

Théorème des résidus

Corrigé de l'exercice 1 : Série de Laurent d'une fraction rationnelle

1. On cherche α, β tels que $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{\alpha}{z-1} + \frac{\beta}{z-2}$. En multipliant par $z-1$ puis en faisant $z = 1$, on trouve $\alpha = -1$. De même, $\beta = 1$. Donc $f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$.

2. On applique la méthode du cours, terme par terme.

Sur $|z| < 1$, on a $|z| < 1 < 2$. D'une part, $-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$. D'autre part, $\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} = -\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^{n+1}}$. Ainsi, $f(z) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$: c'est une série entière, car f est holomorphe sur $D(0, 1)$.

Sur $1 < |z| < 2$, le terme en $z-2$ garde le même développement. En revanche, $|1/z| < 1$, donc $-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} = -\sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^{n+1}}$. Par conséquent,

$$f(z) = -\sum_{n \geq 1} \frac{1}{z^n} - \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Sur $|z| > 2$, on développe aussi $\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z} = \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{z^{n+1}}$. Donc

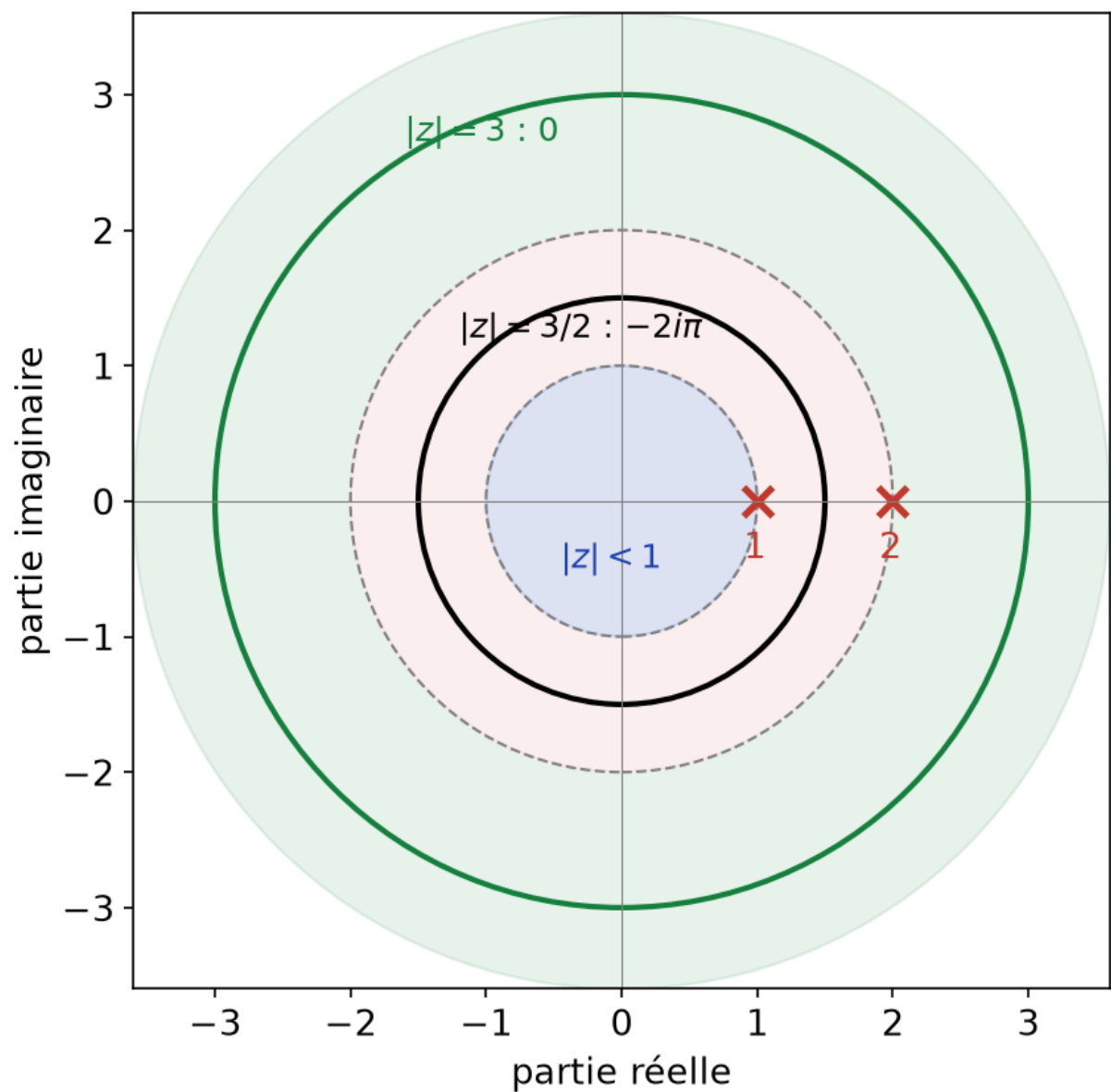
$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}}. \text{ Le terme } n = 0 \text{ est nul, d'où}$$

$$f(z) = \sum_{n \geq 2} \frac{2^{n-1} - 1}{z^n} = \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \dots$$

3. D'après le théorème de Laurent, $\int_{|z|=\rho} f(z) dz = 2i\pi a_{-1}$, où a_{-1} est le coefficient de z^{-1} sur la couronne qui contient le cercle. Le cercle $|z| = \frac{3}{2}$ est dans $1 < |z| < 2$, où $a_{-1} = -1$. Donc $\int_{|z|=3/2} f = -2i\pi$. Le cercle $|z| = 3$ est dans $|z| > 2$, où $a_{-1} = 0$. Donc $\int_{|z|=3} f = 0$.

4. Les pôles 1 et 2 sont simples, avec $\text{Res}(f, 1) = \frac{1}{1-2} = -1$ et $\text{Res}(f, 2) = \frac{1}{2-1} = 1$. Le cercle $|z| = \frac{3}{2}$ n'entoure que 1 : on retrouve $2i\pi \cdot (-1)$. Le cercle $|z| = 3$ entoure les deux pôles : on retrouve $2i\pi(-1 + 1) = 0$. **Les deux méthodes concordent.**

La figure ci-dessous situe les deux cercles d'intégration par rapport aux pôles et aux trois couronnes.



Point de méthode : sur une couronne qui contient tous les pôles, le coefficient a_{-1} est la somme de tous les résidus.

Corrigé de l'exercice 2 : Séries de Laurent en zéro de fonctions usuelles

1. Pour tout $z \neq 0$, $e^{1/z} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$. Donc

$f_1(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{3-n}}{n!} = z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24z} + \frac{1}{120z^2} + \dots$ Une infinité de coefficients d'indice négatif sont non nuls : **0 est une singularité essentielle, et**
 $\text{Res}(f_1, 0) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$.

2. On divise la série du sinus par z^4 : $f_2(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \frac{z}{120} - \dots = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k-3}}{(2k+1)!}$.
 Le coefficient de z^{-3} vaut 1 et il n'y a pas de terme d'indice inférieur. **C'est un pôle d'ordre 3, et** $\text{Res}(f_2, 0) = -\frac{1}{6}$.

