

Théorème spectral

Corrigé de l'exercice 1 : Perturbation de rang un de l'identité

1. L'application u est linéaire, car $x \rightarrow \langle a, x \rangle$ l'est. Pour $x, y \in E$, on a $\langle u(x), y \rangle = \langle x, y \rangle + \lambda \langle a, x \rangle \langle a, y \rangle$. Cette expression est symétrique en x et y . Elle vaut donc aussi $\langle x, u(y) \rangle$. **Ainsi, u est autoadjoint.**
2. D'abord, $u(a) = a + \lambda |a|^2 a = (1 + \lambda) a$. Ensuite, pour $x \in a^\perp$, on a $u(x) = x$. Or $E = \mathbb{R} a \oplus a^\perp$, et $a^\perp$ est de dimension $n - 1 \geq 1$. Si $\lambda = 0$, alors $u = \text{id}$. Si $\lambda \neq 0$, on obtient une base de vecteurs propres, et $\text{Sp}(u) = \{1, 1 + \lambda\}$, avec $E_{1+\lambda}(u) = \mathbb{R} a$ et $E_1(u) = a^\perp$.
3. D'après la caractérisation spectrale, u est positif si et seulement si $1 + \lambda \geq 0$, et défini positif si et seulement si $1 + \lambda > 0$. **Donc $u \in \mathcal{S}^+(E)$ si et seulement si $\lambda \geq -1$, et $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si et seulement si $\lambda > -1$.** Pour $\lambda = -1$, $u(x) = x - \langle a, x \rangle a$: c'est la **projection orthogonale sur l'hyperplan $a^\perp$** . Pour $\lambda = -2$, $u(x) = x - 2 \langle a, x \rangle a$: c'est la **réflexion par rapport à $a^\perp$** .
4. Ici $u(x_1, x_2) = (2x_1, x_2)$. Posons $f_1 = e_1$ et $f_2 = e_1 + e_2$. Alors $u(f_1) = 2f_1$ et $u(f_2) = 2e_1 + e_2 = f_1 + f_2$. **La matrice est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui n'est pas symétrique.** Il n'y a pas de contradiction. En effet, la caractérisation par une matrice symétrique n'est valable qu'en base orthonormée, et (f_1, f_2) ne l'est pas, car $\langle f_1, f_2 \rangle = 1$.

Corrigé de l'exercice 2 : Diagonalisation orthogonale d'une matrice 3×3

1. La matrice A est réelle et symétrique. **D'après le théorème spectral, elle est diagonalisable**

dans une base orthonormée.

2. La matrice J est de rang 1 et $J^2 = 3J$. Ainsi J annule $X^2 - 3X$, donc $\text{Sp}(J) \subset \{0, 3\}$. Son noyau est le plan $x + y + z = 0$, de dimension 2. De plus, $J(1, 1, 1)^T = 3(1, 1, 1)^T$. Comme $A = I_3 + J$, les valeurs propres de A sont obtenues en ajoutant 1. **Donc** $\text{Sp}(A) = \{4, 1\}$, avec 4 simple et 1 double.

3. Le sous-espace $E_4(A)$ est dirigé par $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Ensuite, $E_1(A)$ est le plan $x + y + z = 0$. On y choisit $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, puis un vecteur orthogonal à u_2 dans ce plan : $u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$. On vérifie que $\langle u_2, u_3 \rangle = \frac{1-1+0}{\sqrt{12}} = 0$. Ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(4, 1, 1).$$

La matrice P est orthogonale et $A = P D P^T$.

4. On a $A^k = P D^k P^T = 4^k u_1 u_1^T + u_2 u_2^T + u_3 u_3^T$. Or $u_1 u_1^T + u_2 u_2^T + u_3 u_3^T = P P^T = I_3$ et $u_1 u_1^T = \frac{1}{3} J$. Par conséquent, $A^k = I_3 + \frac{4^k - 1}{3} J$. Pour $k = 1$, on retrouve bien $I_3 + J$.

Point de méthode : pour une matrice de la forme $\alpha I_n + \beta J$, il est inutile de calculer le polynôme caractéristique ; le spectre de J suffit.

Corrigé de l'exercice 3 : Réduction d'une conique par le théorème spectral

1. Le terme croisé $4xy$ se répartit en deux coefficients égaux à 2. **Donc**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. On a $\text{tr } A = 7$ et $\det A = 6$. Le polynôme caractéristique vaut donc

$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1)$. Pour $\lambda = 6$, le système $-x + 2y = 0$ donne le vecteur $(2, 1)$. Pour $\lambda = 1$, le système $4x + 2y = 0$ donne $(-1, 2)$. On pose

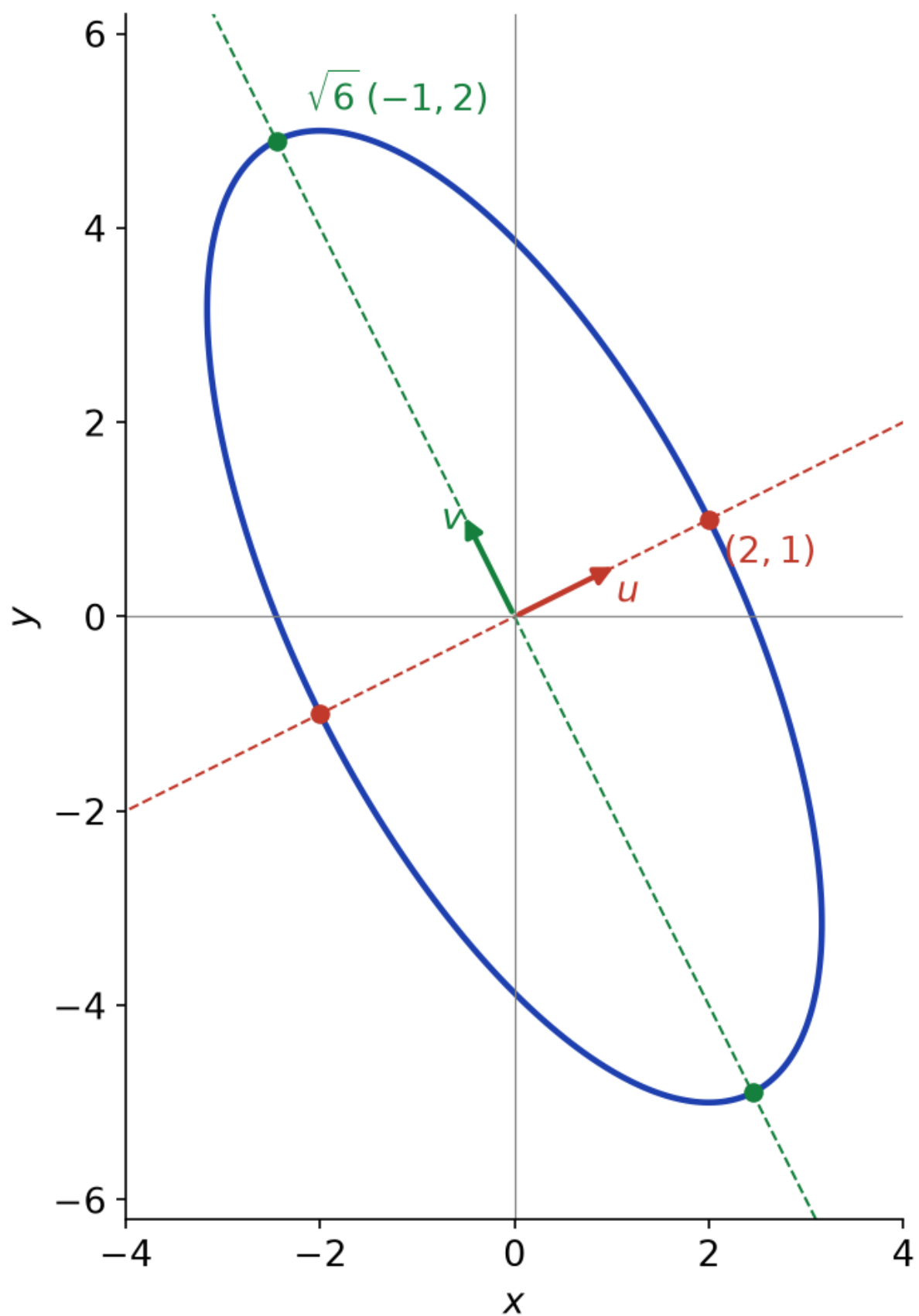
$u = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ et $v = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)$. La matrice de passage $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est de déterminant 1. **La base (u, v) est orthonormée directe et $P^T A P = \text{diag}(6, 1)$.**

