Théorème de Pythagore

0-Introduction : un peu d'histoire....

Point de vue historique :

Pythagore de Samos, né vers -580 et mort vers -490, était un mathématicien, philosophe et astronome de la Grèce antique.

1. La racine carrée d'un nombre :

Définition :

Soit a un nombre positif.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

On appelle **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, l'unique nombre positif dont le carré est égal à a.

C'est à dire : $(\sqrt{a})^2 = a$.

EXEMPLE :

$(\sqrt{16}) = (\sqrt{4})^2 = 4$

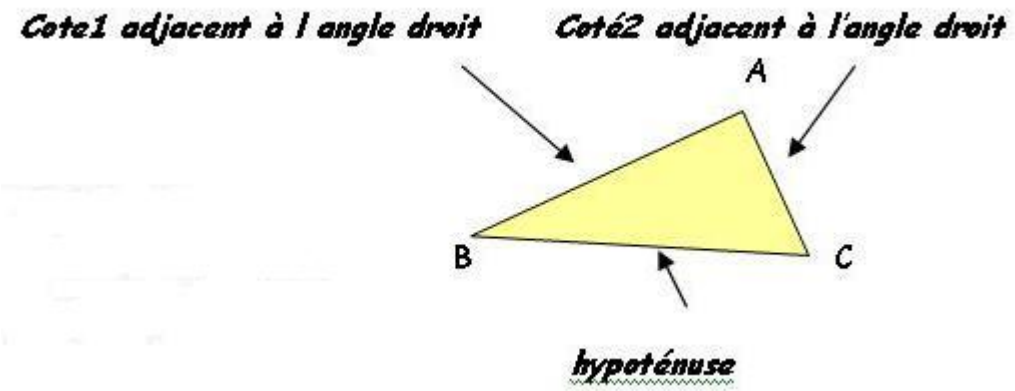
$\sqrt{-9}$ n'a pas de sens car – 9 est un nombre négatif .

APPLICATION :

A l'aide de la calculatrice calculer $\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{25}, \sqrt{81}, \sqrt{-5}, \sqrt{49}, \sqrt{0,36}, \sqrt{104}, \sqrt{7}$.

2- Le théorème de Pythagore:

2.1. Partie directe :



Théorème de la partie directe :

Si un triangle ABC est rectangle en A alors $BC^2=AB^2+AC^2$.

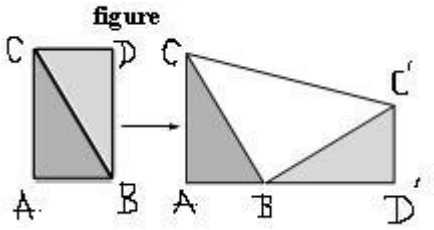
$(\text{hypoténuse})^2=(\text{coté1})^2 + (\text{coté2})^2$

PREUVE AVEC UN TRAPÈZE :

Une des démonstrations de la partie directe du théorème de Pythagore.

Soit un triangle ABC rectangle en A, montrons que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Dans la figure ci-dessous, ABDC est rectangle de sens direct.



On pose BC = a, AC = b et AB = c.

On considère le quart de tour de centre B (rotation de 90°)

qui transforme le triangle BCD en le triangle BC'D'.

Évidemment le triangle CBC' est rectangle en B 'car rotation de 90°).

Les points A, B et D' sont alignés

et le quadrilatère AD'C'C est un trapèze.

En traduisant de deux manière l'aire de ce trapèze :

aire (AD'C'C) =aire (ABC) + aire (CBC') + aire (BC'D')

$$\frac{(b+c)^2}{2} = \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{bc}{2}$$

En multipliant par deux chaque membre de l'équation, nous obtenons :

$(b+c)^2 = a^2 + 2bc$

$(b+c)(b+c) = a^2 + 2bc$ (voir chapitre calcul littéral...)

$b^2 + bc + bc + c^2 = a^2 + 2bc$

$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$

En simplifiant par 2bc dans les deux membres,

Nous obtenons au final :

$a^2 = b^2 + c^2$

soit $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

REMARQUE :

