

# Systèmes différentiels linéaires

## I. Exponentielle d'une matrice et d'un endomorphisme

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $n$  est un entier non nul. On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  d'une norme **sous-multiplicative**, c'est-à-dire vérifiant  $|AB| \leq |A| |B|$ . Par exemple, toute norme subordonnée convient. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes : les notions de convergence et de continuité ne dépendent donc pas de ce choix.

### 1. Définition

L'idée est simple. Pour un réel  $a$ , on sait que  $e^a = \sum a^k/k!$ . On remplace alors  $a$  par une matrice, ce qui a un sens car on sait calculer les puissances d'une matrice.

#### Proposition :

Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , la série  $\sum \frac{A^k}{k!}$  converge absolument. Sa somme est appelée **exponentielle de  $A$**  et se note

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}, \text{ avec } A^0 = I_n.$$

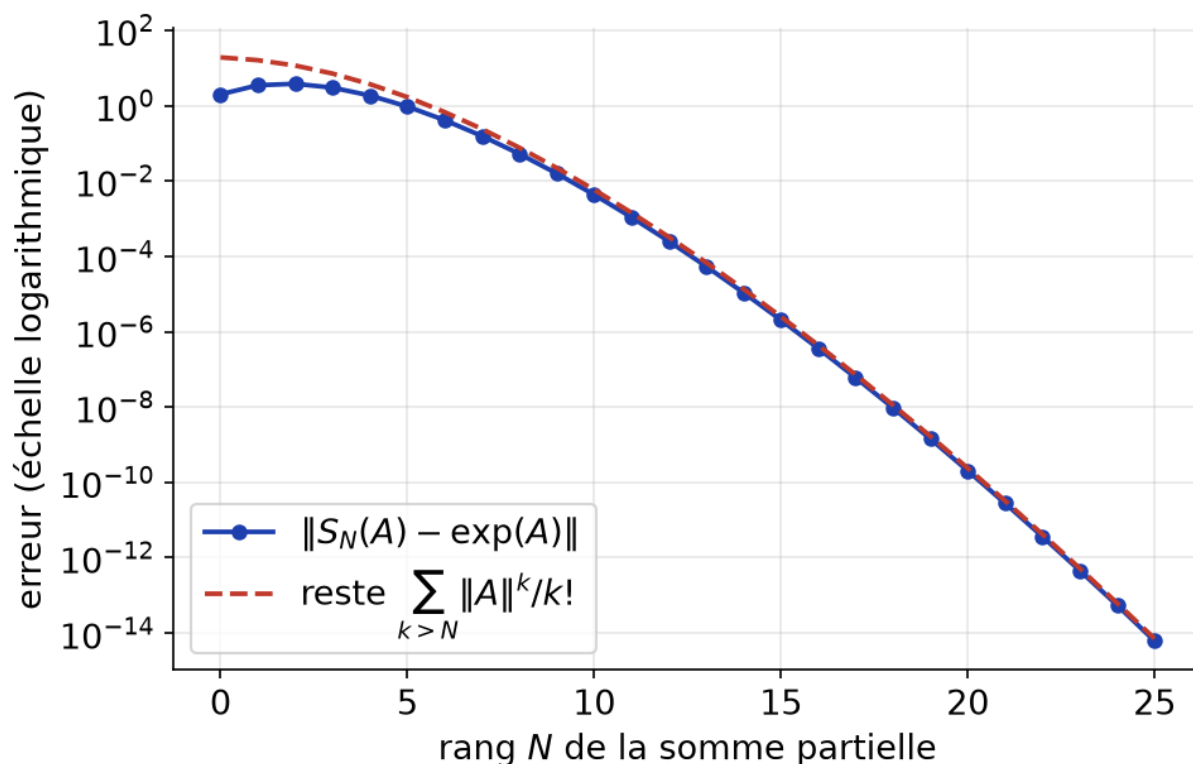
#### Démonstration :

Par sous-multiplicativité, on a  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$  pour  $k \geq 1$ . Ainsi  $\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$ , terme général de la série exponentielle réelle, qui converge. La série converge donc absolument. Or  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est de dimension finie, donc complet : la série converge.