3. Si (X, Y) sont les coordonnées dans (O, u, v) , alors $(x, y)^T = P (X, Y)^T$. Ainsi, $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6X^2 + Y^2$. L'équation devient

$$6X^2 + Y^2 = 30 \Leftrightarrow \frac{X^2}{5} + \frac{Y^2}{30} = 1.$$

La courbe $\mathcal{C}$ est une ellipse de centre O , de petit axe porté par u (demi-axe $\sqrt{5}$) et de grand axe porté par v (demi-axe $\sqrt{30}$).

4. Pour $M \in \mathcal{C}$, on a $OM^2 = X^2 + Y^2 = X^2 + 30 - 6X^2 = 30 - 5X^2$, avec $X^2 \in [0, 5]$. Ainsi, OM^2 est minimal quand $X^2 = 5$ et $Y = 0$, et maximal quand $X = 0$. **Les points les plus proches sont $\pm \sqrt{5} u = \pm (2, 1)$, à distance $\sqrt{5}$. Les plus éloignés sont $\pm \sqrt{30} v = \pm \sqrt{6}(-1, 2)$, à distance $\sqrt{30}$.** On vérifie : $5 \times 4 + 4 \times 2 + 2 \times 1 = 30$. La figure ci-dessous montre ces quatre sommets sur les axes propres.



Point de méthode : l'encadrement de Rayleigh donne directement $OM^2 \leq 30 \leq 6 OM^2$ sur $\mathcal{C}$, donc $5 \leq OM^2 \leq 30$.

Corrigé de l'exercice 4 : Reconnaître un projecteur orthogonal

1. Chaque coefficient de J^2 vaut $1 + 1 + 1 = 3$, donc $J^2 = 3J$. Ensuite,

$$P^2 = I_3 - \frac{2}{3}J + \frac{1}{9}J^2 = I_3 - \frac{2}{3}J + \frac{1}{3}J = P.$$

Ainsi P est la matrice d'un projecteur p . De plus, P est symétrique et la base canonique est orthonormée. Donc p est autoadjoint. **Par le cours, un projecteur autoadjoint est un projecteur orthogonal.**

2. On a $PX = X$ si et seulement si $JX = 0$, c'est-à-dire $x + y + z = 0$. **Donc** $\text{Im } p = \Pi$, le plan d'équation $x + y + z = 0$. Ensuite, $PX = 0$ équivaut à $X = \frac{1}{3}JX = \frac{x+y+z}{3}(1, 1, 1)$. **Donc** $\ker p = \mathbb{R}(1, 1, 1) = \Pi^\perp$.

3. La distance de M au plan Π vaut $|M - p(M)|$. Or $M - p(M) = \frac{1}{3}JM = \frac{1+2+6}{3}(1, 1, 1) = 3(1, 1, 1)$. **Donc** $d(M, \Pi) = 3\sqrt{3}$.

4. On calcule $Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $Q^2 = Q$ et Q est un projecteur. Cependant, Q n'est pas symétrique, alors que la base canonique est orthonormée. **Donc ce projecteur n'est pas autoadjoint, donc pas orthogonal.** On le voit directement : $\text{Im } Q = \mathbb{R}e_1$ et $\ker Q = \mathbb{R}(1, -1)$ ne sont pas orthogonaux.

Corrigé de l'exercice 5 : Projecteurs qui diminuent la norme

1. On écrit $x = p(x) + (x - p(x))$, avec $p(x) \in \text{Im } p$ et $x - p(x) \in \ker p$. Ces vecteurs sont orthogonaux. Le théorème de Pythagore donne $|x|^2 = |p(x)|^2 + |x - p(x)|^2$. **Donc** $|p(x)| \leq |x|$.
2. Comme $p(x) = x$ et $p(y) = 0$, on a $p(x + ty) = x$. L'hypothèse donne donc, pour tout réel t ,

$$|x|^2 \leq |x + ty|^2 = |x|^2 + 2t \langle x, y \rangle + t^2 |y|^2.$$

Ainsi $2t \langle x, y \rangle + t^2 |y|^2 \geq 0$. Pour $t > 0$, on divise par t : $2 \langle x, y \rangle + t |y|^2 \geq 0$.

En faisant tendre t vers 0^+ , on obtient $\langle x, y \rangle \geq 0$. De même, pour $t < 0$, on obtient $\langle x, y \rangle \leq 0$. **Donc** $\langle x, y \rangle = 0$.

- La question 2 montre que $\text{Im } p \perp \ker p$, donc que p est orthogonal. Avec la question 1 et le cours, on obtient les équivalences : **p orthogonal** $\Leftrightarrow |p(x)| \leq |x|$ **pour tout** $x \Leftrightarrow p$ **autoadjoint**. Comme p est linéaire, la condition $|p(x)| \leq |x|$ équivaut au caractère 1-lipschitzien.
- On décompose $x = (1, -1, 6) = (2, 6, 0) + (-1, 6)(1, 1)$. **Donc** $p(x) = (2, 6, 0)$ **et** $|p(x)| = 2,6$. En revanche, $|x| = \sqrt{1 + 2,56} = \sqrt{3,56} \approx 1,89$. Ainsi, ce projecteur oblique augmente la norme, comme sur la figure de l'énoncé.

Corrigé de l'exercice 6 : Une matrice tridiagonale définie positive

- D'une part, $X^T A X = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3$. D'autre part, en développant,

$$x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3.$$

Les deux expressions coïncident.

- La matrice A est symétrique et $X^T A X \geq 0$ comme somme de carrés. Si cette somme est nulle, alors $x_1 = 0$, $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$ et $x_3 = 0$, donc $X = 0$. **Ainsi** $A \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$.

