# Théorème spectral

## Exercice 1 : Perturbation de rang un de l'identité

Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, $a \in E$ un vecteur unitaire et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $u(x) = x + \lambda \langle a, x \rangle a$ pour $x \in E$.

1. Montrer que $u$ est un endomorphisme autoadjoint de $E$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $u$.
3. Pour quelles valeurs de $\lambda$ l'endomorphisme $u$ est-il positif ? défini positif ? Reconnaître $u$ lorsque $\lambda = -1$ et lorsque $\lambda = -2$.
4. On prend $E = \mathbb{R}^2$ euclidien canonique, $a = e_1$ et $\lambda = 1$. Écrire la matrice de $u$ dans la base $(e_1, e_1 + e_2)$. Cette matrice est-elle symétrique ? Expliquer pourquoi cela ne contredit pas le cours.

## Exercice 2 : Diagonalisation orthogonale d'une matrice 3 × 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Justifier sans calcul que $A$ est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire $A = I_3 + J$, où $J$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1. En déduire les valeurs propres de $A$ et leurs multiplicités.
3. Déterminer une matrice orthogonale $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que

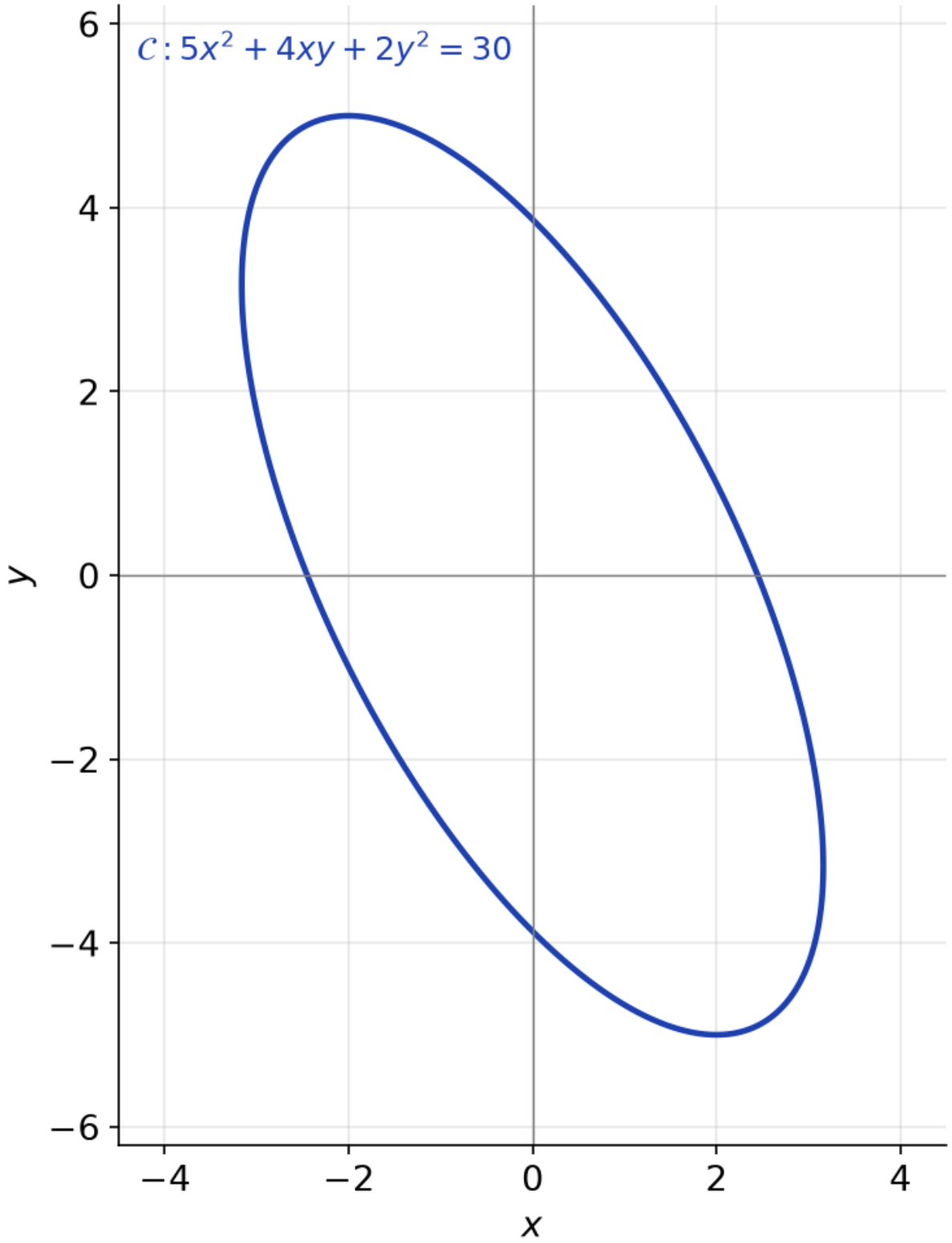
Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$A = P\,D\,P^{T}\,.$$