De la même façon, si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on définit  $\exp(u) = \sum_{k \geq 0} u^k / k!$ . Si  $A$  est la matrice de  $u$  dans une base  $B$ , alors  $\exp(A)$  est la matrice de  $\exp(u)$  dans  $B$ . En effet, l'application qui envoie un endomorphisme sur sa matrice est linéaire, continue et multiplicative.

La convergence est très rapide. Par exemple, pour  $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ , la figure ci-dessous montre l'erreur commise en tronquant la série au rang  $N$ . Elle est majorée par le reste

$\sum_{k > N} \|A\|^k / k!$ , qui décroît plus vite que toute suite géométrique.



## 2. Premiers calculs

### Exemple :

**Matrice diagonale.** Si  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , alors  $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ . En sommant coefficient par coefficient, on obtient

$$\exp(D) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

### Exemple :

**Matrice nilpotente.** Si  $N^p = 0$ , la série est en fait une somme finie :

$\exp(N) = \sum_{k=0}^{p-1} N^k / k!$ . Par exemple, avec  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on a  $N^2 = 0$ , donc  $\exp(tN) = I_2 + tN = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Exemple :

**Matrice de rotation.** Soit  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Comme  $J^2 = -I_2$ , les puissances paires valent  $(-1)^p I_2$  et les impaires  $(-1)^p J$ . En séparant les deux sous-séries, on trouve

$$\exp(\theta J) = \cos \theta I_2 + \sin \theta J = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

## II. Propriétés de l'exponentielle matricielle

## 1. Matrices semblables et spectre

### Propriété :

Soit  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\exp(P A P^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}$ . De plus,  $\exp(A)$  commute avec  $A$  et appartient au sous-espace  $\mathbb{K}[A]$ .

### Démonstration :

D'abord,  $(P A P^{-1})^k = P A^k P^{-1}$  par récurrence. Ensuite, l'application  $M \rightarrow P M P^{-1}$  est linéaire en dimension finie, donc continue. On peut ainsi passer à la limite dans les sommes partielles. De même, chaque somme partielle est un polynôme en  $A$  ; or  $\mathbb{K}[A]$  est un sous-espace de dimension finie, donc fermé. La limite  $\exp(A)$  y appartient, et elle commute avec  $A$ .

Par conséquent, pour une matrice **diagonalisable**  $A = P D P^{-1}$ , on obtient directement  $\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$ . Le calcul se ramène donc à une diagonalisation.

### Théorème :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , comptées avec multiplicité. Alors les valeurs propres de  $\exp(A)$  sont  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ . En particulier,

$$\det(\exp(A)) = e^{\operatorname{tr}(A)} \neq 0,$$

donc  $\exp(A)$  est toujours inversible.

### Démonstration :

Sur  $\mathbb{C}$ , la matrice  $A$  est trigonalisable :  $A = P T P^{-1}$  avec  $T$  triangulaire supérieure de diagonale  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Or  $T^k$  est triangulaire supérieure de diagonale  $(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ . En passant à la limite,  $\exp(T)$  est triangulaire supérieure de diagonale  $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ . Enfin,  $\exp(A) = P \exp(T) P^{-1}$  a le même polynôme caractéristique que  $\exp(T)$ . Le déterminant vaut donc  $\prod e^{\lambda_i} = e^{\sum \lambda_i} = e^{\text{tr}(A)}$ .

#### Attention :

Une matrice réelle de déterminant négatif n'est jamais l'exponentielle d'une matrice réelle, puisque  $e^{\text{tr}(A)} > 0$ . De plus, l'exponentielle n'est pas injective :  $\exp(2\pi J) = I_2 = \exp(0)$ .

## 2. Continuité de l'exponentielle

#### Théorème :

L'application  $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est continue.

#### Démonstration :

Chaque application  $A \rightarrow A^k/k!$  est continue, car polynomiale en les coefficients. Fixons  $R > 0$ . Sur la boule fermée  $\overline{B}(0, R)$ , on a  $|A^k/k!| \leq R^k/k!$ , terme d'une série convergente indépendant de  $A$ . La série converge donc normalement sur cette boule, et sa somme y est continue. Comme tout point est intérieur à une telle boule,  $\exp$  est continue partout.