- Posons $\mu = 2 - \lambda$. En développant selon la première ligne,

$$\det(A - \lambda I_3) = \mu(\mu^2 - 1) - \mu = \mu^3 - 2\mu = \mu(\mu^2 - 2).$$

Donc $\mu \in \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. **Les valeurs propres sont** $2 - \sqrt{2}$, 2 **et** $2 + \sqrt{2}$. Elles sont toutes strictement positives, ce qui confirme la question 2 par la caractérisation spectrale.

Corrigé de l'exercice 7 : Matrices de Gram

1. D'abord, $G^T = M^T (M^T)^T = M^T M = G$. Ensuite, pour $X \in \mathbb{R}^p$,
 $X^T G X = (MX)^T (MX) = |MX|^2 \geq 0$. **Donc** $G \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.
2. Si $MX = 0$, alors $GX = M^T M X = 0$. Réciproquement, si $GX = 0$, alors
 $|MX|^2 = X^T G X = 0$, donc $MX = 0$. **Ainsi** $\ker G = \ker M$. Par le théorème
du rang appliqué à G et à M , qui ont toutes deux p colonnes, $\text{rg } G = \text{rg } M$.
3. Une matrice positive est définie positive si et seulement si elle est inversible, car ses valeurs propres
sont positives. Ainsi, $G \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\text{rg } G = p$. **Par la question 2, cela**
équivaut à $\text{rg } M = p$.
4. On trouve $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, de trace 4 et de déterminant 3. **Ses valeurs propres sont**
3 et 1. Par l'encadrement de Rayleigh, $|MX|^2 = X^T G X \leq 3 |X|^2$, avec égalité pour
 $X = (1, 1)$. **La norme subordonnée de** M **vaut donc** $\sqrt{3}$.

Corrigé de l'exercice 8 : Matrice de Hilbert

1. On remarque que $\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2} dt$. Par linéarité de l'intégrale,

$$X^T H_n X = \sum_{i,j} x_i x_j \int_0^1 t^{i-1} t^{j-1} dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt.$$

C'est l'identité demandée.

2. La matrice H_n est symétrique, et l'intégrale d'une fonction positive est positive. Supposons
 $X^T H_n X = 0$. La fonction continue et positive $t \rightarrow \left(\sum_i x_i t^{i-1} \right)^2$ est alors nulle sur
 $[0, 1]$. Le polynôme $\sum_i x_i X^{i-1}$ a donc une infinité de racines, donc il est nul, et $X = 0$.
Ainsi $H_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ses valeurs propres sont strictement positives, **donc** $\det H_n > 0$
comme produit de ces valeurs propres.

3. Par l'encadrement de Rayleigh, $\lambda_{\min} \leq e_i^T H_n e_i = h_{ii} \leq \lambda_{\max}$ pour tout i . Avec $i = 1$, on obtient $h_{11} = 1$, **donc** $\lambda_{\max} \geq 1$. Avec $i = n$, on obtient $h_{nn} = \frac{1}{2n-1}$, **donc** $\lambda_{\min} \leq \frac{1}{2n-1}$.

Point de méthode : une matrice dont les coefficients sont des intégrales $\int f_i f_j$ est une matrice de Gram ; sa positivité vient d'un carré sous l'intégrale.

Corrigé de l'exercice 9 : Trace et déterminant d'une matrice positive

1. Par le théorème spectral, $A = P D P^T$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, et les λ_i sont positifs. Donc $\text{tr } A = \sum \lambda_i \geq 0$ et $\det A = \prod \lambda_i \geq 0$. Si $\text{tr } A = 0$, une somme de réels positifs est nulle, donc tous les λ_i sont nuls. **Ainsi** $D = 0$, **puis** $A = P D P^T = 0$.

2. Les λ_i sont strictement positifs. L'inégalité arithmético-géométrique donne

$$(\det A)^{1/n} = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{\text{tr } A}{n}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si tous les λ_i sont égaux. **Cela équivaut à** $A = \frac{\text{tr } A}{n} I_n$, puisque $A = P (\lambda I_n) P^T = \lambda I_n$.

3. Pour $n = 2$, le sens direct vient de la question 1. Réciproquement, soit λ, μ les valeurs propres réelles de A . Si $\lambda \mu \geq 0$, elles sont de même signe ou l'une est nulle. Avec $\lambda + \mu \geq 0$, elles sont donc toutes deux positives. **Donc** $A \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$. Pour $n = 3$, la matrice $\text{diag}(3, -1, -1)$ a pour trace 1 et pour déterminant 3. **Pourtant elle n'est pas positive**, car $e_2^T A e_2 = -1$.

Corrigé de l'exercice 10 : Extremums d'une forme quadratique sur la sphère

1. Le terme $2xy$ donne deux coefficients égaux à 1, de même pour $2yz$ et $2zx$. **Donc**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J - I_3.$$

2. Comme vu à l'exercice 2, $\text{Sp}(J) = \{3, 0\}$, avec $E_3(J) = \mathbb{R}(1, 1, 1)$ et $E_0(J)$ le plan $x + y + z = 0$. **Donc** $\text{Sp}(A) = \{2, -1\}$, avec **2 simple et -1 double**.

3. Par le théorème de Rayleigh, sur S , le maximum de f est la plus grande valeur propre et le minimum la plus petite. **Le maximum vaut 2, atteint en $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Le minimum vaut -1, atteint sur le cercle $S \cap \{x + y + z = 0\}$.**

4. On a $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$. Sur S , on obtient $f = (x + y + z)^2 - 1$. D'une part, $f \geq -1$, avec égalité si et seulement si $x + y + z = 0$. D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3$. Ainsi $f \leq 2$, avec égalité si et seulement si (x, y, z) est colinéaire à $(1, 1, 1)$. **On retrouve le résultat de la question 3.**

