

Systèmes différentiels linéaires

Exercice 1 : Exponentielles diagonales et nilpotentes

On pose $D = \text{diag}(1, -2, 0)$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\exp(tD)$ pour tout réel t .
2. Calculer N^2 et N^3 , puis en déduire $\exp(tN)$.
3. Résoudre le système $X' = NX$ avec la condition initiale $X(0) = (0, 0, 1)$, puis vérifier le résultat sur la première équation.

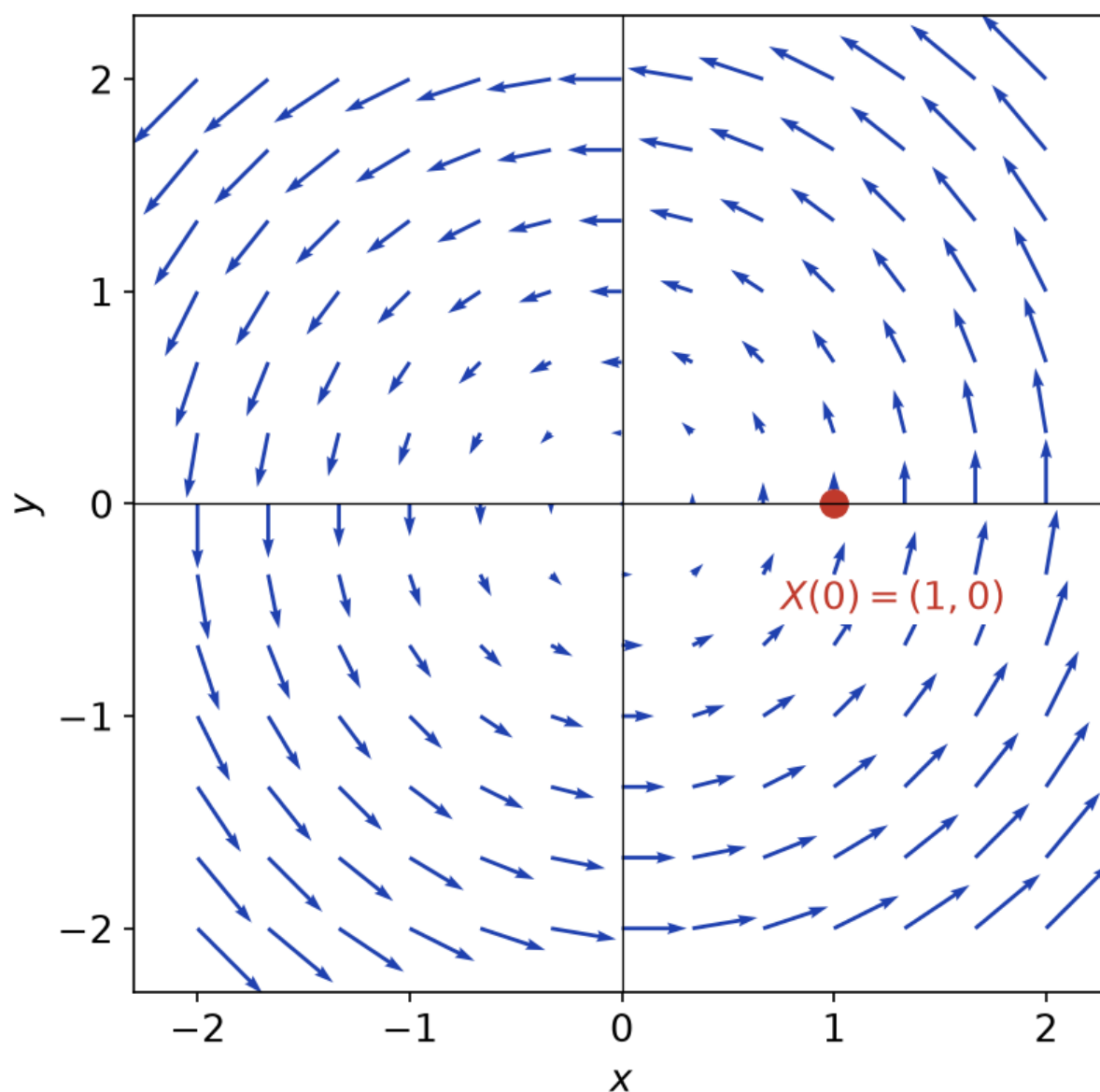
Exercice 2 : Matrices de la forme $\lambda I + N$

