

Théorème des résidus

Exercice 1 : Série de Laurent d'une fraction rationnelle

On considère $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$.

1. Décomposer f en éléments simples.
2. Développer f en série de Laurent centrée en 0 sur chacune des couronnes $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ et $|z| > 2$.
3. En déduire, sans nouveau calcul, $\int_{|z|=3/2} f(z) dz$ et $\int_{|z|=3} f(z) dz$.
4. Vérifier ces deux résultats avec le théorème des résidus.

Exercice 2 : Séries de Laurent en zéro de fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le développement de Laurent sur le disque épointé indiqué, la nature de la singularité en 0 et le résidu en 0 .

1. $f_1(z) = z^3 e^{1/z}$ sur $\mathbb{C}^*$.
2. $f_2(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ sur $\mathbb{C}^*$.
3. $f_3(z) = z \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ sur $\mathbb{C}^*$.

4. $f_4(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$ sur $0 < |z| < 1$.

Exercice 3 : Classer des singularités isolées

Déterminer les singularités isolées des fonctions suivantes et préciser leur nature (effaçable, pôle avec son ordre, essentielle).

1. $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$.

2. $g(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.

3. $h(z) = \frac{z^2 - 1}{z^3 - z^2 - z + 1}$.

4. $k(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

5. $\ell(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$.

Exercice 4 : Calcul de résidus en des pôles

Calculer les résidus suivants, en justifiant la nature du point.

1. Les résidus de $\frac{z+2}{z^2 - z}$ en 0 et en 1.

2. Le résidu de $\frac{1}{z^4 + 1}$ en $a = e^{i\pi/4}$.

3. Le résidu de $\frac{e^z}{(z-1)^3}$ en 1.

4. Le résidu de $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ en $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Le résidu de $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$ en i .

Exercice 5 : Indice d'un lacet, premiers calculs

1. Soit $\gamma(t) = 2 + 3e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Déterminer $\text{Ind}_\gamma(0)$ et $\text{Ind}_\gamma(6)$.
2. Soit $\sigma(t) = e^{-3it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calculer $\text{Ind}_\sigma(0)$ directement par l'intégrale.
3. Soit $\gamma_1(t) = 1 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calculer $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2 - 1}$ à l'aide des indices de 1 et -1 .
4. Même question pour $\gamma_2(t) = 2e^{2it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 6 : Intégrales trigonométriques

1. Calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$ par le théorème des résidus.
2. Calculer $J = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5 - 4\cos\theta} d\theta$. On pourra considérer $\int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{5 - 4\cos\theta} d\theta$.

Exercice 7 : Principe de l'argument sur un exemple

Soit $f(z) = \frac{(z-1)^3(z+3)}{z^2(z-3i)}$.

1. Donner les zéros et les pôles de f avec leurs ordres.

2. Calculer $\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

3. Même question sur les cercles $|z| = 4$ et $|z| = \frac{1}{2}$.

Exercice 8 : Critère de Riemann et singularités effaçables

Soit f holomorphe sur $D(0, 1) \setminus \{0\}$, de développement de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$.

1. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $|f(z)| \leq C |z|^{-1/2}$. Montrer que 0 est une singularité effaçable.
2. On suppose seulement $|f(z)| \leq C |z|^{-3/2}$. Montrer que 0 est au plus un pôle simple.
3. On suppose que f a un pôle en 0 . Montrer que e^f a une singularité essentielle en 0 . On pourra étudier la dérivée logarithmique de e^f .

Exercice 9 : Singularités essentielles et Casorati-Weierstrass

1. Soit $w \in \mathbb{C}^*$ et $\rho > 0$. Montrer qu'il existe z tel que $0 < |z| < \rho$ et $e^{1/z} = w$.
2. La fonction $e^{1/z}$ prend-elle la valeur 0 ? Ce résultat contredit-il le théorème de Casorati-Weierstrass ?
3. Soit f holomorphe sur $D(0, 1) \setminus \{0\}$ avec une singularité essentielle en 0 . Montrer que pour tout $w \in \mathbb{C}$, il existe une suite (z_n) tendant vers 0 telle que $f(z_n) \rightarrow w$.
4. Soit g holomorphe sur $D(0, 1) \setminus \{0\}$ telle que $\operatorname{Re} g(z) > 0$ pour tout z . Montrer que 0

n'est pas une singularité essentielle de g .