Corrigé de l'exercice 11 : Quotient de Rayleigh dans le plan

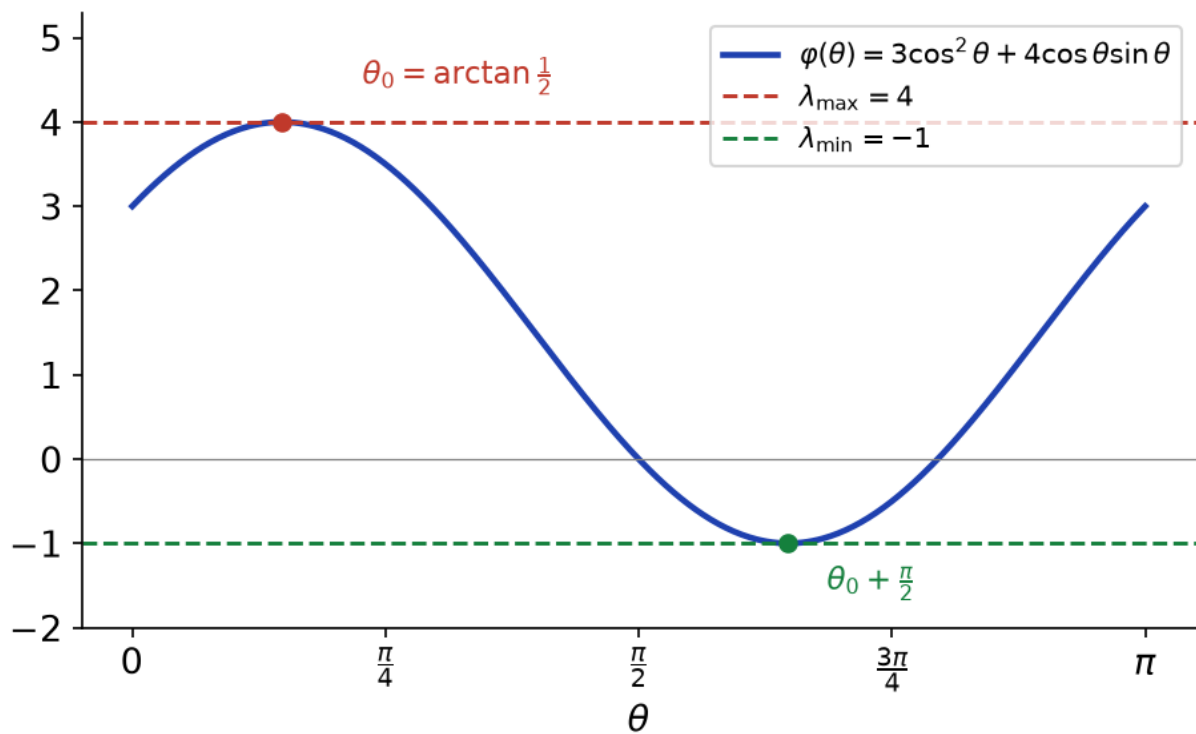
1. On a $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, de trace 3 et de déterminant -4 . Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$. Pour $\lambda = 4$, l'équation $-x + 2y = 0$ donne $(2, 1)$. Pour $\lambda = -1$, l'équation $4x + 2y = 0$ donne $(1, -2)$. **Les valeurs propres sont 4 et -1, de vecteurs propres unitaires $\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ et $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$.**

2. **La forme q n'est pas positive.** D'abord, A a une valeur propre strictement négative. Ensuite, directement, $q(1, -2) = 3 - 8 = -5 < 0$.

3. Par les formules de duplication,

$$\varphi(\theta) = \frac{3}{2}(1 + \cos 2\theta) + 2 \sin 2\theta = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \left(\frac{3}{5} \cos 2\theta + \frac{4}{5} \sin 2\theta \right).$$

Soit γ tel que $\cos \gamma = \frac{3}{5}$ et $\sin \gamma = \frac{4}{5}$. Alors $\varphi(\theta) = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \cos(2\theta - \gamma)$. Le maximum vaut $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$ et le minimum $\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1$. Ce sont bien les valeurs propres. De plus, le maximum est atteint pour $\theta_0 = \frac{\gamma}{2}$, et $\tan \theta_0 = \frac{\sin \gamma}{1 + \cos \gamma} = \frac{1}{2}$. On retrouve la direction $(2, 1)$. La figure ci-dessous représente φ sur une période.



4. L'encadrement de Rayleigh donne $-(x^2 + y^2) \leq q(x, y) \leq 4(x^2 + y^2)$. **Donc** $|q(x, y)| \leq 4(x^2 + y^2)$. L'égalité $q = 4(x^2 + y^2)$ a lieu exactement sur la droite $\mathbb{R}(2, 1)$. En revanche, $q = -4(x^2 + y^2)$ impose $-4(x^2 + y^2) \geq -(x^2 + y^2)$, donc $(x, y) = (0, 0)$. **Il y a égalité si et seulement si** $(x, y) \in \mathbb{R}(2, 1)$.

Corrigé de l'exercice 12 : Calcul d'une racine carrée

1. La matrice A est symétrique, de trace 10 et de déterminant 9. **Ses valeurs propres sont 9 et 1, strictement positives, donc** $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. Les vecteurs $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ et $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ sont propres, associés respectivement à 9 et 1. Avec

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ on a } A = P \operatorname{diag}(9, 1) P^T.$$

2. On pose $\sqrt{A} = P \operatorname{diag}(3, 1) P^T = 3 u u^T + v v^T$. Or $u u^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $v v^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **Donc** $\sqrt{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On vérifie que $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.
3. Soit B symétrique avec $B^2 = A$. Alors $BA = B^3 = AB$, donc B stabilise les droites propres $\mathbb{R}u$ et $\mathbb{R}v$. Ainsi $Bu = \alpha u$ et $Bv = \beta v$, avec $\alpha^2 = 9$ et $\beta^2 = 1$. Réciproquement, chaque choix convient. **Il y a exactement quatre solutions :** $\pm \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\pm \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Par exemple, $3 u u^T - v v^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, dont le carré vaut bien A . Une seule est positive, conformément au cours.

Corrigé de l'exercice 13 : Unicité de la racine carrée

1. On a $AB = B^2 B = B^3 = B B^2 = BA$. Soit $x \in E_{\lambda_k}(A)$. Alors $A(Bx) = B(Ax) = \lambda_k Bx$. **Donc** $Bx \in E_{\lambda_k}(A)$: **chaque sous-espace propre de A est stable par B** .
2. L'endomorphisme canoniquement associé à B est autoadjoint. Par le lemme de stabilité du cours, son induit b_k sur $E_{\lambda_k}(A)$ est autoadjoint, donc diagonalisable par le théorème spectral. Ses valeurs propres sont des valeurs propres de B , **donc positives**. Enfin, pour $x \in E_{\lambda_k}(A)$, $b_k^2(x) = B^2 x = Ax = \lambda_k x$. **Donc** $b_k^2 = \lambda_k \operatorname{id}$.
3. Soit μ une valeur propre de b_k , de vecteur propre x . Alors $\mu^2 x = b_k^2(x) = \lambda_k x$, donc $\mu^2 = \lambda_k$. Comme $\mu \geq 0$, on a $\mu = \sqrt{\lambda_k}$. L'endomorphisme b_k est diagonalisable avec pour seule valeur propre $\sqrt{\lambda_k}$. **Donc** $b_k = \sqrt{\lambda_k} \operatorname{id}$. Enfin, $\mathbb{R}^n = \bigoplus_k E_{\lambda_k}(A)$, et B est connue sur chaque facteur. **Ainsi B ne dépend que de A : c'est $\sqrt{A}$** .
4. Les λ_k sont distincts. Par interpolation de Lagrange, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(\lambda_k) = \sqrt{\lambda_k}$ pour tout k . Pour $x \in E_{\lambda_k}(A)$, on a $Q(A)x = Q(\lambda_k)x = \sqrt{\lambda_k}x = \sqrt{A}x$. Les deux matrices coïncident sur chaque sous-espace propre. **Donc** $\sqrt{A} = Q(A)$.

Corrigé de l'exercice 14 : Décomposition polaire

1. La matrice $M^T M$ est une matrice de Gram, donc symétrique positive. Comme M est inversible, elle est de rang n . **Par l'exercice 7**, $M^T M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. La matrice $S = \sqrt{M^T M}$ est définie positive, donc inversible, et symétrique. Ainsi $(S^{-1})^T = S^{-1}$, et

$$O^T O = S^{-1} M^T M S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n.$$

Donc O est orthogonale, et $M = O S$ par définition de O .