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Écrire $A = 2I_2 + N$ et justifier que $\exp(tA) = e^{2t} \exp(tN)$. Calculer $\exp(tA)$.
2. Résoudre le système $x' = 2x + y$, $y' = 2y$ avec $x(0) = y(0) = 1$.
3. Calculer $\exp(tB)$ et montrer que $\exp(tB) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Exercice 3 : Exponentielle d'une matrice de rotation

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La figure ci-dessous représente le champ de vecteurs $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ associé au système $X' = JX$.



1. Calculer J^2 , puis J^{2p} et J^{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que $\exp(\theta J) = \cos \theta I_2 + \sin \theta J$ pour tout réel θ .
3. Résoudre $X' = JX$ avec $X(0) = (1, 0)$. Montrer, sans utiliser la formule explicite, que

$\|X(t)\|_2$ est constante.

4. En utilisant $\exp((\theta + \varphi)J) = \exp(\theta J)\exp(\varphi J)$, retrouver les formules d'addition de $\cos$ et $\sin$.

Exercice 4 : Exponentielle d'une matrice symétrique

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A : donner P inversible et D diagonale telles que $A = P D P^{-1}$.
2. En déduire $\exp(tA)$ pour tout réel t .
3. Résoudre $X' = AX$ avec $X(0) = (2, 0)$.
4. Déterminer les conditions initiales X_0 pour lesquelles la solution tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 5 : Déterminant et spectre de l'exponentielle

1. Soit T une matrice triangulaire supérieure de diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Montrer que $\exp(T)$ est triangulaire supérieure de diagonale $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.
2. En déduire que, pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\exp(A)) = e^{\text{tr}(A)}$ et que les valeurs propres de $\exp(A)$ sont les e^λ , $\lambda \in \text{Sp}(A)$.
3. Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\exp(A) = \text{diag}(-1, 2)$?
4. Calculer $\det(\exp(A))$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & \\ 7 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 : Deux matrices qui ne commutent pas

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $AB \neq BA$.
2. Calculer $\exp(A)$, $\exp(B)$, puis $\exp(A)\exp(B)$ et $\exp(B)\exp(A)$.
3. Calculer $(A + B)^2$, puis $\exp(A + B)$.
4. Conclure sur la formule $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

Exercice 7 : Exponentielle et polynôme annulateur

1. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^2 = P$. Montrer que $\exp(tP) = I_n + (e^t - 1)P$.
2. Soit $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Calculer U^2 , puis U^k pour $k \geq 1$, et en déduire $\exp(tU)$.
3. Soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $K^2 = -I_n$. Montrer que $\exp(tK) = \cos t \, I_n + \sin t \, K$.

Exercice 8 : Valeurs propres complexes et spirale

On considère le système $x' = -x - y$, $y' = x - y$, de matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres complexes de A et un vecteur propre associé à $-1 + i$.
2. En déduire deux solutions réelles indépendantes du système, puis la solution générale réelle.

3. Retrouver ce résultat en écrivant $A = -I_2 + J$, avec J la matrice de l'exercice 3.
4. Donner la solution telle que $X(0) = (1, 0)$, calculer $\|X(t)\|_2$ et décrire la trajectoire.

Exercice 9 : Système 3×3 diagonalisable

On considère le système $x' = 2x + y + z$, $y' = x + 2y + z$, $z' = x + y + 2z$, de matrice A .

1. Écrire $A = I_3 + U$, où U a tous ses coefficients égaux à 1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .
2. Calculer $\exp(tA)$ à l'aide de l'exercice 7.
3. Résoudre le problème de Cauchy de condition initiale $X(0) = (1, 0, 0)$.
4. Montrer que toute solution non nulle vérifie $\|X(t)\| \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Exercice 10 : Système triangulaire résolu en cascade

On considère le système $x' = x + y + z$, $y' = y + 2z$, $z' = -z$.

1. Résoudre la troisième équation, puis la deuxième, puis la première.
2. En déduire la solution telle que $X(0) = (1, 1, 1)$.
3. Déterminer les conditions initiales pour lesquelles la solution est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Interpréter à l'aide des vecteurs propres.