Exercice 10 : Fonctions méromorphes et dérivée logarithmique

1. Montrer que $\tan$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, déterminer ses pôles, leur ordre et les résidus.
2. Même question pour $z \mapsto \frac{1}{e^z - 1}$.
3. Soit f méromorphe au voisinage de a . On suppose que a est un zéro d'ordre k ou un pôle d'ordre m de f . Montrer que f'/f a un pôle simple en a , de résidu k dans le premier cas et $-m$ dans le second.
4. Vérifier ce résultat sur $f = \sin$ aux points $k\pi$, puis sur $f = \tan$ aux points $\frac{\pi}{2}$ et 0 .

Exercice 11 : Série de Laurent autour d'un pôle double

Soit $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$. On pose $u = z - 1$.

1. Développer f en série de Laurent en puissances de u sur $0 < |u| < 1$. En déduire la nature de 1 et $\text{Res}(f, 1)$.
2. Développer f en puissances de u sur $|u| > 1$.
3. Calculer $\text{Res}(f, 0)$, puis vérifier la cohérence avec le coefficient de u^{-1} de la question 2.

4. Calculer $\int_{|z-1|=1/2} f(z) dz$ et $\int_{|z-1|=2} f(z) dz$.

Exercice 12 : Somme de tous les résidus d'une fraction rationnelle

Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle irréductible.

1. On suppose $\deg Q \geq \deg P + 2$. Montrer que $\int_{|z|=R} F(z) dz \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow +\infty$. En déduire que la somme de tous les résidus de F est nulle.
2. On suppose $\deg Q = \deg P + 1$, les coefficients dominants de P et Q valant p et q . Montrer que la somme de tous les résidus de F vaut p/q .
3. Calculer $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^5(z-3)}$ en utilisant le résidu en 3 .
4. Calculer $\int_{|z|=3} \frac{z^5}{z^6-1} dz$ de deux façons.

Exercice 13 : Intégrales de fractions rationnelles sur la droite réelle

1. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ en justifiant chaque étape.
2. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$.

Exercice 14 : Transformée de Fourier par les résidus

Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on pose $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} dx$.

1. Justifier l'existence de $\widehat{f}(\xi)$ et montrer que $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x\xi)}{1+x^2} dx$. En déduire que $\widehat{f}$ est paire.

2. Soit $\lambda > 0$. Montrer que $\int_{C_R} \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2} dz \rightarrow 0$, où C_R est le demi-cercle supérieur de rayon R .

3. En déduire que $\widehat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

4. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.

Exercice 15 : Intégrale de Dirichlet par un contour indenté

On veut calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. On pose $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$.

1. Montrer que $\int_0^A \frac{\sin x}{x} dx$ a une limite finie quand $A \rightarrow +\infty$, à l'aide d'une intégration par parties.

2. Pour $0 < \varepsilon < R$, on considère le lacet formé du segment $[\varepsilon, R]$, du demi-cercle supérieur C_R de rayon R , du segment $[-R, -\varepsilon]$ et du demi-cercle supérieur γ_ε de rayon ε parcouru de $-\varepsilon$ vers ε . Que vaut l'intégrale de f sur ce lacet ?