3. Supposons $M = O' S'$ avec O' orthogonale et $S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors $M^T M = S'^T O'^T O' S' = S'^2$. Par unicité de la racine carrée positive, $S' = S$. Ensuite, $O' = M S^{-1} = O$. **Le couple est unique.**

4. Le théorème de Cayley-Hamilton donne $S^2 - (\text{tr } S) S + (\det S) I_2 = 0$, soit $N + (\det S) I_2 = (\text{tr } S) S$. D'une part, $\det S = \sqrt{\det N}$, car $\det S > 0$ et $(\det S)^2 = \det N$. D'autre part, si $\alpha, \beta > 0$ sont les valeurs propres de S , alors $(\text{tr } S)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = \text{tr } N + 2\sqrt{\det N}$. Comme $\text{tr } S > 0$, on conclut :
$$S = \frac{N + \sqrt{\det N} I_2}{\sqrt{\text{tr } N + 2\sqrt{\det N}}}.$$

5. On calcule $N = M^T M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, avec $\det N = 1$ et $\text{tr } N = 3$. La formule donne

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En effet, $\det S = \frac{6-1}{5} = 1$. Ensuite,

$$O = M S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $OS = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = M$. **La matrice O est la rotation d'angle $-\arctan \frac{1}{2}$** , puisque $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Corrigé de l'exercice 15 : Produit de deux matrices symétriques positives

1. La matrice $C = \sqrt{A} B \sqrt{A}$ est symétrique, car $C^T = \sqrt{A}^T B^T \sqrt{A}^T = C$. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on pose $Y = \sqrt{A} X$. Alors $X^T C X = Y^T B Y \geq 0$. **Donc** $C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Ensuite, par la propriété $\text{tr}(UV) = \text{tr}(VU)$, on a $\text{tr}(AB) = \text{tr}(\sqrt{A} \sqrt{A} B) = \text{tr}(\sqrt{A} B \sqrt{A})$. **Donc** $\text{tr}(AB) = \text{tr}(C) \geq 0$.

2. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\sqrt{A}$ est inversible et

$$\sqrt{A} C \sqrt{A}^{-1} = \sqrt{A} \sqrt{A} B \sqrt{A} \sqrt{A}^{-1} = AB.$$

Donc AB est semblable à C . Or C est symétrique réelle et positive : elle est diagonalisable à valeurs propres positives. **Il en va de même pour** AB .

3. On calcule $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. **Cette matrice n'est pas symétrique.** Sa trace vaut 3 et son déterminant 0. **Ses valeurs propres sont donc 0 et 3**, positives comme prévu.
4. Si $\text{tr}(AB) = 0$, alors $\text{tr}(C) = 0$ avec C positive. Par l'exercice 9, $C = 0$. Or $C = (\sqrt{B} \sqrt{A})^T (\sqrt{B} \sqrt{A})$. Donc $|\sqrt{B} \sqrt{A} X|^2 = X^T C X = 0$ pour tout X , c'est-à-dire $\sqrt{B} \sqrt{A} = 0$. En transposant, $\sqrt{A} \sqrt{B} = 0$. **Finalement**, $AB = \sqrt{A} (\sqrt{A} \sqrt{B}) \sqrt{B} = 0$.

Corrigé de l'exercice 16 : Un opérateur différentiel autoadjoint

1. L'application u est linéaire, par linéarité de la dérivation. Si $\deg P \leq n$, alors $(X^2 - 1) P'$ est de degré au plus $n + 1$, donc sa dérivée est de degré au plus n . **Ainsi** u **est un endomorphisme de** E .
2. On intègre par parties, les fonctions étant de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\langle u(P), Q \rangle = \left[(t^2 - 1) P'(t) Q(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (t^2 - 1) P'(t) Q'(t) dt.$$

Le crochet est nul, car $t^2 - 1$ s'annule en ± 1 . **Donc**

$$\langle u(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 (1 - t^2) P'(t) Q'(t) dt. \text{ Cette expression est symétrique en } P \text{ et } Q, \text{ donc } u \text{ est autoadjoint.}$$

De plus, $\langle u(P), P \rangle = \int_{-1}^1 (1 - t^2) P'(t)^2 dt \geq 0$, car $1 - t^2 \geq 0$ sur $[-1, 1]$. **Donc** u **est positif**.

3. On a $(X^2 - 1)kX^{k-1} = kX^{k+1} - kX^{k-1}$, d'où

$$u(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}.$$

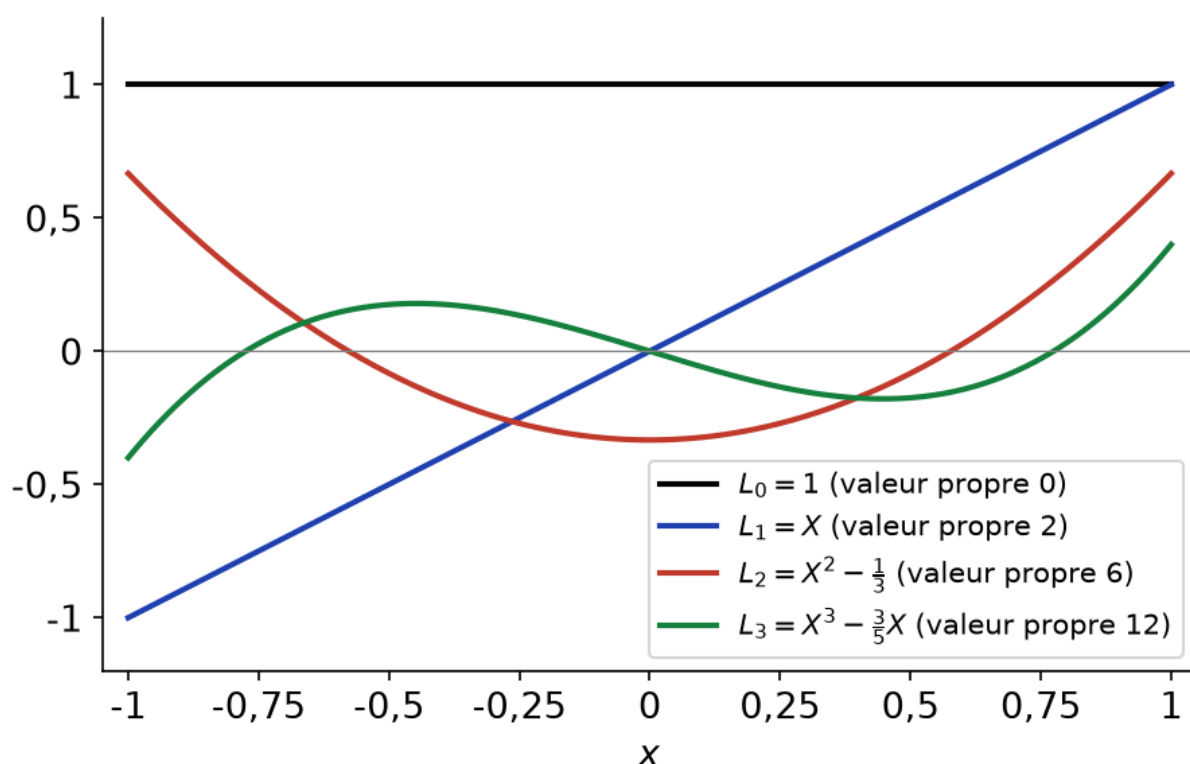
La matrice de u dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est donc triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $k(k+1)$. **Les valeurs propres de u sont les $k(k+1)$, pour $0 \leq k \leq n$.** Elles sont deux à deux distinctes, car la suite $k(k+1)$ est strictement croissante. On a donc $n+1$ valeurs propres distinctes en dimension $n+1$. **Chaque sous-espace propre est une droite.**