3. De même, $\cos(1/z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)! z^{2k}}$, donc
 $f_3(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{1-2k}}{(2k)!} = z - \frac{1}{2z} + \frac{1}{24z^3} - \dots$ Il y a une infinité de puissances négatives. **Singularité essentielle, et le résidu (terme $k = 1$) vaut $-\frac{1}{2}$.**

4. Pour $0 < |z| < 1$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$. Donc
 $f_4(z) = \sum_{n \geq 0} z^{n-2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \dots$ **C'est un pôle d'ordre 2, de résidu 1.**

Corrigé de l'exercice 3 : Classer des singularités isolées

- La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Or $1 - \cos z = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \dots$, donc
 $f(z) = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{24} + \dots$: aucune puissance négative. **0 est une singularité effaçable, et f se prolonge par $f(0) = \frac{1}{2}$.**
- Le dénominateur s'annule en $z_k = 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ces zéros sont simples, car la dérivée e^z ne s'annule pas. En 0, le numérateur a aussi un zéro simple :
 $g(z) = \frac{z}{z + z^2/2 + \dots} \rightarrow 1$, donc la singularité est effaçable. Pour $k \neq 0$, le numérateur vaut $z_k \neq 0$. Ainsi, **0 est effaçable et les $2ik\pi$, $k \neq 0$, sont des pôles simples.**
- On factorise : $z^3 - z^2 - z + 1 = z^2(z-1) - (z-1) = (z-1)^2(z+1)$. Par ailleurs,
 $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$. Donc $h(z) = \frac{1}{z-1}$ pour $z \notin \{1, -1\}$. **Le point -1 est effaçable (on pose $h(-1) = -\frac{1}{2}$) et 1 est un pôle simple.**

4. On a $\sin(1/z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$ sur $\mathbb{C}^*$. Une infinité de coefficients négatifs sont non nuls. **0 est une singularité essentielle.** On peut aussi le voir par les limites : $\sin(1/x)$ n'a pas de limite quand $x \rightarrow 0^+$, et $|\sin(1/(iy))| = \operatorname{sh}(1/y) \rightarrow +\infty$ quand $y \rightarrow 0^+$.
5. Les zéros de $\sin$ sont les $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et ils sont simples car $\cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0$. Ainsi, $\sin^2$ a un zéro double en chaque $k\pi$. **Les $k\pi$ sont des pôles d'ordre 2 de ℓ .**

Corrigé de l'exercice 4 : Calcul de résidus en des pôles

1. On a $z^2 - z = z(z-1)$, avec deux zéros simples, et le numérateur ne s'annule ni en 0 ni en 1. Ce sont donc des pôles simples. Ainsi, $\operatorname{Res}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z+2}{z-1} = -2$ et $\operatorname{Res}(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+2}{z} = 3$. **Les résidus valent -2 et 3.**
2. On a $a^4 = -1$, et a est un zéro simple de $h(z) = z^4 + 1$, car $h'(a) = 4a^3 \neq 0$. D'après la formule $g(a)/h'(a)$, le résidu vaut $\frac{1}{4a^3} = \frac{a}{4a^4} = -\frac{a}{4}$. Donc $\operatorname{Res} = -\frac{e^{i\pi/4}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)$.
3. Le point 1 est un pôle d'ordre 3, car $e^1 \neq 0$. La formule du cours avec $m = 3$ donne $\frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} [e^z]_{z=1} = \frac{e}{2}$. On peut aussi développer : $e^z = e \cdot e^{z-1} = e \left(1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2} + \dots \right)$. **Le résidu vaut $\frac{e}{2}$.**
4. Les zéros de $\sin$ sont les $k\pi$, simples, et $\cos(k\pi) \neq 0$. Ce sont donc des pôles simples, et $\operatorname{Res}(\cot, k\pi) = \frac{\cos(k\pi)}{\sin'(k\pi)} = \frac{\cos(k\pi)}{\cos(k\pi)}$. **Le résidu vaut 1 en chaque $k\pi$.**
5. On a $\frac{z^2}{(z^2+1)^2} = \frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}$, et $i^2 \neq 0$: c'est un pôle double. On pose $\varphi(z) = (z-i)^2 f(z) = \frac{z^2}{(z+i)^2}$. Alors

$$\varphi'(z) = \frac{2z(z+i)^2 - 2z^2(z+i)}{(z+i)^4} = \frac{2z(z+i) - 2z^2}{(z+i)^3} = \frac{2iz}{(z+i)^3}.$$

Ainsi, $\text{Res}(f, i) = \varphi'(i) = \frac{2i \cdot i}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i}$. Donc $\text{Res}(f, i) = -\frac{i}{4}$.

Point de méthode : pour un pôle simple d'un quotient, la formule $g(a)/h'(a)$ évite toute factorisation.

Corrigé de l'exercice 5 : Indice d'un lacet, premiers calculs

1. Le lacet γ est le cercle de centre 2 et de rayon 3, parcouru une fois dans le sens direct. Son indice vaut donc 1 dans le disque ouvert et 0 à l'extérieur. Or $|0 - 2| = 2 < 3$ et $|6 - 2| = 4 > 3$. Donc $\text{Ind}_\gamma(0) = 1$ **et** $\text{Ind}_\gamma(6) = 0$.

2. On a $\sigma'(t) = -3ie^{-3it}$. Donc $\text{Ind}_\sigma(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-3ie^{-3it}}{e^{-3it}} dt = \frac{-3i \cdot 2\pi}{2i\pi}$. **Ainsi,**
 $\text{Ind}_\sigma(0) = -3$: le cercle est parcouru trois fois dans le sens indirect.

3. On décompose : $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)$. Le lacet γ_1 est le cercle de centre 1 et de rayon 1. Ainsi, $\text{Ind}_{\gamma_1}(1) = 1$, et $\text{Ind}_{\gamma_1}(-1) = 0$ car $|-1 - 1| = 2 > 1$. Par définition de l'indice, $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}(2i\pi \cdot 1 - 2i\pi \cdot 0)$. **L'intégrale vaut $i\pi$.**

4. Le lacet γ_2 parcourt deux fois le cercle de rayon 2 dans le sens direct. Donc
 $\text{Ind}_{\gamma_2}(1) = \text{Ind}_{\gamma_2}(-1) = 2$. Par conséquent, $\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}(4i\pi - 4i\pi) = 0$.

Corrigé de l'exercice 6 : Intégrales trigonométriques

1. La fonction $\theta \rightarrow \frac{1}{2 + \cos\theta}$ est continue, car $2 + \cos\theta \geq 1$. On pose $z = e^{i\theta}$, donc

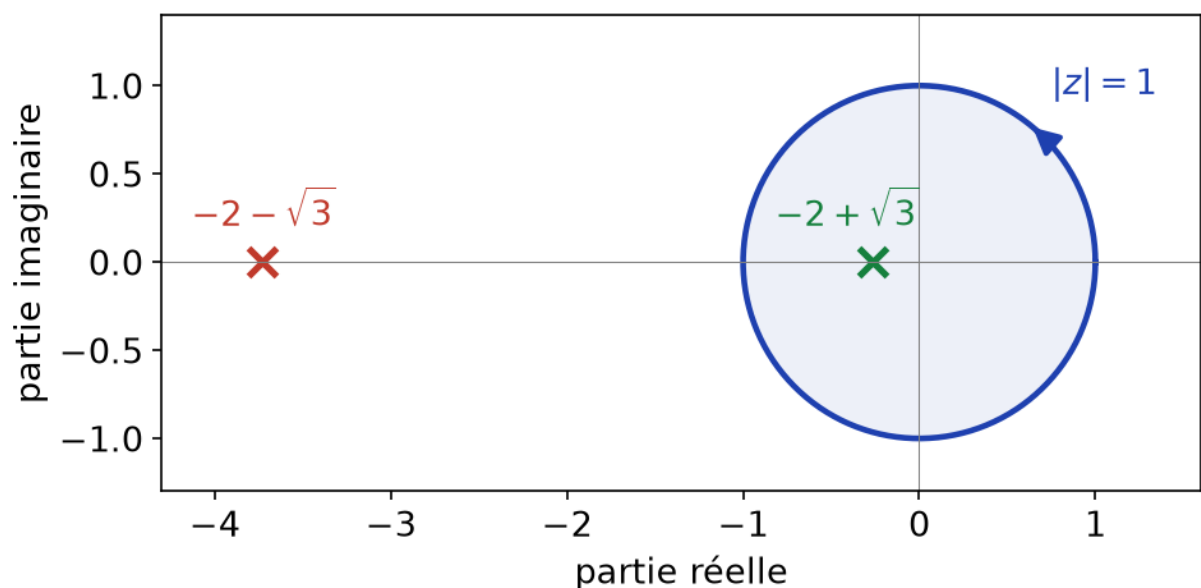
$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ et $d\theta = \frac{dz}{iz}$. Ainsi,

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{2 dz}{i(z^2 + 4z + 1)}.$$

Les racines de $z^2 + 4z + 1$ sont $z_1 = -2 + \sqrt{3}$ et $z_2 = -2 - \sqrt{3}$. Or

$|z_1| = 2 - \sqrt{3} \approx 0,27 < 1$ et $|z_2| > 3$. Seul z_1 est dans le disque, comme le montre la figure ci-dessous. Ensuite, par la formule g/h' , $\text{Res}(z_1) = \frac{2}{i(2z_1 + 4)} = \frac{2}{2i\sqrt{3}} = \frac{1}{i\sqrt{3}}$.