3. Montrer que $\int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx.$

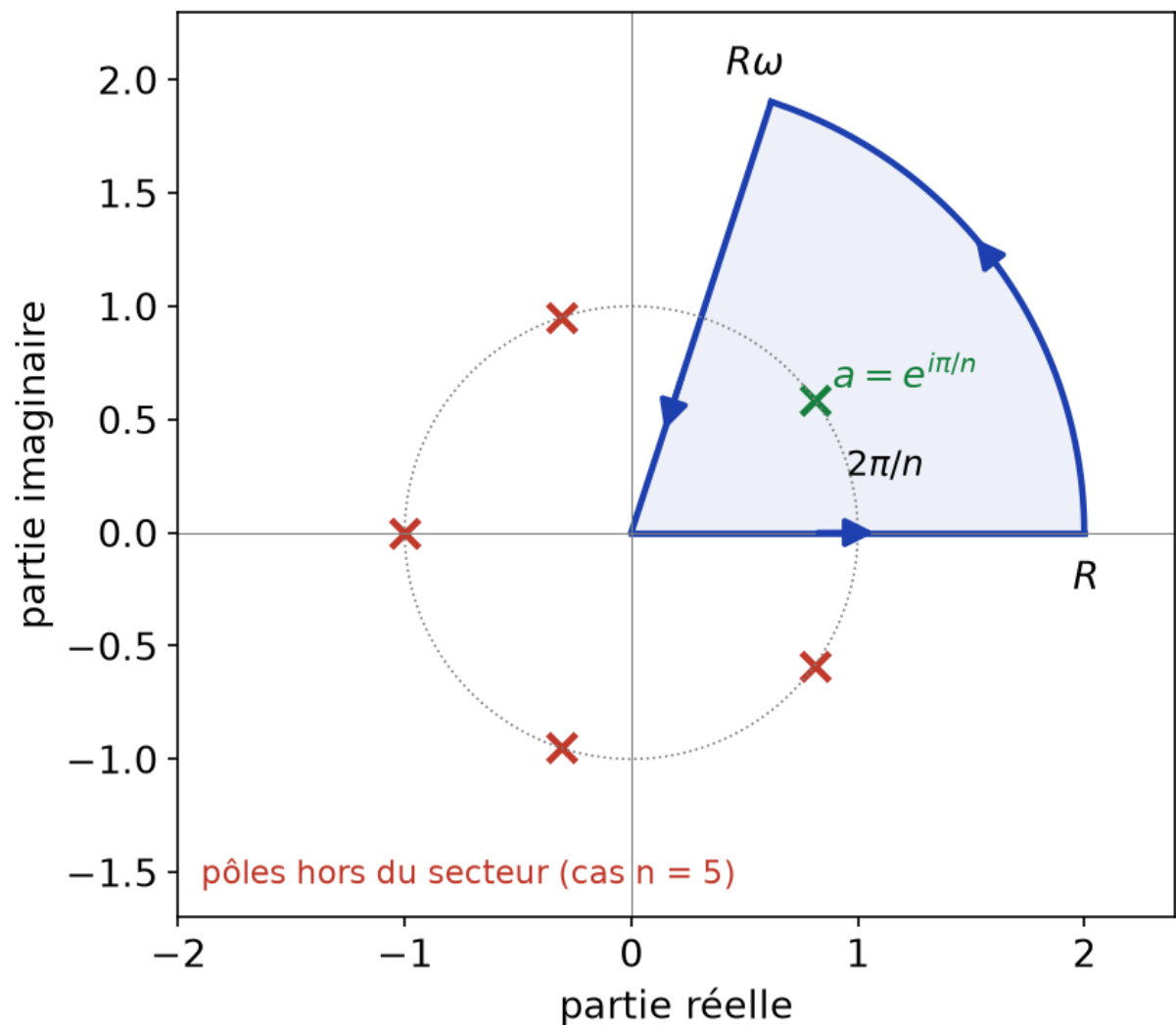
4. Déterminer les limites de $\int_{C_R} f$ quand $R \rightarrow +\infty$ et de $\int_{\gamma_{\varepsilon}} f$ quand $\varepsilon \rightarrow 0.$

5. En déduire I , puis $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$

Exercice 16 : Intégrale sur un secteur angulaire

Soit $n \geq 2$ un entier. On veut calculer $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}.$ On note $\omega = e^{2i\pi/n}$ et

$a = e^{i\pi/n}.$ Pour $R > 1$, on considère le bord du secteur $\left\{ r e^{it} : 0 \leq r \leq R, 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{n} \right\}$, parcouru dans le sens direct, comme sur la figure ci-dessous.