4. Le sous-espace $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par u , et les valeurs propres de l'induit sont $j(j+1)$ pour $j \leq k$. Le vecteur propre associé à $k(k+1)$ est donc de degré exactement k . On le cherche unitaire : $L_0 = 1$ et $L_1 = X$. Ensuite, $u(X^2 + c) = 6X^2 - 2$ doit valoir $6(X^2 + c)$, d'où $c = -\frac{1}{3}$. Enfin, $u(X^3 + cX) = 12X^3 - 6X + 2cX$ doit valoir $12X^3 + 12cX$, d'où $c = -\frac{3}{5}$. Les carrés des normes valent

$$|L_0|^2 = 2, |L_1|^2 = \frac{2}{3}, |L_2|^2 = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}, |L_3|^2 = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{6}{25} = \frac{8}{175}.$$

La base cherchée est $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right), \sqrt{\frac{175}{8}}\left(X^3 - \frac{3}{5}X\right) \right)$. Elle est

orthogonale car ses vecteurs sont propres pour des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme autoadjoint. Le théorème spectral est ainsi réalisé de façon explicite. La figure ci-dessous représente ces polynômes, avant normalisation.



Corrigé de l'exercice 17 : Matrices symétriques nilpotentes ou périodiques

1. Par le théorème spectral, u est diagonalisable. Comme u est nilpotent, sa seule valeur propre est 0. Un endomorphisme diagonalisable de seule valeur propre 0 est nul. **Donc** $u = 0$.

2. On écrit $A = P D P^T$ avec $D = \text{diag}(\lambda_i)$ réelle. Alors $A^3 = P D^3 P^T = I_n$, donc $D^3 = I_n$, soit $\lambda_i^3 = 1$ pour tout i . Or le seul réel dont le cube vaut 1 est 1. **Ainsi** $D = I_n$, puis $A = I_n$.

3. De même, $\lambda_i^5 = \lambda_i^3$, soit $\lambda_i^3 (\lambda_i^2 - 1) = 0$. Donc $\lambda_i \in \{0, 1, -1\}$, et dans chaque cas $\lambda_i^3 = \lambda_i$. Ainsi $D^3 = D$. **Par conséquent**, $A^3 = P D^3 P^T = P D P^T = A$.

4. La matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente et non nulle. **La question 1 tombe donc**

en défaut sans symétrie. Ensuite, la rotation $R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ d'angle $\frac{2\pi}{3}$ vérifie

$R^3 = I_2$, car la rotation d'angle 2π est l'identité. **Pourtant** $R \neq I_2$. Ses valeurs propres $e^{\pm 2i\pi/3}$ ne sont pas réelles, ce qui est impossible pour une matrice symétrique.

Corrigé de l'exercice 18 : Minimisation d'une fonction quadratique

1. On développe :

$$f(X + H) = \frac{1}{2} X^T A X + \frac{1}{2} (X^T A H + H^T A X) + \frac{1}{2} H^T A H - b^T X - b^T H.$$

Or $X^T A H$ est un réel, égal à sa transposée $H^T A^T X = H^T A X$. De plus, $b^T H = H^T b$. **Donc** $f(X + H) = f(X) + H^T (AX - b) + \frac{1}{2} H^T A H$.

2. La matrice A est inversible, car ses valeurs propres sont non nulles. On pose $X_0 = A^{-1} b$.

La question 1 donne $f(X_0 + H) = f(X_0) + \frac{1}{2} H^T A H$. Pour $H \neq 0$, on a

$H^T A H > 0$, donc $f(X_0 + H) > f(X_0)$. **Ainsi** $X_0 = A^{-1} b$ **est l'unique point de minimum**. Enfin, comme A^{-1} est symétrique,

$$f(X_0) = \frac{1}{2} b^T A^{-1} A A^{-1} b - b^T A^{-1} b = -\frac{1}{2} b^T A^{-1} b.$$

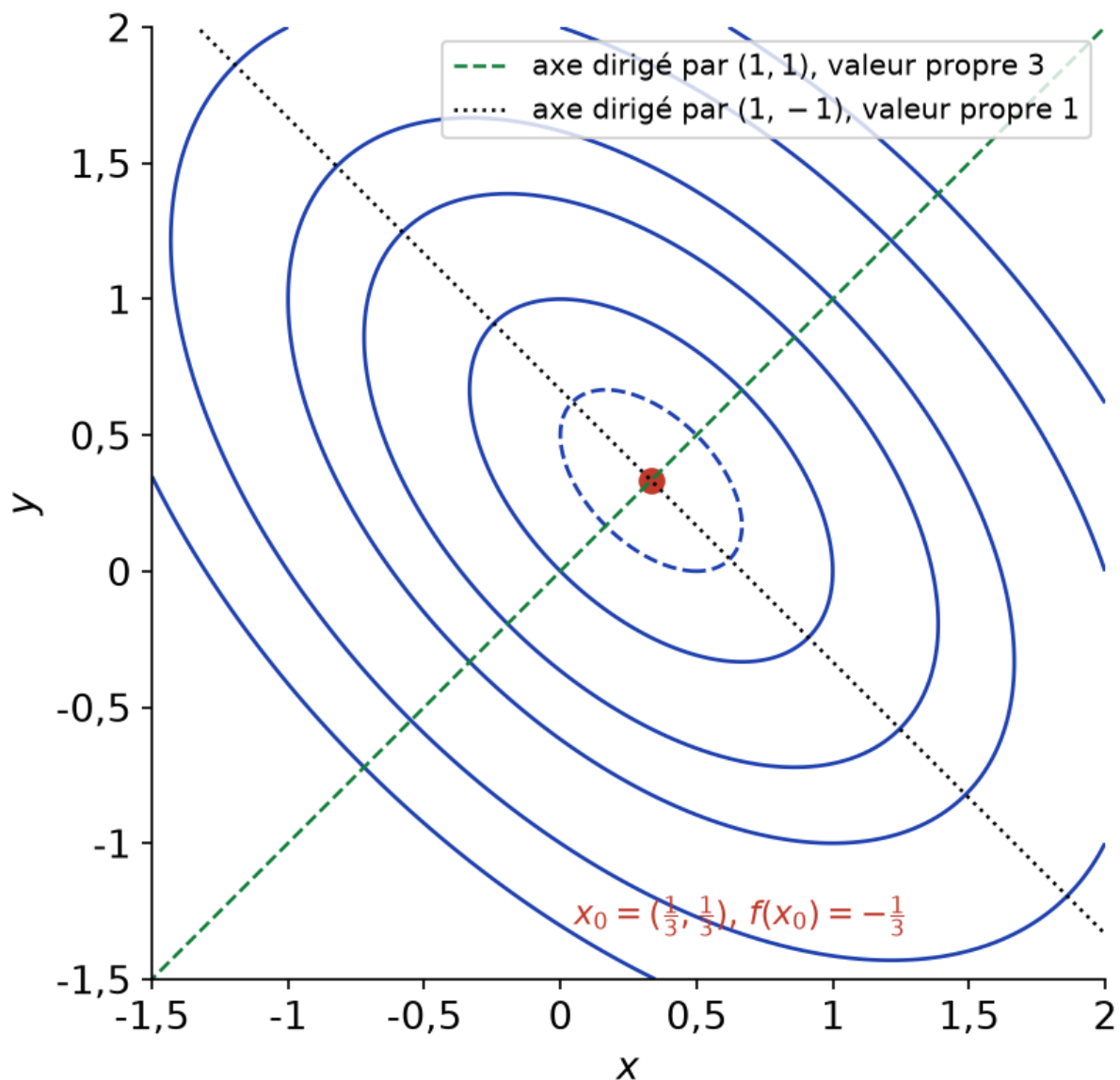
3. Soit V un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda < 0$. Alors