Donc $I = 2i\pi \cdot \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.



2. La fonction est continue, car $5 - 4\cos\theta \geq 1$. Soit $K = \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{5 - 4\cos\theta} d\theta$, de sorte que $J = \text{Re } K$. Avec $z = e^{i\theta}$, on a $5 - 4\cos\theta = 5 - 2z - \frac{2}{z} = -\frac{2z^2 - 5z + 2}{z}$. Donc

$$K = \int_{|z|=1} \frac{z^2 \cdot z}{-(2z^2 - 5z + 2)} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{-z^2 dz}{i(2z-1)(z-2)}.$$

Le seul pôle intérieur est $\frac{1}{2}$, pôle simple. Son résidu vaut $\frac{-1/4}{i \cdot 2 \cdot (\frac{1}{2} - 2)} = \frac{-1/4}{-3i} = \frac{1}{12i}$. Ainsi,
 $K = 2i\pi \cdot \frac{1}{12i} = \frac{\pi}{6}$. Ce nombre est réel, donc $J = \frac{\pi}{6}$ (et au passage
 $\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{5 - 4\cos\theta} d\theta = 0$).

Corrigé de l'exercice 7 : Principe de l'argument sur un exemple

1. Le numérateur et le dénominateur n'ont pas de racine commune. Ainsi, f a **un zéro triple en 1**, **un zéro simple en -3** , **un pôle double en 0** et **un pôle simple en $3i$** .
2. Sur le cercle $|z| = 2$, il n'y a ni zéro ni pôle. Dans le disque, on trouve le zéro 1 (ordre 3) et le pôle 0 (ordre 2). En revanche, -3 et $3i$ sont à l'extérieur. D'après le principe de l'argument, **l'intégrale vaut $Z - P = 3 - 2 = 1$** .
3. Sur $|z| = 4$, tous les zéros et pôles sont intérieurs : $Z = 3 + 1 = 4$ et $P = 2 + 1 = 3$. **L'intégrale vaut 1**. Sur $|z| = \frac{1}{2}$, seul le pôle double 0 est intérieur : **l'intégrale vaut -2** .

Point de méthode : on peut vérifier par la dérivée logarithmique $\frac{f'}{f} = \frac{3}{z-1} + \frac{1}{z+3} - \frac{2}{z} - \frac{1}{z-3i}$, dont chaque terme se traite par l'indice.

Corrigé de l'exercice 8 : Critère de Riemann et singularités effaçables

1. Soit $n \geq 1$ et $0 < \rho < 1$. D'après le théorème de Laurent,

$a_{-n} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=\rho} f(z) z^{n-1} dz$. On majore l'intégrande par $C\rho^{-1/2}\rho^{n-1}$ et la longueur par $2\pi\rho$. Donc $|a_{-n}| \leq C\rho^{n-1/2}$. Comme $n - \frac{1}{2} > 0$, le majorant tend vers 0 quand $\rho \rightarrow 0$. Ainsi, $a_{-n} = 0$ pour tout $n \geq 1$. **La singularité est effaçable.**

2. Le même calcul donne $|a_{-n}| \leq C\rho^{n-3/2}$. Pour $n \geq 2$, l'exposant est positif, donc $a_{-n} = 0$. Il ne reste que a_{-1} éventuellement non nul. **Donc 0 est effaçable ou pôle simple.** La fonction $1/z$ montre que le cas du pôle simple se produit.

3. Posons $F = e^f$. Elle ne s'annule pas sur $D(0, 1) \setminus \{0\}$. Supposons par l'absurde que 0 ne soit pas essentielle pour F . Alors F est effaçable ou a un pôle en 0, et F n'est pas nulle. On peut donc écrire $F(z) = z^k G(z)$ avec $k \in \mathbb{Z}$, G holomorphe près de 0 et $G(0) \neq 0$. D'après le lemme du cours, F'/F a en 0 au plus un pôle simple.

Or $F'/F = f'$. Si f a un pôle d'ordre $m \geq 1$, avec $f(z) = \sum_{n \geq -m} a_n z^n$ et $a_{-m} \neq 0$, alors $f'(z) = -m a_{-m} z^{-m-1} + \dots$. Ainsi, f' a un pôle d'ordre $m+1 \geq 2$. C'est une contradiction. **Donc e^f a une singularité essentielle en 0.** Par exemple, $e^{1/z}$ en est le cas le plus simple.

Corrigé de l'exercice 9 : Singularités essentielles et Casorati-Weierstrass

1. Comme $w \neq 0$, il existe $L \in \mathbb{C}$ tel que $e^L = w$ (par exemple $L = \ln|w| + i \arg w$). Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $\zeta_k = L + 2ik\pi$. On a $|\zeta_k| \geq 2k\pi - |L|$, qui tend vers $+\infty$. Donc, pour k assez grand, $\zeta_k \neq 0$ et $|\zeta_k| > 1/\rho$. On pose alors $z = 1/\zeta_k$. Ainsi, $0 < |z| < \rho$ et $e^{1/z} = e^{L + 2ik\pi} = w$. **Toute valeur non nulle est atteinte dans tout disque épointé.**

2. L'exponentielle ne s'annule jamais, donc $e^{1/z}$ **ne prend pas la valeur 0**. Ce n'est pas une contradiction : le théorème de Casorati-Weierstrass affirme la densité de l'image, pas sa surjectivité. D'ailleurs, 0 est bien limite de valeurs, car $e^{1/x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^-$. (Remarque hors programme : le grand théorème de Picard affirme qu'au voisinage d'une singularité essentielle, toutes les valeurs sauf une au plus sont atteintes.)

3. Soit $w \in \mathbb{C}$ et $n \geq 2$. D'après Casorati-Weierstrass, $f(D(0, 1/n) \setminus \{0\})$ est dense dans $\mathbb{C}$

. Il rencontre donc le disque $D(w, 1/n)$. On choisit z_n tel que $0 < |z_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(z_n) - w| < \frac{1}{n}$. Par conséquent, $z_n \rightarrow 0$ et $f(z_n) \rightarrow w$.

4. Pour tout z , $\operatorname{Re}(g(z) + 1) > 1$, donc $|g(z) + 1| > 1$. Autrement dit, g ne prend aucune valeur du disque $D(-1, 1)$. L'image de g n'est donc pas dense. D'après le théorème de Casorati-Weierstrass, par contraposée, 0 n'est pas une singularité essentielle de g . On peut préciser : $\frac{1}{g+1}$ est bornée par 1, donc effaçable, et g est effaçable ou a un pôle en 0 .