1. Justifier la convergence de I_n .
2. Montrer que a est le seul pôle de $\frac{1}{1+z^n}$ à l'intérieur du secteur, et que son résidu vaut $-\frac{a}{n}$.
3. Montrer que l'intégrale sur l'arc de cercle tend vers 0 quand $R \rightarrow +\infty$.
4. Exprimer l'intégrale sur le segment $[R\omega, 0]$ à l'aide de $\int_0^R \frac{dr}{1+r^n}$.
5. En déduire que $I_n = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}$. Vérifier le cas $n = 2$.

Exercice 17 : Zéros d'un polynôme dans une couronne

Soit $P(z) = z^7 - 5z^3 + 1$.

1. Montrer que P a exactement trois zéros dans le disque $D(0, 1)$.
2. Montrer que tous les zéros de P sont dans $D(0, 2)$.
3. Montrer que P n'a pas de zéro sur le cercle unité. En déduire le nombre de zéros dans la couronne $1 < |z| < 2$.
4. Montrer que P a au moins un zéro réel dans $]0, 1[$.

Exercice 18 : Rouché et l'équation $e^z = 3z$

1. Montrer que l'équation $e^z = 3z$ a exactement une solution dans le disque $D(0, 1)$.
2. Montrer que cette solution est réelle et appartient à $]0, 1[$.
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que l'équation $e^z = 3z^n$ a exactement n solutions dans $D(0, 1)$, comptées avec multiplicité.
4. Montrer que ces n solutions sont simples.

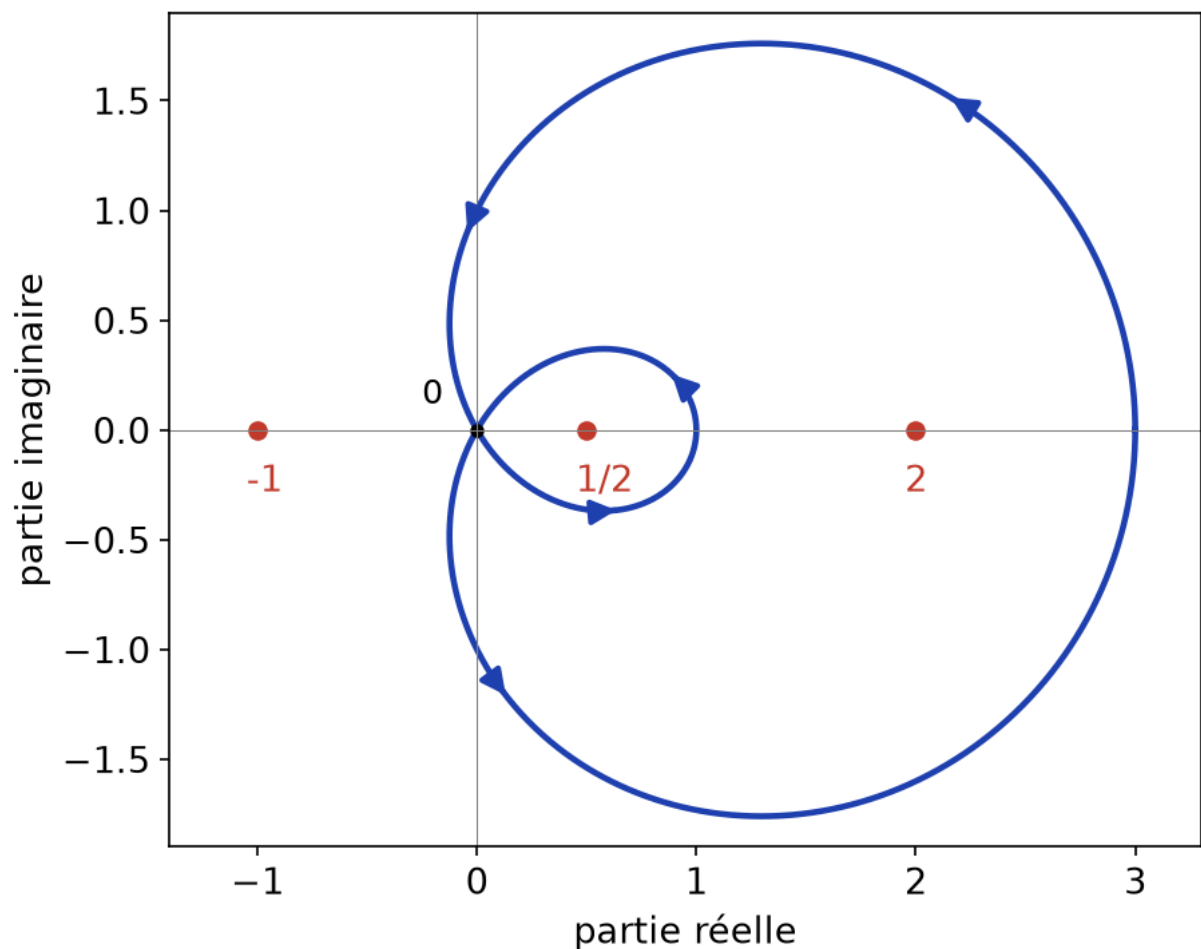
Exercice 19 : Théorème de d'Alembert-Gauss par Rouché