$f(tV) = \frac{\lambda}{2} t^2 |V|^2 - t b^T V$. C'est un trinôme en t de coefficient dominant strictement négatif. **Donc** $f(tV) \rightarrow -\infty$ **quand** $t \rightarrow +\infty$, **et** f **n'est pas minorée**.

4. On obtient $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x - y$. Ensuite, $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, donc $X_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. **Le minimum vaut** $f(X_0) = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$. Dans la base

orthonormée propre $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$, associée aux valeurs propres 3 et 1, on écrit

$H = s \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} + t \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}}$. Il vient $f(X_0 + H) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(3s^2 + t^2)$. **Pour** $c > -\frac{1}{3}$, **la ligne de niveau** $f = c$ **est une ellipse de centre** X_0 , **d'axes dirigés par** $(1, 1)$ **et** $(1, -1)$, de demi-axes $\sqrt{\frac{2}{3}(c + \frac{1}{3})}$ et $\sqrt{2(c + \frac{1}{3})}$. Pour $c = -\frac{1}{3}$, c'est le point X_0 ; pour $c < -\frac{1}{3}$, elle est vide. La figure ci-dessous le montre.



Corrigé de l'exercice 19 : Topologie des matrices symétriques positives

1. Soit $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $t \in [0, 1]$. La matrice $tA + (1-t)B$ est symétrique. De plus, $X^T(tA + (1-t)B)X = tX^TAX + (1-t)X^TBX \geq 0$. Si $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $X \neq 0$, cette somme de deux termes positifs est strictement positive, car t ou $1-t$ est non nul. **Les deux ensembles sont donc convexes.**
2. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, l'application $\varphi_X: A \rightarrow X^TAX$ est linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc continue. Ainsi, $\varphi_X^{-1}([0, +\infty[)$ est fermé. **Donc**

$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \bigcap_X \varphi_X^{-1}([0, +\infty[)$ est fermé, comme intersection de fermés.

3. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$|X^T(B-A)X| \leq |X| |(B-A)X| \leq N(B-A) |X|^2$. Avec l'encadrement de Rayleigh, on obtient

$$X^T B X \geq X^T A X - N(B-A)|X|^2 \geq (\lambda_1 - N(B-A)) |X|^2.$$

Ce minorant est strictement positif pour $X \neq 0$. Donc B est définie positive. Ainsi, la boule ouverte de centre A et de rayon λ_1 est incluse dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. L'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est donc ouvert dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

4. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Pour $k \geq 1$, la matrice $A + \frac{1}{k} I_n$ a pour valeurs propres les

$\lambda + \frac{1}{k} > 0$, donc elle est définie positive. Elle tend vers A . Ainsi $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est inclus dans l'adhérence de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Inversement, cette adhérence est incluse dans le fermé $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Donc $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Enfin, $0 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, mais $-\frac{1}{k} I_n \notin \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tend vers 0. Donc $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ n'est pas ouvert.

Corrigé de l'exercice 20 : Inégalité de Hadamard

1. On a $a_{ii} = e_i^T A e_i$ et $e_i \neq 0$. Donc $a_{ii} > 0$.

2. La matrice $C = DAD$ est symétrique, car D l'est. Pour $X \neq 0$, on a $DX \neq 0$, car D est inversible. Donc $X^T C X = (DX)^T A (DX) > 0$. Ainsi $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Enfin, $c_{ii} = a_{ii}^{-1/2} a_{ii} a_{ii}^{-1/2} = 1$.

3. Soit $\mu_1, \dots, \mu_n > 0$ les valeurs propres de C . Alors $\sum_i \mu_i = \text{tr } C = n$. L'inégalité arithmético-géométrique donne $\det C = \prod_i \mu_i \leq \left(\frac{1}{n} \sum_i \mu_i \right)^n = 1$. Or $\det C = (\det D)^2 \det A = \frac{\det A}{a_{11} \dots a_{nn}}$. Donc $\det A \leq a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.

4. Si A est diagonale, l'égalité est claire. Réciproquement, l'égalité impose l'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique, donc $\mu_1 = \dots = \mu_n = 1$. La matrice symétrique C est alors diagonalisable de seule valeur propre 1, donc $C = I_n$. Ainsi $A = D^{-1} C D^{-1} = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ est diagonale.

5. Si M n'est pas inversible, $\det M = 0$ et l'inégalité est vraie. Sinon,
 $A = M^T M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et $a_{jj} = C_j^T C_j = |C_j|^2$. De plus,
 $\det A = (\det M)^2$. La question 3 donne $(\det M)^2 \leq \prod_j |C_j|^2$. **Donc**
 $|\det M| \leq |C_1| \dots |C_n|$. Géométriquement, le volume d'un parallélépipède est majoré par le produit des longueurs de ses arêtes.

Corrigé de l'exercice 21 : Diagonalisation simultanée

- Posons $D_1 = P^T A P$ et $D_2 = P^T B P$. Deux matrices diagonales commutent. **Donc**
 $AB = P D_1 D_2 P^T = P D_2 D_1 P^T = BA$.
- Soit $x \in E_\lambda(A)$. Alors $A(Bx) = B(Ax) = \lambda Bx$, donc $E_\lambda(A)$ est stable par B .
L'induit de B sur $E_\lambda(A)$ est autoadjoint, par le lemme du cours. Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée de $E_\lambda(A)$ formée de vecteurs propres de B . Ces vecteurs sont aussi propres pour A . Enfin, $\mathbb{R}^n$ est la somme directe orthogonale des $E_\lambda(A)$. **En réunissant ces bases, on obtient une base orthonormée de vecteurs propres communs.**
- Soit P orthogonale avec $P^T A P = \text{diag}(\alpha_i)$ et $P^T B P = \text{diag}(\beta_i)$, où $\alpha_i, \beta_i \geq 0$. Alors $AB = P \text{diag}(\alpha_i \beta_i) P^T$. Cette matrice est symétrique, de valeurs propres $\alpha_i \beta_i \geq 0$. **Donc** $AB \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- On calcule $AB = BA = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Posons $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ et $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.
Alors $Au = 2u$, $Av = 0$, $Bu = 3u$ et $Bv = v$. **Avec**
 $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $P^T A P = \text{diag}(2, 0)$ et $P^T B P = \text{diag}(3, 1)$.