4. En déduire, pour $k \in \mathbb{N}$, l'expression de $A^k$ en fonction de $I_3$ et $J$.

## Exercice 3 : Réduction d'une conique par le théorème spectral

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 30$, représentée ci-dessous.




1. Écrire la matrice symétrique $A$ telle que $5x^2 + 4xy + 2y^2 = X^T A X$ avec $X = (x, y)$.

2. Diagonaliser $A$ dans une base orthonormée $(u, v)$ directe, avec $u$ associé à la plus grande valeur propre.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

3. Écrire l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, u, v)$. En déduire la nature de $\mathcal{C}$, ses axes et ses demi-axes.

4. Déterminer les points de $\mathcal{C}$ les plus proches et les plus éloignés de l'origine.

## Exercice 4 : Reconnaître un projecteur orthogonal

Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 et $P = I_3 - \frac{1}{3} J$.

1. Calculer $J^2$, puis montrer que $P$ est la matrice, dans la base canonique, d'un projecteur orthogonal $p$ de $\mathbb{R}^3$.

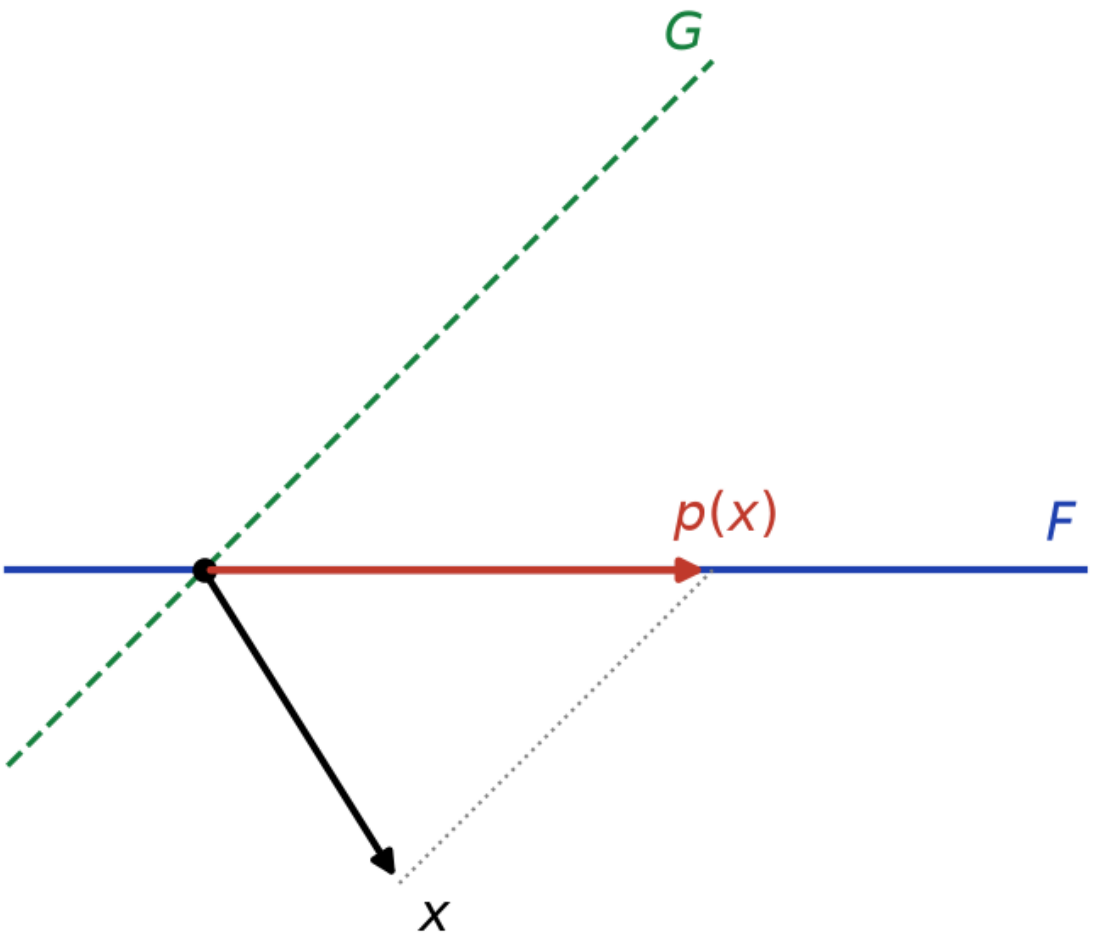
2. Déterminer $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$.