Corrigé de l'exercice 10 : Fonctions méromorphes et dérivée logarithmique

- Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont entières, et $\cos$ n'est pas identiquement nulle. Ses zéros sont les $a_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$: ils sont isolés et forment un fermé. De plus, ils sont simples, car $\cos'(a_k) = -\sin(a_k) = (-1)^{k+1} \neq 0$. Comme $\sin(a_k) \neq 0$, ce sont des pôles simples de $\tan$. La formule g/h' donne $\operatorname{Res}(\tan, a_k) = \frac{\sin a_k}{-\sin a_k}$. **$\tan$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, à pôles simples $\frac{\pi}{2} + k\pi$, tous de résidu -1 .**
- Les zéros de $e^z - 1$ sont les $2ik\pi$. Ils sont simples car la dérivée e^z ne s'annule pas. Ainsi, $\frac{1}{e^z - 1}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples en $2ik\pi$. **Chaque résidu vaut $\frac{1}{e^{2ik\pi}} = 1$.**
- Dans le premier cas, $f(z) = (z-a)^k g(z)$, avec g holomorphe et $g(a) \neq 0$. Dans le second cas, $f(z) = (z-a)^{-m} g(z)$ avec les mêmes conditions. Notons $j = k$ ou $j = -m$. En dérivant, $f'(z) = j(z-a)^{j-1} g(z) + (z-a)^j g'(z)$. Donc $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{j}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$. Le second terme est holomorphe près de a , car $g(a) \neq 0$. **Ainsi, f'/f a un pôle simple de résidu k (zéro d'ordre k) ou $-m$ (pôle d'ordre m).**
- Pour $f = \sin$, on a $f'/f = \cot$, de résidu 1 en $k\pi$ d'après l'exercice 4 : c'est bien l'ordre du zéro simple. Pour $f = \tan$, $\frac{f'}{f} = \frac{1 + \tan^2}{\tan} = \frac{1}{\sin z \cos z} = \frac{2}{\sin(2z)}$. En $\frac{\pi}{2}$, la formule g/h' donne $\frac{2}{2\cos \pi} = -1$, l'opposé de l'ordre du pôle simple. En 0 , on obtient $\frac{2}{2\cos 0} = 1$, l'ordre du zéro simple. **Le résultat est vérifié.**

Corrigé de l'exercice 11 : Série de Laurent autour d'un pôle double

1. Avec $z = 1 + u$, on a $f = \frac{1}{u^2(1+u)}$. Pour $0 < |u| < 1$, $\frac{1}{1+u} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n u^n$.

Donc

$$f = \sum_{n \geq 0} (-1)^n u^{n-2} = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} + 1 - u + \dots$$

Le coefficient de u^{-2} est non nul et il n'y a pas de terme d'indice inférieur. **Le point 1 est un pôle double et $\text{Res}(f, 1) = -1$.**

2. Pour $|u| > 1$, on écrit $\frac{1}{1+u} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{1+1/u} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{u^{n+1}}$. Donc

$$f = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{u^{n+3}} = \frac{1}{u^3} - \frac{1}{u^4} + \frac{1}{u^5} - \dots$$

3. Le point 0 est un pôle simple et $\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z-1)^2} = 1$. Sur la couronne $|u| > 1$, le coefficient de u^{-1} est nul. Or il vaut $\frac{1}{2i\pi} \int_{|u|=2} f$, c'est-à-dire la somme des résidus en 0 et en 1. Et en effet, $1 + (-1) = 0$: **les résultats sont cohérents.**

4. Le cercle $|z-1| = \frac{1}{2}$ n'entoure que le pôle 1, donc $\int_{|z-1|=1/2} f = 2i\pi \cdot (-1) = -2i\pi$.
Le cercle $|z-1| = 2$ entoure 0 et 1, donc $\int_{|z-1|=2} f = 0$.

Corrigé de l'exercice 12 : Somme de tous les résidus d'une fraction rationnelle

- Posons $d = \deg Q - \deg P \geq 2$. Il existe $c > 0$ et R_0 tels que $|F(z)| \leq \frac{c}{|z|^2}$ pour $|z| \geq R_0$. Ainsi, $\left| \int_{|z|=R} F \right| \leq 2\pi R \cdot \frac{c}{R^2} = \frac{2\pi c}{R}$, qui tend vers 0. Par ailleurs, dès que R dépasse le module de tous les pôles, le théorème des résidus donne $\int_{|z|=R} F = 2i\pi \sum_a \text{Res}(F, a)$. Cette quantité ne dépend pas de R et tend vers 0 : elle est nulle. **La somme de tous les résidus est nulle.**
- On écrit $F(z) = \frac{p z^k + \dots}{q z^{k+1} + \dots}$. Alors $z F(z) \rightarrow \frac{p}{q}$, et plus précisément $F(z) - \frac{p}{qz} = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$, car c'est une fraction de degré au plus -2 . D'après la question précédente appliquée à cette fraction (ou par la même majoration), son intégrale sur $|z| = R$ tend vers 0. Or $\int_{|z|=R} \frac{p}{qz} dz = 2i\pi \frac{p}{q}$. Donc $\int_{|z|=R} F \rightarrow 2i\pi \frac{p}{q}$. Comme plus haut, cette intégrale vaut $2i\pi \sum \text{Res}$ pour R grand. **La somme des résidus vaut $\frac{p}{q}$.**
- La fraction $\frac{1}{z^5(z-3)}$ vérifie $\deg Q - \deg P = 6$. Ses pôles sont 0 (ordre 5) et 3 (simple). On a $\text{Res}(3) = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$. D'après la question 1, $\text{Res}(0) = -\frac{1}{243}$. Le cercle $|z| = 2$ n'entoure que 0. Donc $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^5(z-3)} = -\frac{2i\pi}{243}$. On évite ainsi une dérivée quatrième.
- Première méthode : les pôles sont les six racines sixièmes de l'unité, toutes simples et de module $1 < 3$. En chacune, $\text{Res} = \frac{\omega^5}{6\omega^5} = \frac{1}{6}$. La somme vaut 1. Seconde méthode : $\deg Q = \deg P + 1$ et $p = q = 1$, donc la somme des résidus vaut 1 d'après la question 2. **Dans les deux cas, l'intégrale vaut $2i\pi$.**

Corrigé de l'exercice 13 : Intégrales de fractions rationnelles

sur la droite réelle

1. La fonction $F(x) = \frac{1}{1+x^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et équivalente à $\frac{1}{x^4}$ en $\pm\infty$: l'intégrale converge. Les pôles de F sont les racines de $z^4 = -1$, à savoir $e^{i\pi/4}$, $e^{3i\pi/4}$, $e^{5i\pi/4}$, $e^{7i\pi/4}$. Aucun n'est réel. De plus, $\deg Q - \deg P = 4 \geq 2$. Pour $R > 1$, le contour « segment $[-R, R]$ puis demi-cercle C_R » entoure $a_1 = e^{i\pi/4}$ et $a_2 = e^{3i\pi/4}$. D'après l'exercice 4, $\text{Res}(F, a) = -\frac{a}{4}$. Or

$$a_1 + a_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = i\sqrt{2}. \text{ Ensuite, } \int_{C_R} F \rightarrow 0, \text{ car}$$
$$|zF(z)| \leq \frac{R}{R^4-1} \text{ sur } C_R. \text{ En faisant } R \rightarrow +\infty :$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2i\pi \cdot \left(-\frac{i\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

L'intégrale vaut $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

2. Le seul pôle du demi-plan supérieur est i , pôle double. Avec $\varphi(z) = (z-i)^2 F(z) = (z+i)^{-2}$, on obtient $\varphi'(i) = -2(2i)^{-3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i}$. Les hypothèses de la proposition du cours sont remplies ($\deg Q - \deg P = 4$). **Donc l'intégrale vaut $2i\pi \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$.**

3. La fonction $G(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$ est paire, continue, équivalente à $\frac{1}{x^2}$ à l'infini, et $\deg Q - \deg P = 2$. En un pôle a , $\text{Res}(G, a) = \frac{a^2}{4a^3} = \frac{1}{4a} = \frac{\bar{a}}{4}$, car $|a| = 1$. Donc la somme des résidus supérieurs vaut $\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{4} = \frac{-i\sqrt{2}}{4}$. Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} G = 2i\pi \cdot \frac{-i\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Par parité, $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

Corrigé de l'exercice 14 : Transformée de Fourier par les résidus

1. On a $\left| \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} \right| = \frac{1}{1+x^2}$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. L'intégrale converge donc absolument. Ensuite, $e^{-ix\xi} = \cos(x\xi) - i\sin(x\xi)$. La fonction $x \rightarrow \frac{\sin(x\xi)}{1+x^2}$ est impaire et intégrable, d'intégrale nulle. **Donc** $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x\xi)}{1+x^2} dx$, **et** $\widehat{f}$ **est paire** puisque le cosinus l'est.