Soit $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$, avec $n \geq 1$, et $S = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

1. On pose $R = 1 + S$. Montrer que $|P(z) - z^n| < |z^n|$ pour $|z| = R$.
2. En déduire que P a exactement n zéros dans $D(0, R)$, comptés avec multiplicité, puis que P est scindé sur $\mathbb{C}$.
3. Montrer plus précisément que tout zéro z de P vérifie $|z| \leq \max(1, S)$.
4. Application : localiser les zéros de $z^3 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}$.

Exercice 20 : Indice d'un limaçon et principe de l'argument

On considère le lacet $\gamma(t) = 1 + e^{it} + e^{2it}$, $t \in [0, 2\pi]$, représenté ci-dessous. Il possède une petite boucle intérieure.



1. Montrer que $\gamma(t) = (1 + 2\cos t) e^{it}$. Vérifier que $0 \in \gamma^*$.
2. Soit $a \notin \gamma^*$ et $P_a(w) = w^2 + w + 1 - a$. Montrer que P_a ne s'annule pas sur le cercle unité.
3. Montrer que $\text{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=1} \frac{P'_a(w)}{P_a(w)} dw$, puis que $\text{Ind}_\gamma(a)$ est le nombre de racines de P_a dans $D(0, 1)$.
4. En déduire $\text{Ind}_\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $\text{Ind}_\gamma(2)$ et $\text{Ind}_\gamma(-1)$. Comparer avec la figure.