3. En déduire la distance du point $M = (1, 2, 6)$ au plan $\Pi$ d'équation $x + y + z = 0$.

4. Montrer que $Q = \left([\text{\ray?}] 1 \& 1 \\ 0 \& 0 ,\right)$ est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas orthogonal.

## Exercice 5 : Projecteurs qui diminuent la norme

Soit $E$ un espace euclidien et $p$ un projecteur de $E$. La figure ci-dessous montre qu'un projecteur non orthogonal peut augmenter la norme : ici $p$ projette sur $F$ parallèlement à $G$.




$\|p(x)\| = 2{,}6 > \|x\| \approx 1{,}89$

1. On suppose $p$ orthogonal. Montrer que $|p(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in E$.

2. On suppose que $|p(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in E$. Soit $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \in \ker p$. En étudiant $|p(x + t\,y)|^2$ pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\langle x, y \rangle = 0$.

3. Conclure : un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est 1-lipschitzien, si et seulement s'il est autoadjoint.

4. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $p$ le projecteur sur $F = \mathbb{R}\,e_1$ parallèlement à $G = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$. Calculer $p(x)$ pour $x = (1, -1{,}6)$ et comparer $|p(x)|$ à $|x|$.

## Exercice 6 : Une matrice tridiagonale définie positive

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & , & -1 \\ 0 & -1 & \& 2 \end{pmatrix}$.

1. Pour $X = (x_1, x_2, x_3)$, montrer que
   $X^T A X = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2$.
2. En déduire que $A \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$.
3. Calculer les valeurs propres de $A$ et vérifier la cohérence avec la question précédente.

## Exercice 7 : Matrices de Gram

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $G = M^T M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $G \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\ker G = \ker M$, puis que $\operatorname{rg} G = \operatorname{rg} M$.
3. En déduire que $G \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\operatorname{rg} M = p$.
4. Application : $M = \begin{pmatrix} 1 & \\ j & \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $G$, ses valeurs propres, puis la norme subordonnée $\sup_{X \neq 0} \frac{|MX|}{|X|}$.

## Exercice 8 : Matrice de Hilbert

Pour $n \geq 1$, on note $H_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de coefficients $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$.

1. Pour $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, montrer que $X^T H_n X = \displaystyle\int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 \mathrm{d}t$.

2. En déduire que $H_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, puis que $\det H_n > 0$.

3. On note $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ la plus petite et la plus grande valeur propre de $H_n$. Montrer que $\lambda_{\max} \geq 1$ et $\lambda_{\min} \leq \frac{1}{2n-1}$.

## Exercice 9 : Trace et déterminant d'une matrice positive

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr} A \geq 0$ et $\det A \geq 0$, puis que $\operatorname{tr} A = 0$ entraîne $A = 0$.

2. On suppose $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $(\det A)^{1/n} \leq \frac{\operatorname{tr} A}{n}$ et étudier le cas d'égalité.

3. Pour $n = 2$, montrer que $A \in \mathcal{S}_2^{+}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\operatorname{tr} A \geq 0$ et $\det A \geq 0$. Donner un contre-exemple à cette équivalence pour $n = 3$.

## Exercice 10 : Extremums d'une forme quadratique sur la sphère

On note $S$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique et $f(x, y, z) = 2(xy + yz + zx)$.