2. Sur C_R , $z = Re^{it}$ avec $t \in [0, \pi]$. Donc $|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda R \sin t} \leq 1$, car $\sin t \geq 0$ et $\lambda > 0$. De plus, $|1+z^2| \geq R^2 - 1$ pour $R > 1$. Ainsi, $\left| \int_{C_R} \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1}$. **Ce majorant tend vers 0**. Le lemme de Jordan n'est même pas nécessaire ici.

3. Soit $\lambda > 0$ et $g(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2}$. Pour $R > 1$, le contour du demi-disque supérieur n'entoure que le pôle simple i . Son résidu vaut $\frac{e^{i\lambda i}}{2i} = \frac{e^{-\lambda}}{2i}$. Par le théorème des résidus,

$$\int_{-R}^R g(x) dx + \int_{C_R} g = \pi e^{-\lambda}. \text{ En faisant } R \rightarrow +\infty, \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-\lambda}.$$

Autrement dit, $\widehat{f}(-\lambda) = \pi e^{-\lambda}$. Par parité, $\widehat{f}(\lambda) = \pi e^{-\lambda}$ aussi. Enfin,

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi. \text{ Donc } \widehat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|} \text{ pour tout réel } \xi.$$

4. Avec $\xi = 1$, $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$. La fonction est paire, donc $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}$.

Corrigé de l'exercice 15 : Intégrale de Dirichlet par un contour indenté

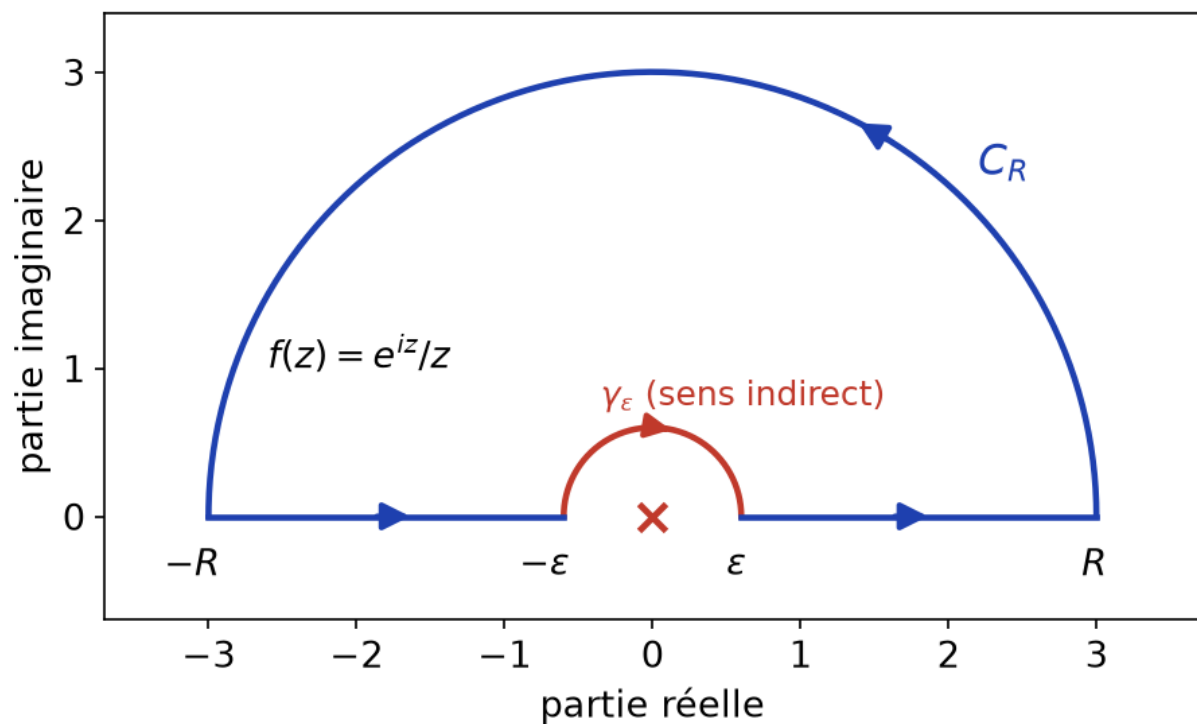
1. La fonction $\frac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1. Il suffit donc d'étudier $\int_1^A$.

Par intégration par parties, $\int_1^A \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx$. Le crochet tend vers

$\cos 1$. De plus, $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc $\int_0^A \frac{\sin x}{x} dx$ a une limite

finie.

2. La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Le lacet évite 0 et reste dans l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{iy : y \leq 0\}$. Cet ouvert est étoilé par rapport à i , donc simplement connexe, et $f|_y$ est holomorphe. D'après le théorème de Cauchy, l'intégrale de f sur ce lacet est nulle. La figure ci-dessous représente le contour.



3. Dans l'intégrale sur $[-R, -\epsilon]$, on pose $x = -y$, donc $dx = -dy$, et y va de R à ϵ

. Ainsi, $\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_R^{\epsilon} \frac{e^{-iy}}{-y} (-dy) = -\int_{\epsilon}^R \frac{e^{-iy}}{y} dy$. En ajoutant, on obtient

$$\int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx. \text{ C'est bien } 2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx.$$

4. Sur C_R , $|1/z| = 1/R$, qui tend vers 0. D'après le lemme de Jordan, $\int_{C_R} f \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow +\infty$. Ensuite, 0 est un pôle simple de f , de résidu $e^0 = 1$. L'arc γ_ε va de $-\varepsilon$ à ε par le haut : l'angle t passe de π à 0, soit une variation $\theta = -\pi$. D'après le lemme du petit arc, $\int_{\gamma_\varepsilon} f \rightarrow -i\pi$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

5. La question 2 donne $2i \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{C_R} f + \int_{\gamma_\varepsilon} f = 0$. En faisant $\varepsilon \rightarrow 0$ puis $R \rightarrow +\infty$, on obtient $2iI - i\pi = 0$. **Donc** $I = \frac{\pi}{2}$.

Pour la seconde intégrale, on intègre par parties sur $[\varepsilon, A]$, avec $u = \sin^2 x$ et $v = -\frac{1}{x}$. On a $\int_\varepsilon^A \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \left[-\frac{\sin^2 x}{x} \right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx$. Le crochet tend vers 0 aux deux bornes, car $\frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon} \sim \varepsilon$. Par ailleurs, $2 \sin x \cos x = \sin(2x)$, et le changement $u = 2x$ donne $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$. **Donc** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

Point de méthode : on intègre e^{iz}/z et non $\sin z/z$, car $|\sin z|$ explose dans le demi-plan supérieur alors que $|e^{iz}| \leq 1$.

Corrigé de l'exercice 16 : Intégrale sur un secteur angulaire

- La fonction $x \rightarrow \frac{1}{1+x^n}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, et majorée par $\frac{1}{x^n}$ avec $n \geq 2$. **L'intégrale converge.**
- Les pôles sont les racines de $z^n = -1$, à savoir $e^{i(2k+1)\pi/n}$, $0 \leq k \leq n-1$. Leurs arguments sont $\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \dots$. Seul $\frac{\pi}{n}$ est strictement compris entre 0 et $\frac{2\pi}{n}$, et aucun pôle n'est sur les bords. Pour $R > 1$, le seul pôle intérieur est donc a . Il est simple, et $\text{Res} = \frac{1}{n a^{n-1}} = \frac{a}{n a^n}$. **Comme** $a^n = -1$, **le résidu vaut** $-\frac{a}{n}$.
- Sur l'arc, $|1+z^n| \geq R^n - 1$, et la longueur vaut $\frac{2\pi R}{n}$. Donc l'intégrale est majorée par

$\frac{2\pi R}{n(R^n - 1)}$. Ce majorant tend vers 0, car $n \geq 2$.