Exercice 11 : Racine double et trigonalisation

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A . La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Trouver un vecteur propre V_1 et un vecteur V_2 tel que $(A - 2I_2)V_2 = V_1$. En déduire P inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Calculer $\exp(tA)$ de deux façons : avec P , puis avec $N = A - 2I_2$.
4. Résoudre $X' = AX$ avec $X(0) = (1, 2)$.

Exercice 12 : Problème de Cauchy en un instant quelconque

Soit α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $\alpha(x, y) = (y, x)$, de matrice A dans la base canonique.

1. Calculer A^2 et en déduire $\exp(tA) = \cosh(t) I_2 + \sinh(t) A$.
2. Résoudre le problème de Cauchy $u' = \alpha(u)$, $u(1) = (1, 0)$.
3. Montrer que la trajectoire est contenue dans l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$, et préciser quelle partie de cette hyperbole est décrite.
4. Soit v une solution quelconque de $v' = \alpha(v)$ sur $\mathbb{R}$. Montrer, en dérivant $t \rightarrow \exp(-(t-1)A)v(t)$, que $v(t) = \exp((t-1)A)v(1)$.

Exercice 13 : Équation d'ordre 2 et matrice compagnon

On considère l'équation $y'' + 2y' + y = 0$.

1. Montrer que y est solution si et seulement si $X = (y, y')$ vérifie $X' = AX$ pour une matrice A à préciser.
2. Montrer que $A + I_2$ est nilpotente et calculer $\exp(tA)$.
3. En déduire la solution telle que $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$, puis celle telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Vérifier qu'elle est solution.

Exercice 14 : L'exponentielle comme limite

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative et on fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que, pour $0 \leq k \leq n$ avec $n \geq 1$, on a $0 \leq \frac{1}{k!} - \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!}$.
2. En déduire que

$$\left\| \exp(A) - \left(I_n + \frac{A}{n} \right)^n \right\| \leq e^{|A|} - \left(1 + \frac{|A|}{n} \right)^n.$$

3. Conclure que $\left(I_n + \frac{A}{n} \right)^n \rightarrow \exp(A)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 15 : L'exponentielle est un polynôme en A

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Justifier que $\mathbb{K}[A] = \left\{ \begin{pmatrix} Q(A) \\ \vdots \\ Q(A) \end{pmatrix}, Q \in \mathbb{K}[[X]] \right\}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension

au plus n .

2. En déduire qu'il existe un polynôme Q de degré au plus $n - 1$ tel que $\exp(A) = Q(A)$.
3. Montrer que toute matrice qui commute avec A commute avec $\exp(A)$.
4. Déterminer explicitement Q lorsque $n = 2$ et $A^2 = I_2$.

Exercice 16 : Comportement des solutions selon un paramètre

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère le système $X' = A_a X$ avec $A_a = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A_a , en distinguant $a > 0$, $a = 0$ et $a < 0$.
2. Montrer que, pour $a < 1$, toutes les solutions tendent vers 0 en $+\infty$. Traiter à part le cas $a = 0$.
3. Pour $a = 1$, résoudre le système et montrer que les solutions sont bornées mais ne tendent pas toutes vers 0 .
4. Pour $a > 1$, montrer qu'il existe des solutions non bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 17 : Commutation et exponentielle d'une somme

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\exp(tA)\exp(tB) = \exp(t(A + B))$ pour tout réel t .

1. Justifier que $t \rightarrow \exp(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer ses deux premières dérivées.
2. En dérivant deux fois l'égalité en $t = 0$, montrer que $AB = BA$.
3. Application : pour $A = \text{diag}(1, 2)$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer qu'il existe un réel

t tel que $\exp(tA)\exp(tB) \neq \exp(t(A+B))$.

Exercice 18 : Exponentielle non injective

1. Avec la matrice J de l'exercice 3, calculer $\exp(2\pi J)$. L'exponentielle est-elle injective sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que $\exp(A) = I_n$ si et seulement si $\text{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.
3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente telle que $\exp(N) = I_n$. Montrer que $N = 0$.
4. Montrer qu'il n'existe aucune matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\exp(A) = \text{diag}(-1, -2)$, bien que ce déterminant soit positif.