1. Écrire $f(X) = X^T A X$ avec $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, et exprimer $A$ à l'aide de la matrice $J$ dont tous les coefficients valent 1.

2. Déterminer les valeurs propres de $A$.

3. En déduire le maximum et le minimum de $f$ sur $S$, ainsi que les points où ils sont atteints.

4. Retrouver ce résultat en écrivant $f(x, y, z) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

## Exercice 11 : Quotient de Rayleigh dans le plan

Soit $q(x,y) = 3x^2 + 4xy$ sur $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique.

1. Écrire la matrice symétrique $A$ de $q$ et déterminer ses valeurs propres et des vecteurs propres unitaires.
2. La forme $q$ est-elle positive ? Justifier de deux façons.
3. On pose $\varphi(\theta) = q(\cos\theta, \sin\theta)$. Écrire $\varphi(\theta)$ sous la forme $\alpha + \beta\cos(2\theta - \gamma)$, et retrouver le maximum et le minimum de $q$ sur le cercle unité.
4. En déduire que $|q(x,y)| \leq 4(x^2+y^2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, et préciser les cas d'égalité.

## Exercice 12 : Calcul d'une racine carrée

Soit $A = \left([\text{ray?}] \begin{matrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{matrix},\right)$.

1. Montrer que $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et diagonaliser $A$ en base orthonormée.
2. Calculer $\sqrt{A}$, l'unique matrice symétrique positive dont le carré vaut $A$.
3. Déterminer toutes les matrices symétriques réelles $B$ telles que $B^2 = A$.

## Exercice 13 : Unicité de la racine carrée

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de $A$.

1. Montrer que $A$ et $B$ commutent, puis que chaque sous-espace propre $E_{\lambda_k}(A)$ est stable par $B$.

2. Soit $b_k$ l'endomorphisme induit par $B$ sur $E_{\lambda_k}(A)$. Montrer que $b_k$ est diagonalisable à valeurs propres positives, et que $b_k^2 = \lambda_k \, \mathrm{id}$.

3. En déduire que $b_k = \sqrt{\lambda_k} \, \mathrm{id}$, puis que $B$ est entièrement déterminée par $A$.

4. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sqrt{A} = Q(A)$.

## Exercice 14 : Décomposition polaire

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $M^T M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. On pose $S = \sqrt{M^T M}$ et $O = M S^{-1}$. Montrer que $O$ est orthogonale et que $M = O S$.

3. Montrer l'unicité d'un tel couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

4. Soit $S \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et $N = S^2$. À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton appliqué à $S$, montrer que $S = \dfrac{N + \sqrt{\det N}\ I_2}{\sqrt{\mathrm{tr}\ N + 2\sqrt{\det N}}}$.

5. Calculer la décomposition polaire de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et identifier la matrice $O$.

## Exercice 15 : Produit de deux matrices symétriques positives

Soit $A, B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\sqrt{A}\ B \sqrt{A} \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. En déduire que $\mathrm{tr}(AB) \geq 0$.

2. On suppose de plus $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $AB$ est semblable à $\sqrt{A}\, B \sqrt{A}$. En déduire que $AB$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives.

3. Vérifier sur $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ que $AB$ n'est pas symétrique, et calculer ses valeurs propres.

4. Montrer que si $\operatorname{tr}(AB) = 0$ avec $A, B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, alors $AB = 0$.

## Exercice 16 : Un opérateur différentiel autoadjoint

Soit $n \geq 1$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$, muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$. Pour $P \in E$, on pose $u(P) = \left( (X^2 - 1)\, P' \right)'$.

1. Montrer que $u$ est un endomorphisme de $E$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\langle u(P), Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - t^2)\, P'(t)\, Q'(t)\, \mathrm{d}t$. En déduire que $u$ est autoadjoint et positif.

3. Calculer $u(X^k)$ pour $0 \leq k \leq n$. En déduire les valeurs propres de $u$ et justifier que chaque sous-espace propre est une droite.

4. Pour $n = 3$, déterminer une base de $E$ formée de vecteurs propres unitaires de degrés 0, 1, 2, 3, à coefficient dominant positif. Pourquoi cette base est-elle orthogonale ?

## Exercice 17 : Matrices symétriques nilpotentes ou périodiques

1. Soit $u$ un endomorphisme autoadjoint nilpotent d'un espace euclidien. Montrer que $u = 0$.

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_n$. Montrer que $A = I_n$.

3. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 = A^3$. Montrer que $A^3 = A$.

4. Montrer par des exemples que les conclusions des questions 1 et 2 sont fausses sans l'hypothèse de symétrie.

## Exercice 18 : Minimisation d'une fonction quadratique

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $f(X) = \frac{1}{2} X^T A X - b^T X$ pour $X \in \mathbb{R}^n$.

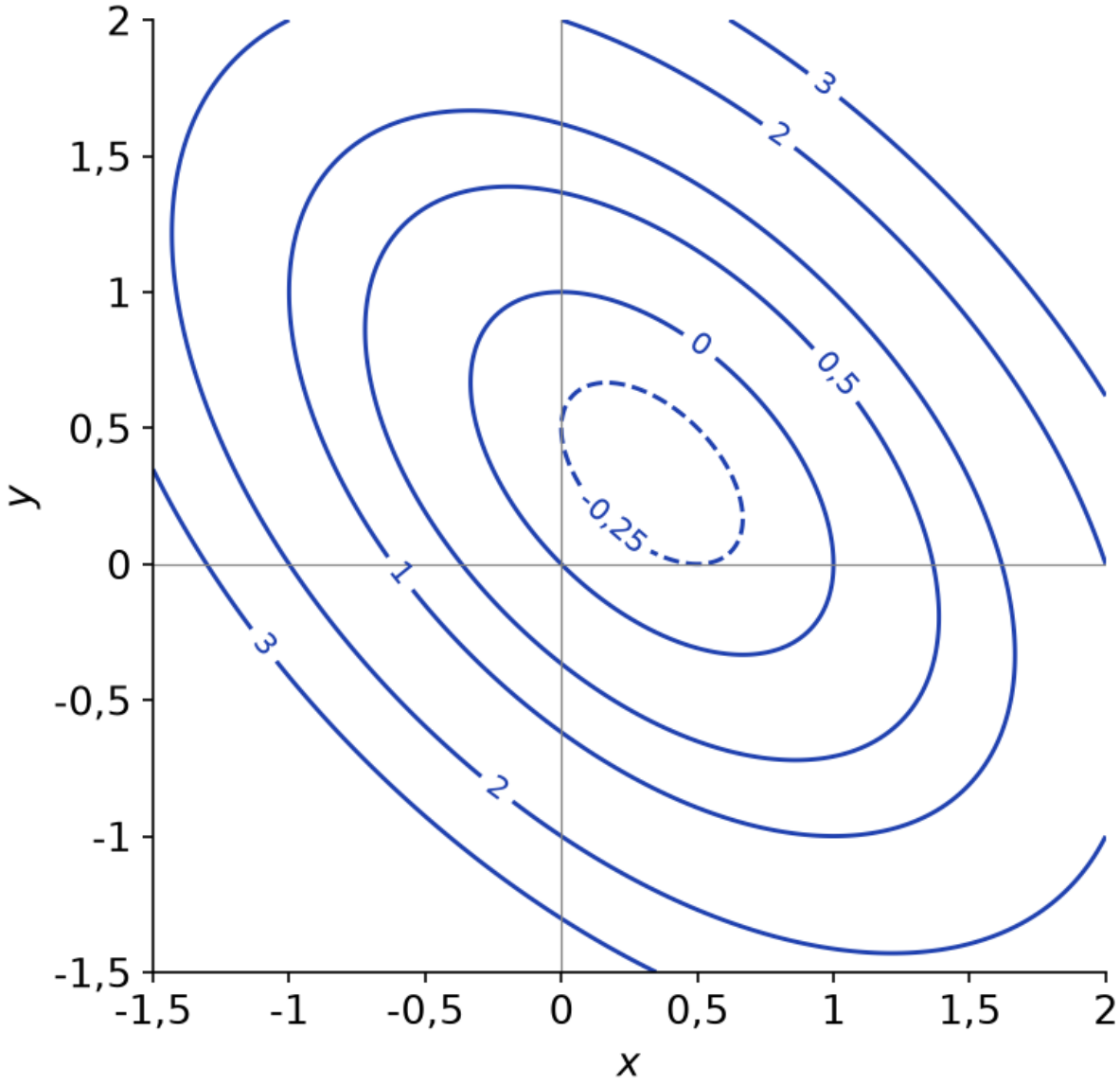
1. Pour $X, H \in \mathbb{R}^n$, montrer que $f(X+H) = f(X) + H^T(AX - b) + \frac{1}{2} H^T A H$.