4. On paramètre le segment par $z = r\omega$, r allant de R à 0. Or $z^n = r^n \omega^n = r^n$.

Donc l'intégrale vaut $\int_R^0 \frac{\omega dr}{1+r^n} = -\omega \int_0^R \frac{dr}{1+r^n}$.

5. Le théorème des résidus donne, pour $R > 1$: $(1-\omega) \int_0^R \frac{dr}{1+r^n} + \int_{\text{arc}} = 2i\pi(-\frac{a}{n})$. À la

limite, $(1-\omega) I_n = -\frac{2i\pi a}{n}$. Or $\omega = a^2$, donc

$1-\omega = -a(a-a^{-1}) = -a \cdot 2i \sin \frac{\pi}{n}$. Par conséquent :

$$I_n = \frac{-2i\pi a}{n \cdot (-2ia) \sin(\pi/n)} = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}.$$

Pour $n = 2$, on retrouve $\frac{\pi}{2 \sin(\pi/2)} = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Pour $n = 4$, on retrouve $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, la moitié du résultat de l'exercice 13.

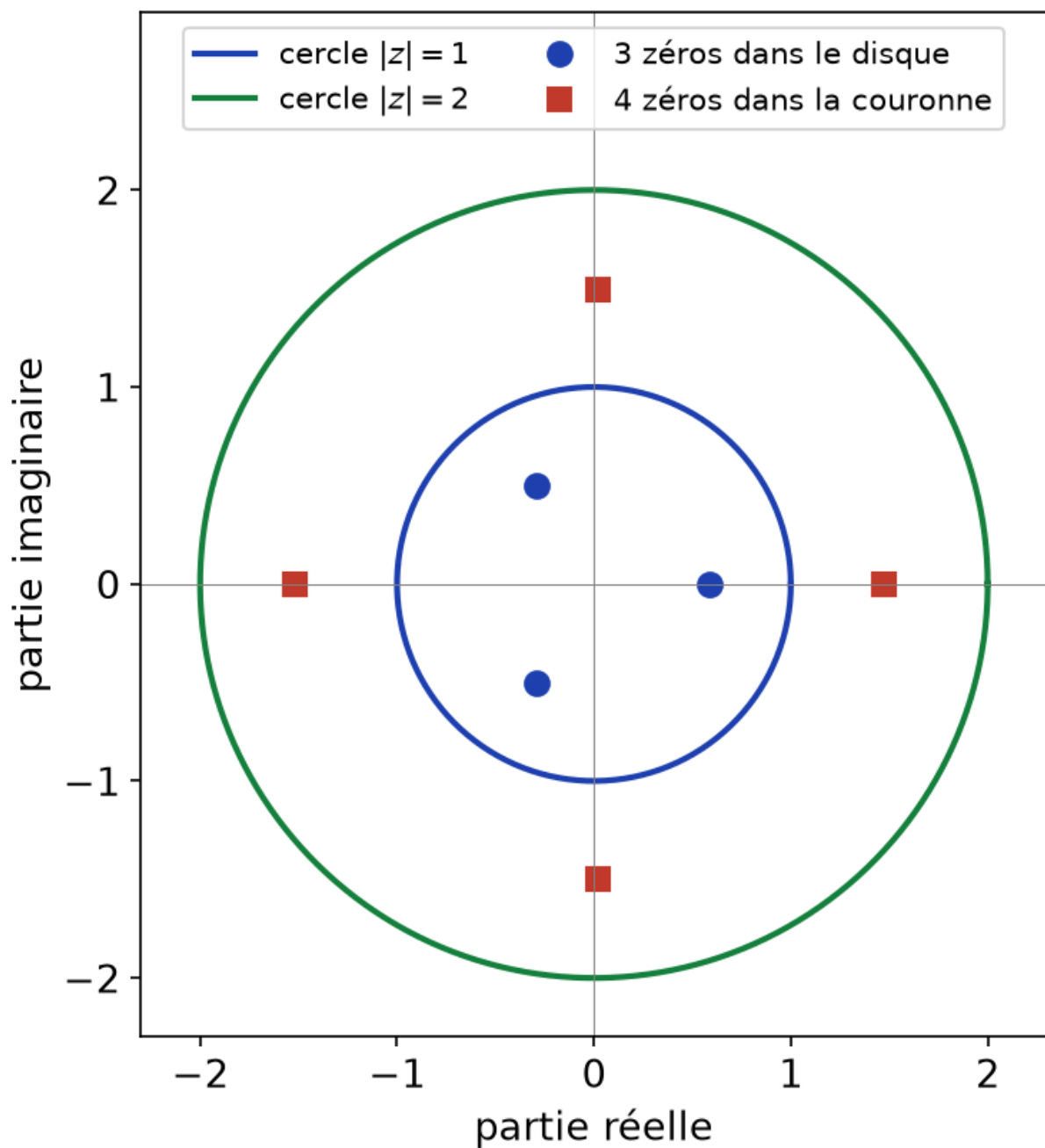
Corrigé de l'exercice 17 : Zéros d'un polynôme dans une couronne

- On prend $f(z) = -5z^3$ et $g(z) = z^7 + 1$. Sur $|z| = 1$,
 $|g(z)| \leq 1 + 1 = 2 < 5 = |f(z)|$. D'après le théorème de Rouché, $P = f + g$ a autant de zéros que f dans $D(0, 1)$. **Donc P a exactement trois zéros dans le disque unité** (le zéro triple de f compte pour trois).
- On prend maintenant $f(z) = z^7$ et $g(z) = -5z^3 + 1$. Sur $|z| = 2$,
 $|g(z)| \leq 40 + 1 = 41 < 128 = |f(z)|$. **Donc P a sept zéros dans $D(0, 2)$, c'est-à-dire tous.**
- Pour $|z| = 1$, $|P(z)| \geq |5z^3| - |z^7 + 1| \geq 5 - 2 = 3 > 0$. De même, P ne s'annule pas

sur $|z| = 2$. Par conséquent, **la couronne** $1 < |z| < 2$ **contient** $7 - 3 = 4$ **zéros**.

4. La fonction P est continue sur $[0, 1]$, avec $P(0) = 1 > 0$ et $P(1) = -3 < 0$. **Le théorème des valeurs intermédiaires donne un zéro réel dans $]0, 1[$.**

La figure ci-dessous place les sept zéros, calculés numériquement : trois dans le disque unité et quatre dans la couronne, conformément au calcul.