Exercice 19 : Parties réelles négatives et convergence vers 0

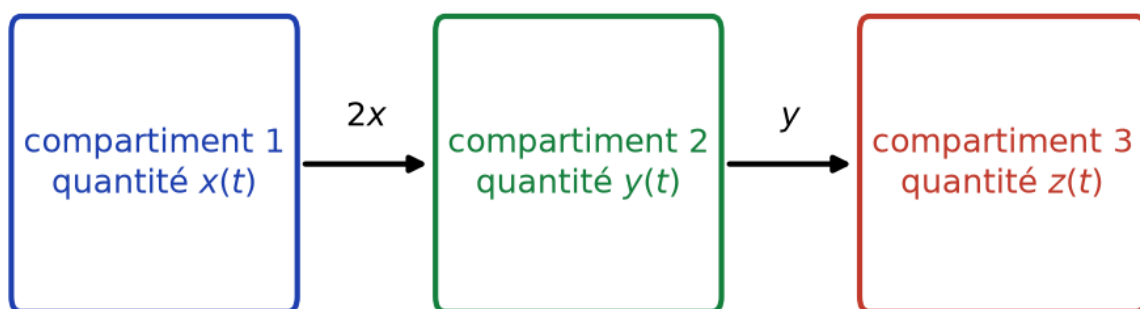
Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure de diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On appelle **fonction exponentielle-polynôme** toute somme finie de fonctions $t \rightarrow Q(t)e^{\mu t}$, avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $\mu \in \mathbb{C}$.

1. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et f une somme de termes $Q(t)e^{\mu t}$. Montrer que toute solution de $y' = \lambda y + f(t)$ est une somme de termes $R(t)e^{\nu t}$, avec $\nu \in \{\lambda\} \cup \{\mu\}$.
2. Soit Y une solution de $Y' = TY$. Montrer par récurrence descendante que chaque coordonnée y_k est une somme de termes $R(t)e^{\lambda_j t}$ avec $j \geq k$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres ont une partie réelle strictement négative. Montrer que toute solution de $X' = AX$ tend vers 0 en $+\infty$.
4. Réciproquement, montrer que si toutes les solutions tendent vers 0, alors toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

Exercice 20 : Problème, trois compartiments

Une substance passe d'un compartiment 1 à un compartiment 2, puis du compartiment 2 à un compartiment 3, où elle s'accumule. On note $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ les quantités présentes, avec $x(0) = 1$ et $y(0) = z(0) = 0$. Les débits de transfert sont proportionnels aux quantités, comme l'indique le schéma ci-dessous :

$$x' = -2x, \quad y' = 2x - y, \quad z' = y.$$



1. Écrire le système sous la forme $X' = AX$. Montrer que $x + y + z$ est constante et donner sa valeur.
2. Montrer que A est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres.
3. En déduire $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. Vérifier que $z(t) = (1 - e^{-t})^2$.
4. Déterminer l'instant où la quantité dans le compartiment 2 est maximale, et cette quantité maximale.
5. Déterminer les limites de x , y , z en $+\infty$ et relier ce résultat aux valeurs propres de A .

Exercice 21 : Problème, trigonalisation d'un système 3×3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\chi_A = (X - 1)^2(X - 2)$. Déterminer les sous-espaces propres. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On pose $V_1 = (1, 1, 0)$, $V_3 = (1, 1, 1)$. Trouver $V_2 = (0, b, c)$ tel que $(A - I_3)V_2 = V_1$. Montrer que $P = (V_1 | V_2 | V_3)$ est inversible et que $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Calculer $\exp(tT)$, puis P^{-1} et $\exp(tA)$.
4. Résoudre le problème de Cauchy $X' = AX$, $X(0) = (1, 0, 0)$.
5. Déterminer les conditions initiales X_0 pour lesquelles $e^{-2t}|X(t)| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [systèmes différentiels linéaires, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Équations différentielles linéaires](#), [Polynômes d'endomorphismes et Cayley-](#)

[Hamilton](#), [Compacité](#), [connexité par arcs](#) et [dimension finie](#)

- Chapitre précédent : [Équations différentielles linéaires](#)
- Chapitre suivant : [Calcul différentiel dans les espaces normés](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)