#### Remarque :

La continuité permet de passer à la limite dans des égalités. Par exemple, pour  $A$  fixée, on a

$\left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p \rightarrow \exp(A)$  quand  $p \rightarrow +\infty$ , ce qui prolonge la formule réelle  $(1 + a/p)^p \rightarrow e^a$ . De même, si une suite de matrices  $A_p$  converge vers  $A$ , alors  $\exp(A_p)$  converge vers  $\exp(A)$ . On peut ainsi établir une propriété sur les matrices diagonalisables, qui sont denses dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , puis l'étendre à toutes les matrices lorsque les deux membres sont continus. C'est une autre façon de démontrer la formule  $\det(\exp A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$ .

### III. Dérivation et exponentielle d'une somme

#### 1. Dérivée de $t \mapsto \exp(tA)$

##### Théorème :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . L'application  $\varphi : t \mapsto \exp(tA)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et

$$\varphi'(t) = A \exp(tA) = \exp(tA) A.$$

##### Démonstration :

Posons  $u_k(t) = \frac{t^k}{k!} A^k$ . Chaque  $u_k$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , avec  $u_k'(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k$  pour  $k \geq 1$ . Sur un segment  $[-a, a]$ , on a  $|u_k'(t)| \leq |A| \frac{(a|A|)^{k-1}}{(k-1)!}$ . La série des dérivées converge donc normalement sur tout segment. De plus,  $\sum u_k$  converge simplement. D'après le théorème de dérivation terme à terme,  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  et

$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = A \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j}{j!} A^j = A \exp(tA).$$

Enfin,  $A$  commute avec  $\exp(tA)$ .

## 2. Exponentielle d'une somme de matrices qui commutent

### Théorème :

Si  $A$  et  $B$  commutent, alors  $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$ . En particulier,  $\exp(A)$  est inversible d'inverse  $\exp(-A)$ , et  $\exp((s + t)A) = \exp(sA) \exp(tA)$ .

### Démonstration :

Comme  $AB = BA$ , la matrice  $B$  commute avec chaque somme partielle de  $\exp(tA)$ , donc avec  $\exp(tA)$  par passage à la limite. Posons

$f(t) = \exp(-t(A+B)) \exp(tA) \exp(tB)$ . Toutes ces matrices commutent entre elles. En dérivant le produit, on obtient

$$f'(t) = \exp(-t(A+B)) (-(A+B) + A + B) \exp(tA) \exp(tB) = 0.$$

Ainsi  $f$  est constante sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ , égale à  $f(0) = I_n$ . En prenant  $t = 1$  et  $B = 0$  d'abord, on voit que  $\exp(-A)\exp(A) = I_n$ . Ensuite, pour  $t = 1$  dans le cas général, on conclut.

### Attention :

Sans l'hypothèse de commutation, la formule est fausse en général. Par exemple, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on trouve}$$

$$\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ alors que } \exp(A+B) \text{ a pour coefficient diagonal } \text{ch}(1) \approx 1,54.$$

### Méthode :

**Calculer l'exponentielle d'une matrice non diagonalisable.** On écrit  $A = \lambda I_n + N$  avec

$N$  nilpotente, lorsque  $A$  n'a qu'une valeur propre  $\lambda$ . Comme  $\lambda I_n$  commute avec  $N$ , on a

$$\exp(tA) = e^{\lambda t} \exp(tN) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} N^k.$$

Par Cayley-Hamilton,  $N = A - \lambda I_n$  vérifie bien  $N^n = 0$ .

### Exemple :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Son polynôme caractéristique vaut

$X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$ . Posons  $N = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ; on vérifie que  $N^2 = 0$ . Donc

$$\exp(tA) = e^{2t} (I_2 + tN) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 + t & -t \\ t & 1 - t \end{pmatrix}.$$

## IV. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

### 1. Le problème de Cauchy

On appelle **système différentiel linéaire homogène à coefficients constants** une équation

$X' = AX$ , où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est fixée et l'inconnue  $X: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  est dérivable. De manière intrinsèque, on étudie  $x' = a(x)$ , avec  $a \in \mathcal{L}(E)$  et  $x: I \rightarrow E$ .

### Théorème :

**Résolution du problème de Cauchy.** Soient  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $X_0 \in \mathbb{K}^n$ . Le problème  $X' = AX$ ,  $X(t_0) = X_0$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$  :

$$X(t) = \exp((t - t_0) A) X_0.$$

De même, la solution de  $x' = a(x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  est  $x(t) = \exp((t - t_0) a)(x_0)$ .

