$ , l'encadrement est trivial. Pour  $x \neq 0$ , le vecteur  $\frac{x}{|x|_1}$  est dans  $S$ , donc  $N(\frac{x}{|x|_1}) \geq \alpha$ , soit  $N(x) \geq \alpha |x|_1$  par homogénéité. Avec la question 1,  $\alpha |x|_1 \leq N(x) \leq \beta |x|_1$ . Ainsi, toute norme est équivalente à  $\|\cdot\|_1$ . Si  $N$  et  $N'$  sont deux normes, on combine les encadrements :  $N' \leq \beta' \|\cdot\|_1 \leq \frac{\beta'}{\alpha} N$ , et de même dans l'autre sens. **Toutes les normes sur  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes.**

6. On a  $N(e_1) = N(1, 0) = 2 + 1 = 3$  et  $N(e_2) = N(0, 1) = 1 + 1 = 2$ , donc  $\beta = 3$ . Pour  $\alpha$ , montrons que  $N(x, y) \geq |x| + |y|$ . Si  $|y| \leq 2|x|$ , alors  $3|x| \geq |x| + |y|$ . Sinon,  $|y| > 2|x|$  et  $|x + 2y| \geq 2|y| - |x| \geq |x| + |y|$ . Dans les deux cas,  $N(x, y) = \max(3|x|, |x + 2y|) \geq |(x, y)|_1$ , donc  $\alpha \geq 1$ . Enfin, le point  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  est dans  $S$  et  $N(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = |0| + |-1| = 1$ . **On obtient  $\beta = 3$  et  $\alpha = 1$ , soit  $|v|_1 \leq N(v) \leq 3|v|_1$ .** On retrouve un sommet du parallélogramme de l'exercice 4, situé sur le losange unité de la norme 1.

**Point de méthode :** la preuve repose sur deux ingrédients propres à la dimension finie, la décomposition sur une base finie et la compacité de la sphère. L'exercice 11 montre que le résultat tombe sans eux.

## **Pour aller plus loin en L2**

---

- Le cours : [topologie de  \$\mathbb{R}^n\$ , cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur topologie de  \$\mathbb{R}^n\$](#)
- Chapitre précédent : [Groupes, sous-groupes et morphismes](#)
- Chapitre suivant : [Plusieurs variables : limites et dérivées partielles](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)