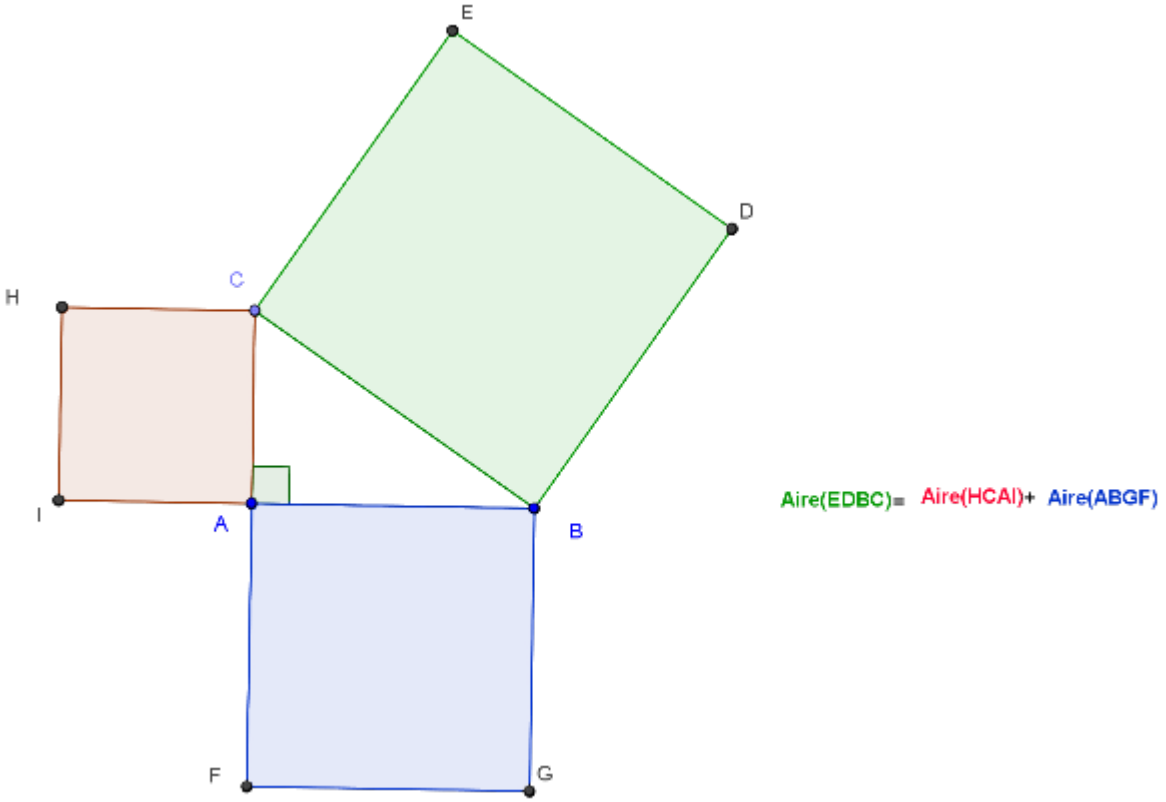
La partie directe du théorème de Pythagore, nous permet de déterminer une longueur du triangle connaissant les deux autres.

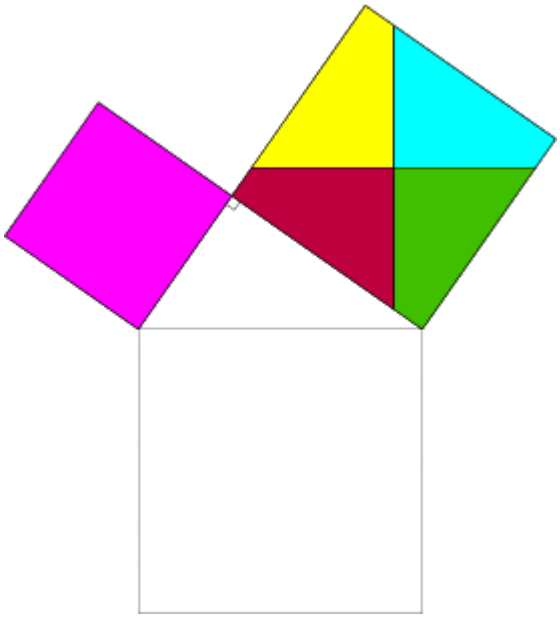
Signification géométrique :

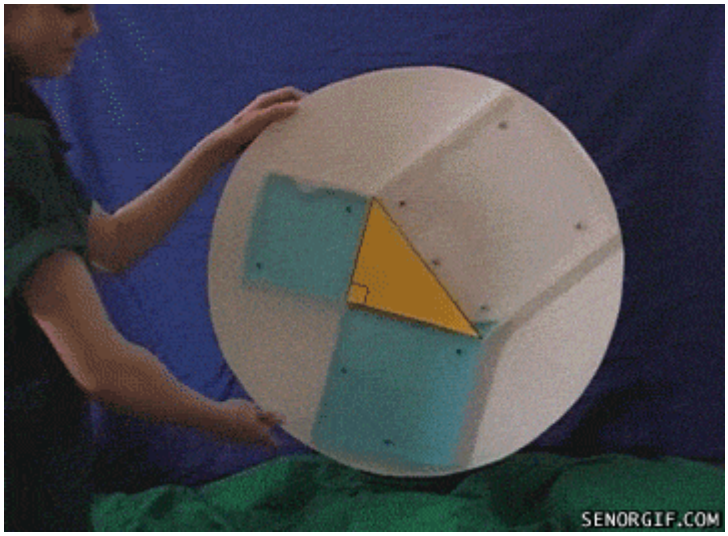
Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

L'aire du carré de coté [BC] est égale à la somme des aires des carrés de coté [AB] et [AC]







2.2.- La réciproque du théorème de Pythagore.

Propriété de la partie réciproque :

Soit un triangle ABC tel que [BC] soit le côté le plus long.

Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ALORS le triangle ABC est rectangle en A.

Propriété de la partie contraposée :

Soit un triangle ABC tel que BC est la plus grande longueur Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ ALORS le triangle ABC n'est rectangle.

REMARQUE :

La réciproque et la contraposée du théorème de Pythagore, nous permettent de déterminer si un triangle est rectangle connaissant les trois mesures de ses cotés.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.