### Démonstration :

**Existence.** D'après la partie III,  $X$  est dérivable et

$$X'(t) = A \exp((t - t_0)A) X_0 = A X(t). \text{ De plus, } X(t_0) = I_n X_0 = X_0.$$

**Unicité.** Soit  $Y$  une solution sur un intervalle  $I$  contenant  $t_0$ . Posons

$$Z(t) = \exp(-(t - t_0)A) Y(t). \text{ Alors}$$

$$Z'(t) = -A \exp(-(t - t_0)A) Y(t) + \exp(-(t - t_0)A) A Y(t) = 0,$$

car  $A$  commute avec son exponentielle. Donc  $Z$  est constante sur l'intervalle  $I$ , égale à

$$Z(t_0) = X_0. \text{ Finalement, } Y(t) = \exp((t - t_0)A) X_0.$$

### Corollaire :

L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de  $X' = AX$  sur  $\mathbb{R}$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ . En effet, l'application  $X \rightarrow X(t_0)$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}$  sur  $\mathbb{K}^n$ .

### Exemple :

Réolvons  $x' = -x$ ,  $y' = x - y$  avec la condition  $X(1) = (1, 0)$ . La matrice s'écrit

$$A = -I_2 + N \text{ avec } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^2 = 0. \text{ Ainsi,}$$

$$\exp(sA) = e^{-s} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}. \text{ D'après le théorème, avec } s = t - 1, \text{ on obtient}$$

$$X(t) = e^{1-t} \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \end{pmatrix}.$$

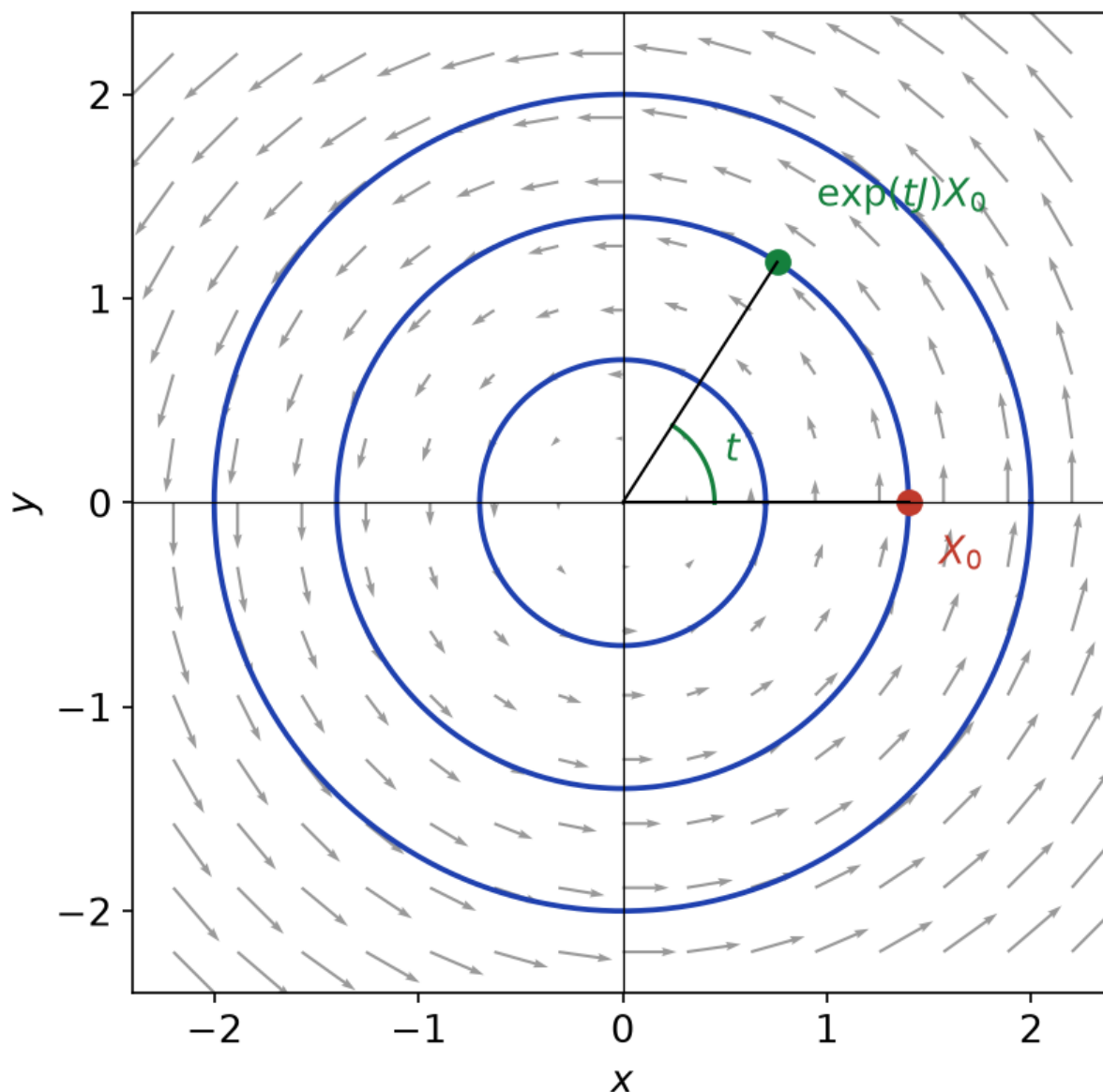
On vérifie que  $y'(t) = e^{1-t} - (t-1)e^{1-t} = x(t) - y(t)$ . Remarquez que l'instant initial  $t_0 = 1$  apparaît seulement à travers le décalage  $t - t_0$ .