Corrigé de l'exercice 18 : Rouché et l'équation $e^z = 3z$

1. On pose $f(z) = 3z$ et $g(z) = -e^z$. Sur $|z| = 1$, $|g(z)| = e^{\operatorname{Re} z} \leq e < 3 = |f(z)|$. D'après le théorème de Rouché, $3z - e^z$ a autant de zéros que $3z$ dans $D(0, 1)$. **L'équation a exactement une solution dans le disque unité.**
2. Soit $\varphi(x) = e^x - 3x$ sur $[0, 1]$. Elle est continue, avec $\varphi(0) = 1 > 0$ et $\varphi(1) = e - 3 < 0$. Elle s'annule donc en un réel $x_0 \in]0, 1[$, qui est une solution dans le disque. Par unicité, **l'unique solution est ce réel $x_0 \in]0, 1[$.**
3. On pose $f(z) = 3z^n$ et $g(z) = -e^z$. Sur $|z| = 1$, $|g| \leq e < 3 = |f|$. Or f a un zéro d'ordre n en 0 . **Donc $3z^n - e^z$ a exactement n zéros dans $D(0, 1)$, comptés avec multiplicité.**
4. Soit $h(z) = e^z - 3z^n$ et z_0 un zéro dans le disque. Alors $h'(z_0) = e^{z_0} - 3nz_0^{n-1} = 3z_0^n - 3nz_0^{n-1} = 3z_0^{n-1}(z_0 - n)$. Or $z_0 \neq 0$, car $h(0) = 1$, et $z_0 \neq n$, car $|z_0| < 1 \leq n$. Ainsi, $h'(z_0) \neq 0$. **Les n solutions sont simples, donc distinctes.**

Corrigé de l'exercice 19 : Théorème de d'Alembert-Gauss par Rouché

1. Soit $|z| = R$, avec $R = 1 + S \geq 1$. Pour $k \leq n-1$, $R^k \leq R^{n-1}$. Ainsi, $|P(z) - z^n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k \leq S R^{n-1}$. Or $S < R$, donc $S R^{n-1} < R^n$. **On a bien $|P(z) - z^n| < |z^n|$ sur le cercle.**
2. On applique Rouché avec $f(z) = z^n$ et $g = P - z^n$. Ainsi, $P = f + g$ a autant de zéros que z^n dans $D(0, R)$, à savoir n . Notons-les $z_1, \dots, z_n$, répétés selon leur multiplicité. Le polynôme $\prod_{j=1}^n (z - z_j)$ divise P et a le même degré et le même coefficient dominant. **Donc $P = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$ est scindé sur $\mathbb{C}$.**

3. Soit z tel que $|z| > \max(1, S)$. Comme $|z| > 1$, $|z|^k \leq |z|^{n-1}$ pour $k \leq n-1$. Donc $|P(z)| \geq |z|^n - \sum_k |a_k| |z|^k \geq |z|^{n-1}(|z| - S) > 0$. **Tout zéro vérifie donc $|z| \leq \max(1, S)$.**
4. Ici $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, donc les trois zéros sont dans le disque fermé $\overline{D}(0, 1)$. Plus précisément, sur $|z| = 1$, $\left| -\frac{z}{2} + \frac{1}{4} \right| \leq \frac{3}{4} < 1$: les trois zéros sont dans le disque ouvert. Enfin, sur $|z| = \frac{1}{4}$, on compare avec la constante $\frac{1}{4}$: $\left| z^3 - \frac{z}{2} \right| \leq \frac{1}{64} + \frac{1}{8} = \frac{9}{64} < \frac{16}{64}$. La constante n'a aucun zéro. **Les trois zéros sont donc dans la couronne $\frac{1}{4} < |z| < 1$.**

Corrigé de l'exercice 20 : Indice d'un limaçon et principe de l'argument

1. On factorise par e^{it} : $1 + e^{it} + e^{2it} = e^{it}(e^{-it} + 1 + e^{it}) = e^{it}(1 + 2\cos t)$. **Donc $\gamma(t) = (1 + 2\cos t)e^{it}$.** Pour $t = \frac{2\pi}{3}$, $1 + 2\cos t = 0$, donc $\gamma\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$ et $0 \in \gamma^*$.
2. Si $|w| = 1$, on écrit $w = e^{it}$. Alors $P_a(w) = \gamma(t) - a$, qui est non nul puisque $a \notin \gamma^*$. **Donc P_a ne s'annule pas sur le cercle unité.**
3. On a $\gamma(t) - a = P_a(e^{it})$ et $\gamma'(t) = P'_a(e^{it}) ie^{it}$. Ainsi,

$$\text{Ind } \gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'_a(e^{it}) ie^{it}}{P_a(e^{it})} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=1} \frac{P'_a(w)}{P_a(w)} dw.$$

Le polynôme P_a est holomorphe, sans pôle, et ne s'annule pas sur le cercle. D'après le principe de l'argument, cette intégrale vaut le nombre de zéros de P_a dans $D(0, 1)$. **Donc $\text{Ind } \gamma(a)$ est le nombre de racines de P_a de module strictement inférieur à 1.**

4. Pour $a = \frac{1}{2}$, $P_a(w) = w^2 + w + \frac{1}{2}$, de racines $\frac{-1 \pm i}{2}$, de module $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. Donc

$\text{Ind}_\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Pour $a = 2$, $P_a(w) = w^2 + w - 1$, de racines $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$: 0,618... est intérieure, -1,618... est extérieure. Donc $\text{Ind}_\gamma(2) = 1$. Pour $a = -1$, $P_a(w) = w^2 + w + 2$, de discriminant -7 . Ses racines sont conjuguées, de produit 2, donc de module $\sqrt{2} > 1$. Ainsi, $\text{Ind}_\gamma(-1) = 0$.

Ces valeurs correspondent à la figure. En effet, $\frac{1}{2}$ est dans la petite boucle, entourée deux fois ; 2 est entre les deux boucles ; -1 est à l'extérieur, puisque l'abscisse minimale du limaçon est $\min_c (c + 2c^2) = -\frac{1}{8}$, atteinte pour $c = \cos t = -\frac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 21 : Somme de la série des inverses des carrés

1. Les zéros de $\sin(\pi z)$ sont les entiers, et ils sont simples. Donc $\pi \cot(\pi z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ a des pôles simples aux entiers, de résidu $\frac{\pi \cos(\pi n)}{\pi \cos(\pi n)} = 1$. Pour $n \neq 0$, le facteur $\frac{1}{z^2}$ est holomorphe et non nul en n . **Ainsi, les pôles de f sont les entiers, et $\text{Res}(f, n) = \frac{1}{n^2}$ pour $n \neq 0$.**

2. Au voisinage de 0, $\sin(\pi z) = \pi z \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{6} + O(z^4)\right)$ et $\cos(\pi z) = 1 - \frac{\pi^2 z^2}{2} + O(z^4)$. Donc

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{2}\right) \left(1 + \frac{\pi^2 z^2}{6}\right) + O(z^3) = \frac{1}{z} - \frac{\pi^2}{3} z + O(z^3).$$

En divisant par z^2 , $f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{1}{z} + O(z)$. **Le point 0 est un pôle triple et $\text{Res}(f, 0) = -\frac{\pi^2}{3}$.**

3. On a $\sin(\pi x + i\pi y) = \sin(\pi x)\text{ch}(\pi y) + i\cos(\pi x)\text{sh}(\pi y)$. Donc $|\sin(\pi z)|^2 = \sin^2(\pi x)(1 + \text{sh}^2(\pi y)) + \cos^2(\pi x)\text{sh}^2(\pi y) = \sin^2(\pi x) + \text{sh}^2(\pi y)$. De même, $\cos(\pi z) = \cos(\pi x)\text{ch}(\pi y) - i\sin(\pi x)\text{sh}(\pi y)$ donne $|\cos(\pi z)|^2 = \cos^2(\pi x) + \text{sh}^2(\pi y)$.

Sur les côtés verticaux, $x = \pm\left(N + \frac{1}{2}\right)$, donc $\sin^2(\pi x) = 1$ et $\cos^2(\pi x) = 0$. Ainsi,

$$|\cot(\pi z)|^2 = \frac{\operatorname{sh}^2(\pi y)}{1 + \operatorname{sh}^2(\pi y)} \leq 1. \text{ Sur les côtés horizontaux, } |y| = N + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}. \text{ Donc}$$

$$|\cot(\pi z)|^2 \leq \frac{1 + \operatorname{sh}^2(\pi y)}{\operatorname{sh}^2(\pi y)} = \coth^2(\pi |y|) \leq \coth^2\left(\frac{3\pi}{2}\right). \text{ Or } \coth\left(\frac{3\pi}{2}\right) \approx 1,0002.$$

Dans tous les cas, $|\cot(\pi z)| \leq 2$ sur C_N .