Exercice 21 : Somme de la série des inverses des carrés

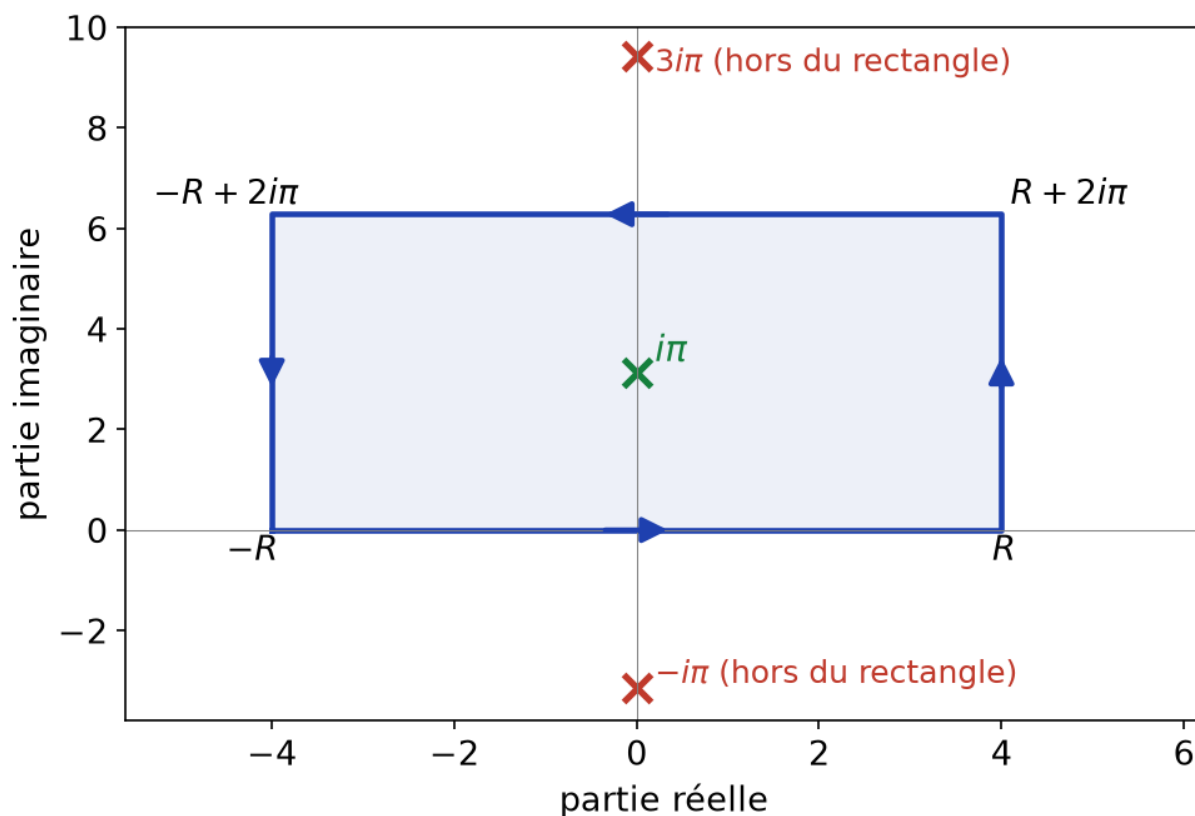
On pose $f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$, et on note C_N le bord du carré de sommets $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$, parcouru dans le sens direct, pour $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les pôles de f et calculer $\text{Res}(f, n)$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$.
2. Montrer que $\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} - \frac{\pi^2}{3} z + O(z^3)$ au voisinage de 0 . En déduire $\text{Res}(f, 0)$.
3. Pour $z = x + iy$, établir $|\sin(\pi z)|^2 = \sin^2(\pi x) + \text{sh}^2(\pi y)$ et $|\cos(\pi z)|^2 = \cos^2(\pi x) + \text{sh}^2(\pi y)$. En déduire que $|\cot(\pi z)| \leq 2$ sur C_N .
4. Montrer que $\int_{C_N} f(z) dz \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$, puis que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 22 : Problème, intégrale sur un rectangle et formule des compléments

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On veut calculer $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx$. On pose $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$ et, pour

$R > 0$, on note Γ_R le bord du rectangle de sommets $-R$, R , $R + 2i\pi$, $-R + 2i\pi$, parcouru dans le sens direct.



1. Justifier la convergence de I .
2. Déterminer les pôles de f . Montrer que $i\pi$ est le seul pôle à l'intérieur du rectangle et que $\text{Res}(f, i\pi) = -e^{i\pi\alpha}$.
3. Montrer que $f(x + 2i\pi) = e^{2i\pi\alpha} f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Exprimer l'intégrale de f sur le côté supérieur à l'aide de $\int_{-R}^R f(x) dx$.
4. Montrer que les intégrales sur les deux côtés verticaux tendent vers 0 quand $R \rightarrow +\infty$.
5. En déduire que $I = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.

6. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$. Vérifier directement le cas $a = \frac{1}{2}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [théorème des résidus, cours de maths en L3](#)
- À maîtriser avant : [Fonctions holomorphes et formule de Cauchy](#)
- Chapitre précédent : [Fonctions holomorphes et formule de Cauchy](#)
- Chapitre suivant : [Espaces de Hilbert et analyse de Fourier](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)