### Remarque :

La formule  $X(t) = \exp((t - t_0)A)X_0$  montre aussi que la solution est définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier : il n'y a jamais d'explosion en temps fini. C'est une différence majeure avec les équations non linéaires. De plus, la solution dépend linéairement et continûment de la condition initiale  $X_0$ .

### Exemple :

Considérons  $X' = JX$  avec la matrice  $J$  de rotation. D'après la partie I, la solution telle que  $X(0) = X_0$  est  $X(t) = \exp(tJ)X_0$  : c'est le vecteur  $X_0$  tourné d'un angle  $t$ . Les trajectoires sont donc des cercles centrés en l'origine, parcourus dans le sens direct, comme le montre la figure ci-dessous.



## 2. Lien avec les équations scalaires d'ordre $n$

---

Une équation  $y'' + p y' + q y = 0$  à coefficients constants se ramène à un système. En effet, on pose  $X = (y, y')$ . L'équation devient alors  $X' = AX$  avec la **matrice compagnon**

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}$ . Son polynôme caractéristique  $X^2 + pX + q$  est exactement l'équation caractéristique vue en première année.

## V. Résolution pratique des systèmes différentiels

---

## 1. Cas diagonalisable

### Méthode :

**Résoudre  $X' = AX$  avec  $A$  diagonalisable.**

- On cherche une base de vecteurs propres  $(V_1, \dots, V_n)$ , associés à  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .
- Les fonctions  $t \rightarrow e^{\lambda_i t} V_i$  sont solutions, car  $A e^{\lambda_i t} V_i = \lambda_i e^{\lambda_i t} V_i$ .
- Elles forment une base de  $\mathcal{S}$  : la solution générale est  $X(t) = \sum c_i e^{\lambda_i t} V_i$ .
- Enfin, on ajuste les constantes  $c_i$  en décomposant  $X_0$  dans la base  $(V_i)$ .

Autrement dit, dans la base propre, le système se **découple** en  $n$  équations scalaires  $y'_i = \lambda_i y_i$ . On pose en effet  $X = PY$ , et  $Y' = DY$ .

### Exemple :

Soit le système  $x' = x + 2y$ ,  $y' = 2x + y$ . La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  a pour valeurs propres 3 et -1, de vecteurs propres  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$ . Ainsi, la solution générale est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

## 2. Valeurs propres complexes d'une matrice réelle

Si  $A$  est réelle et diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  seulement, on résout d'abord sur  $\mathbb{C}$ . Ensuite, on revient aux solutions réelles. En effet, si  $Z$  est une solution complexe, alors  $\operatorname{Re}(Z)$  et  $\operatorname{Im}(Z)$  sont des solutions réelles, car  $A$  est réelle.

### Exemple :

Pour  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 + J$ , les valeurs propres sont  $-1 \pm i$ . Comme  $-I_2$  et  $J$  commutent,  $\exp(tA) = e^{-t} \exp(tJ)$ . Les trajectoires sont donc des spirales qui s'enroulent vers l'origine : c'est un **foyer stable**.