4. Sur C_N , $|z| \geq N + \frac{1}{2}$, donc $|f(z)| \leq \frac{2\pi}{(N + 1/2)^2}$. La longueur de C_N vaut

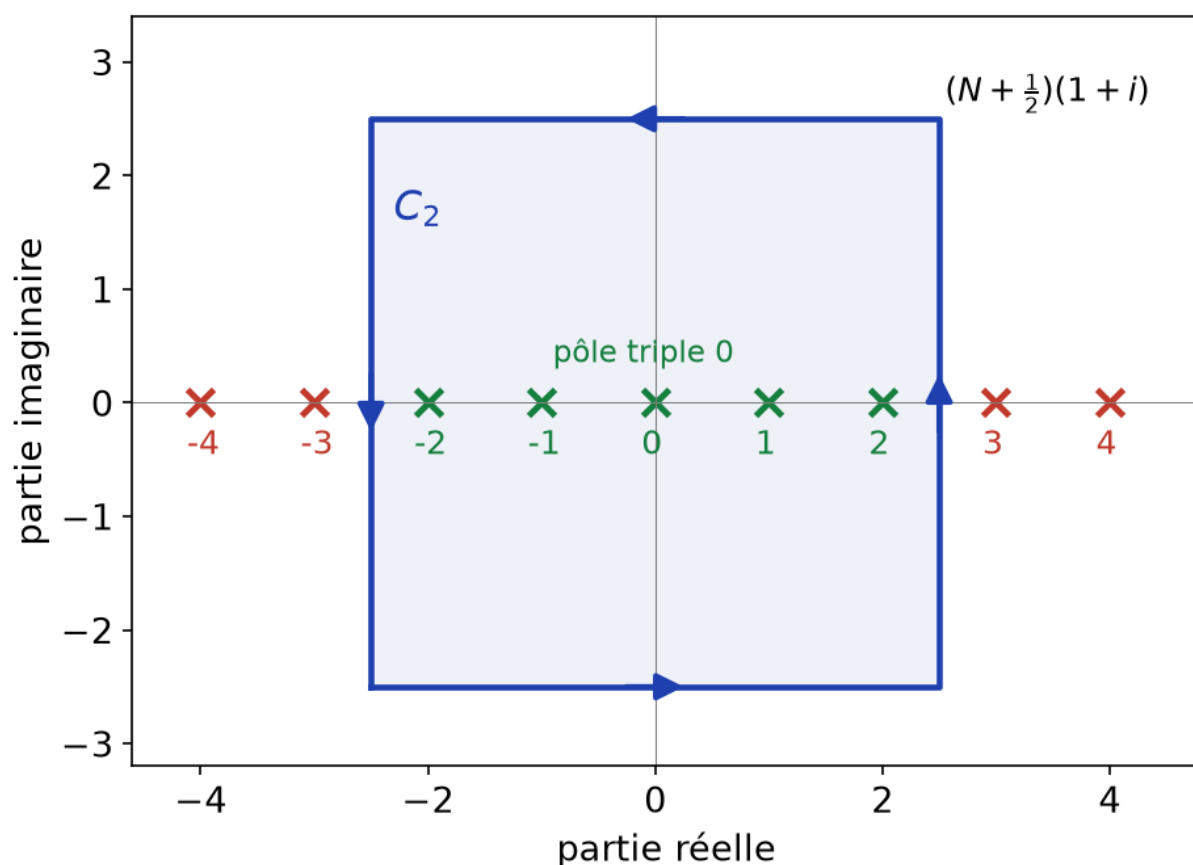
$$8\left(N + \frac{1}{2}\right). \text{ Ainsi, } \left| \int_{C_N} f \right| \leq \frac{16\pi}{N + 1/2}, \text{ qui tend vers } 0. \text{ Par ailleurs, } C_N \text{ entoure}$$

exactement les entiers n tels que $|n| \leq N$, et ne passe par aucun pôle. Le théorème des résidus donne donc

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_N} f = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{0 < |n| \leq N} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}.$$

En faisant $N \rightarrow +\infty$, $2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$. **Donc** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

La figure ci-dessous montre le carré C_2 et les pôles qu'il entoure.



Corrigé de l'exercice 22 : Problème, intégrale sur un rectangle et formule des compléments

- La fonction $x \rightarrow \frac{e^{ax}}{1+e^x}$ est continue et positive. En $+\infty$, elle est équivalente à $e^{(a-1)x}$, intégrable car $a < 1$. En $-\infty$, elle est équivalente à e^{ax} , intégrable car $a > 0$.
L'intégrale I converge.
- On a $1 + e^z = 0$ si et seulement si $e^z = e^{i\pi}$, c'est-à-dire $z = i\pi + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ces zéros sont simples, car la dérivée e^z ne s'annule pas, et le numérateur ne s'annule jamais. Ce sont donc des pôles simples. Dans la bande $0 < \text{Im } z < 2\pi$, seul $i\pi$ convient, et aucun pôle n'est sur les côtés horizontaux. Enfin, la formule g/h' donne $\text{Res}(f, i\pi) = \frac{e^{i\pi a}}{e^{i\pi}}$. **Donc**
 $\text{Res}(f, i\pi) = -e^{i\pi a}$.
- Comme $e^{x+2i\pi} = e^x$, on a $f(x+2i\pi) = \frac{e^{ax}e^{2i\pi a}}{1+e^x} = e^{2i\pi a} f(x)$. Le côté supérieur est parcouru de $R + 2i\pi$ vers $-R + 2i\pi$. **Son intégrale vaut donc**

$$-e^{2i\pi a} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

4. Sur le côté droit, $z = R + iy$ avec $y \in [0, 2\pi]$. Alors $|e^{az}| = e^{aR}$ et $|1 + e^z| \geq e^R - 1$. L'intégrale est donc majorée par $\frac{2\pi e^{aR}}{e^R - 1}$, qui tend vers 0 car $a < 1$. Sur le côté gauche, $z = -R + iy$, donc $|e^{az}| = e^{-aR}$ et $|1 + e^z| \geq 1 - e^{-R}$. Le majorant $\frac{2\pi e^{-aR}}{1 - e^{-R}}$ tend vers 0 car $a > 0$. **Les deux intégrales verticales tendent vers 0.**

5. Le rectangle entoure le seul pôle $i\pi$, avec l'indice 1. Par le théorème des résidus,

$$(1 - e^{2i\pi a}) \int_{-R}^R f + (\text{côtés verticaux}) = -2i\pi e^{i\pi a}. \text{ En faisant } R \rightarrow +\infty, \text{ on obtient } (1 - e^{2i\pi a})I = -2i\pi e^{i\pi a}. \text{ On divise par } e^{i\pi a} :$$

$$I = \frac{-2i\pi}{e^{-i\pi a} - e^{i\pi a}} = \frac{-2i\pi}{-2i\sin(\pi a)} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

Ainsi, $I = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$, et $\sin(\pi a) > 0$ car $0 < a < 1$: le résultat est bien positif.

6. On pose $t = e^x$, bijection C^1 croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, avec $dt = e^x dx$. Alors

$$\frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{t^a}{1+t} \cdot \frac{dt}{t} = \frac{t^{a-1}}{1+t} dt. \text{ Donc } \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}. \text{ Pour } a = \frac{1}{2}, \text{ on attend}$$

π . Directement, le changement $t = u^2$ donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = \int_0^{+\infty} \frac{2u du}{u(1+u^2)} = 2[\arctan u]_0^{+\infty} = \pi. \text{ Le cas } a = \frac{1}{2} \text{ est vérifié.}$$

Point de méthode : le rectangle de hauteur 2π exploite la périodicité de e^z : le côté supérieur reproduit l'intégrale cherchée, multipliée par une constante.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [théorème des résidus, cours de maths en L3](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur théorème des résidus](#)
- À maîtriser avant : [Fonctions holomorphes et formule de Cauchy](#)
- Chapitre précédent : [Fonctions holomorphes et formule de Cauchy](#)
- Chapitre suivant : [Espaces de Hilbert et analyse de Fourier](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)