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : le laplacien discret

- D'une part, $X^T A_n X = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$. D'autre part,

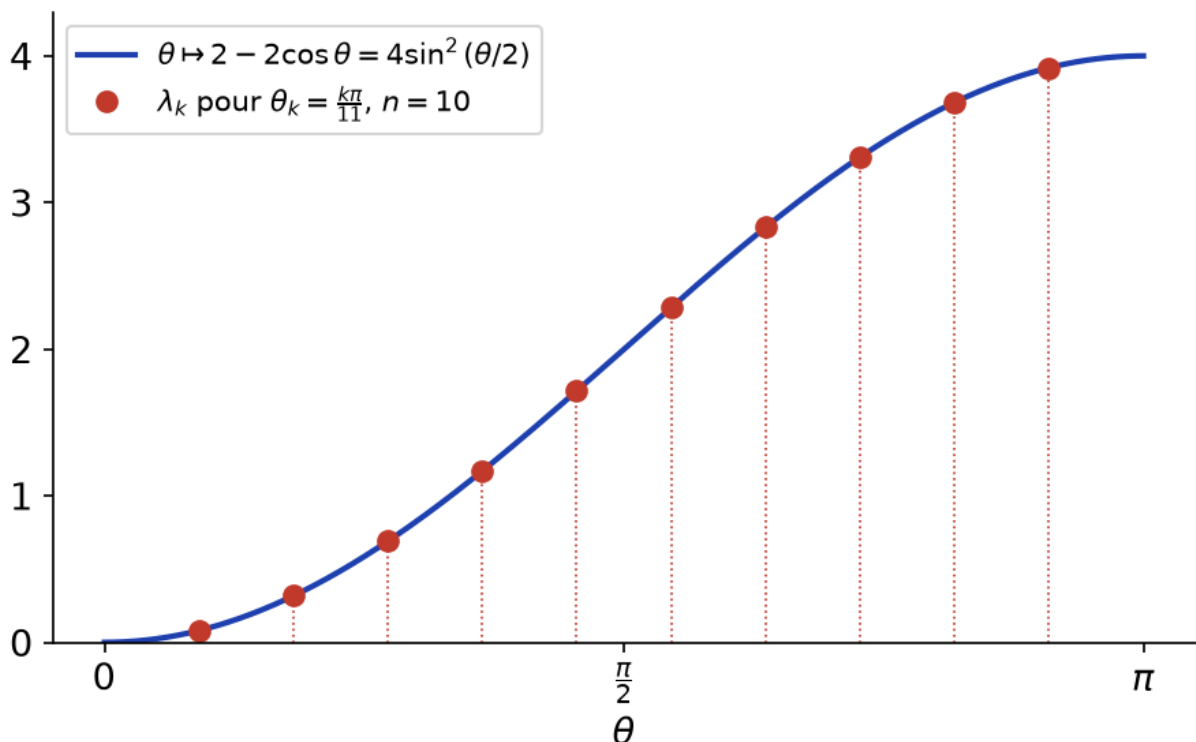
$$x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \sum_{i=2}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

Les deux premières sommes et les termes x_1^2 , x_n^2 donnent $2 \sum_{i=1}^n x_i^2$. **L'identité est**

démontrée. Si cette somme de carrés est nulle, alors $x_1 = 0$ et $x_i = x_{i+1}$ pour tout i , donc $X = 0$. **Ainsi** $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. On pose $\theta = \theta_k$ et $s_j = \sin(j\theta)$ pour $0 \leq j \leq n+1$. On a $s_0 = 0$ et $s_{n+1} = \sin((n+1)\theta) = 0$. Grâce à ces conventions, pour tout $1 \leq j \leq n$, $(A_n V_k)_j = -s_{j-1} + 2s_j - s_{j+1}$. Or $s_{j-1} + s_{j+1} = 2 \sin(j\theta) \cos \theta$. Donc $(A_n V_k)_j = (2 - 2 \cos \theta) s_j$. De plus, $V_k \neq 0$, car sa première coordonnée $\sin \theta_k$ est strictement positive. **Ainsi** $A_n V_k = \lambda_k V_k$, avec $\lambda_k = 2 - 2 \cos \theta_k = 4 \sin^2 \frac{\theta_k}{2}$.

3. Les θ_k sont n réels distincts de $]0, \pi[$, où le cosinus est strictement décroissant. Les λ_k sont donc n valeurs propres distinctes de A_n , qui est de taille n . **Le spectre de A_n est $\{4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}, 1 \leq k \leq n\}$, chaque valeur propre étant simple.** Les V_k sont des vecteurs propres d'une matrice symétrique associés à des valeurs propres distinctes. **Ils sont donc deux à deux orthogonaux.** La figure ci-dessous place ces valeurs propres sur la courbe $\theta \rightarrow 2 - 2 \cos \theta$ pour $n = 10$.



4. On a $\sin^2(j\theta) = \frac{1 - \cos(2j\theta)}{2}$. Ensuite, $e^{2i\theta_k} \neq 1$, car $2\theta_k \in]0, 2\pi[$. La somme géométrique donne donc

$$\sum_{j=0}^n e^{2ij\theta_k} = \frac{1 - e^{2i(n+1)\theta_k}}{1 - e^{2i\theta_k}} = \frac{1 - e^{2ik\pi}}{1 - e^{2i\theta_k}} = 0.$$

En prenant la partie réelle, $\sum_{j=0}^n \cos(2j\theta_k) = 0$, d'où $\sum_{j=1}^n \cos(2j\theta_k) = -1$. **Par conséquent,** $|V_k|^2 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$.

5. La plus petite valeur propre est $\lambda_1 = 4\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}$. L'encadrement de Rayleigh donne $X^T A_n X \geq \lambda_1 |X|^2$. **La constante est optimale, car l'égalité a lieu pour $X = V_1$.** Enfin, $\sin x \sim x$ en 0. **Donc** $\lambda_1 \sim \frac{\pi^2}{(n+1)^2} \sim \frac{\pi^2}{n^2}$. Cette constante tend vers 0 : la matrice devient de plus en plus mal conditionnée.

6. Notons $D_n = \det A_n$, avec $D_1 = 2$ et $D_2 = 3$. En développant selon la première ligne, puis le mineur obtenu selon sa première colonne, on trouve $D_n = 2 D_{n-1} - D_{n-2}$. Ainsi, $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = \dots = D_2 - D_1 = 1$. **Donc** $D_n = n + 1$. Par ailleurs, le déterminant est le produit des valeurs propres :

$$n + 1 = \prod_{k=1}^n 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} = 4^n \left(\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} \right)^2.$$

Les sinus sont strictement positifs, car $\frac{k\pi}{2(n+1)} \in]0, \frac{\pi}{2}[$. **Donc** $\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$.

Pour $n = 2$, on retrouve $\sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Point de méthode : quand on a trouvé n vecteurs propres pour n valeurs propres distinctes, le spectre est complet ; l'orthogonalité vient alors gratuitement du caractère symétrique.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [théorème spectral, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur théorème spectral](#)
- À maîtriser avant : [Adjoint et isométries d'un espace euclidien](#), [Diagonalisation, trigonalisation et nilpotence](#)
- Chapitre précédent : [Adjoint et isométries d'un espace euclidien](#)
- Chapitre suivant : [Équations différentielles linéaires](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)