2. On suppose $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $f$ admet un unique point de minimum $X_0$, à déterminer, et que $f(X_0) = -\frac{1}{2} b^T A^{-1} b$.

3. On suppose que $A$ possède une valeur propre strictement négative. Montrer que $f$ n'est pas minorée.

4. Application : $n = 2$, $A = \left([\text{ray?}] \begin{matrix} 2 \& 1 \\ 1 \& 2 \end{matrix},\right)$ et $b = (1,1)$. Expliciter $f(x,y)$, son minimum, et décrire ses lignes de niveau, représentées ci-dessous.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.




## Exercice 19 : Topologie des matrices symétriques positives

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne : $N(M) = \sup_{|X|=1} |MX|$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sont des parties convexes de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\lambda_1 > 0$ sa plus petite valeur propre. Montrer que toute $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $N(B-A) < \lambda_1$ est définie positive. En déduire que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est l'adhérence de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ n'est pas ouvert.

## Exercice 20 : Inégalité de Hadamard

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $a_{ii} > 0$ pour tout $i$.
2. On pose $D = \operatorname{diag}(a_{11}^{-1/2}, \dots, a_{nn}^{-1/2})$ et $C = D\,A\,D$. Montrer que $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et que ses coefficients diagonaux valent 1.
3. À l'aide de l'inégalité arithmético-géométrique appliquée aux valeurs propres de $C$, montrer que $\det A \leq a_{11}\,a_{22} \dots a_{nn}$.
4. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $A$ est diagonale.
5. En déduire que pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$, on a $|\det M| \leq |C_1| \dots |C_n|$.

## Exercice 21 : Diagonalisation simultanée

Soit $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P$ et $P^T B P$ soient diagonales. Montrer que $AB = BA$.
2. Réciproquement, on suppose $AB = BA$. Montrer que chaque sous-espace propre de $A$ est stable par $B$, puis qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres communs à $A$ et $B$.
3. En déduire que si $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ commutent, alors $AB \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

4. Application : $A = \left([\text{ray?}]{1 \& 1}{1 \& 1},\right)$ et $B = \left([\text{ray?}]{2 \& 1}{1 \& 2},\right)$. Vérifier que $A$ et $B$ commutent et les diagonaliser dans une même base orthonormée.

## Exercice 22 : Problème : le laplacien discret

Pour $n \geq 2$, on note $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale de coefficients diagonaux égaux à 2, de coefficients sur-diagonaux et sous-diagonaux égaux à $-1$, et nulle ailleurs. On pose $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$ pour $1 \leq k \leq n$.

1. Pour $X = (x_1, \ldots, x_n)$, montrer que $X^T A_n X = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$. En déduire que $A_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Soit $V_k \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de coordonnées $\sin(j\,\theta_k)$, $1 \leq j \leq n$. Montrer que $A_n V_k = \lambda_k V_k$ avec $\lambda_k = 2 - 2\cos\theta_k = 4\sin^2\frac{\theta_k}{2}$.
3. En déduire le spectre de $A_n$, puis justifier sans calcul que la famille $(V_1, \ldots, V_n)$ est orthogonale.
4. Montrer que $|V_k|^2 = \frac{n+1}{2}$. On pourra calculer $\sum_{j=0}^{n} \cos(2\,j\,\theta_k)$.
5. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^T A_n X \geq 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)|X|^2$, et que la constante est optimale. Donner un équivalent de cette constante quand $n \to +\infty$.
6. En développant le déterminant, montrer que $\det A_n = n+1$. En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2(n+1)}$.

# Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.

## Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : théorème spectral, cours de maths spé
- À maîtriser avant : Adjoint et isométries d'un espace euclidien, Diagonalisation, trigonalisation et nilpotence
- Chapitre précédent : Adjoint et isométries d'un espace euclidien
- Chapitre suivant : Équations différentielles linéaires
- Tester vos connaissances : QCM de maths spé par chapitre
- Le sommaire : tous les chapitres de maths spé et les chapitres de maths sup

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.