### 3. Cas trigonalisable et dimension au plus 3

#### Méthode :

**Résoudre  $X' = AX$  par trigonalisation.** On écrit  $A = P T P^{-1}$  avec  $T$  triangulaire supérieure. On pose  $Y = P^{-1} X$ , qui vérifie  $Y' = T Y$ . On résout ce système triangulaire **en cascade** : d'abord la dernière équation  $y'_n = t_{nn} y_n$ , puis on remonte. Chaque étape est une équation scalaire  $y' = \lambda y + f(t)$ , résolue par variation de la constante. Finalement, on revient à  $X = P Y$ .

En dimension au plus 3, les situations sont peu nombreuses. Soit  $A$  est diagonalisable, soit elle a une valeur propre multiple. Dans ce dernier cas, on choisit une base adaptée : un vecteur propre  $V_1$ , puis  $V_2$  tel que  $(A - \lambda I_n) V_2 = V_1$ . On obtient alors des solutions de la forme  $e^{\lambda t}(V_2 + t V_1)$ .

#### Exemple :

Reprenons  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  de la partie III. La solution de  $X' = AX$  avec  $X(0) = (1, 2)$  est

$$X(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 - t \\ 2 + t \end{pmatrix}.$$

Le facteur  $t$  traduit la non-diagonalisabilité de  $A$ .

#### Exemple :

Réolvons en cascade le système  $x' = x + y$ ,  $y' = y + z$ ,  $z' = z$ . D'abord,  $z(t) = ce^t$ . Ensuite,  $y' = y + ce^t$  : la variation de la constante  $y = \beta(t)e^t$  donne  $\beta' = c$ , donc  $y(t) = (b + ct)e^t$ . Enfin,  $x' = x + (b + ct)e^t$  donne de même

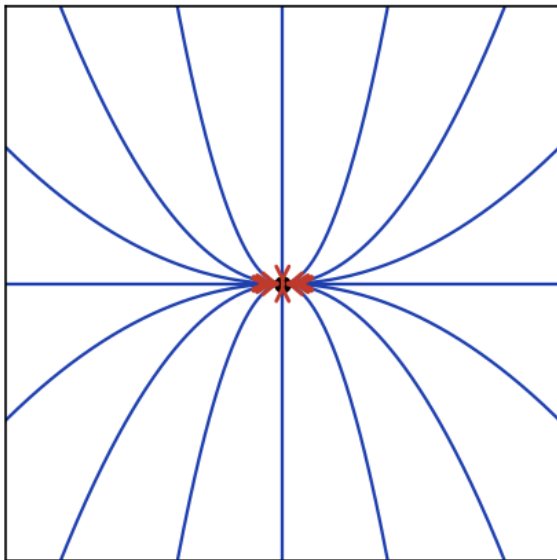
$$x(t) = \left( a + bt + \frac{c}{2}t^2 \right) e^t.$$

On retrouve ainsi les coefficients de  $\exp(tA) = e^t(I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2)$ , où  $N = A - I_3$ .

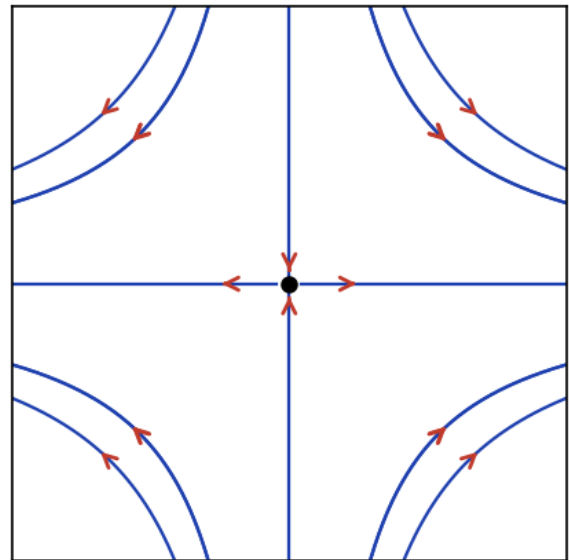
### Remarque :

En dimension 3, trois cas se présentent. Premièrement, si  $A$  a trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. Deuxièmement, si  $\chi_A = (X - \lambda)^2(X - \mu)$  avec  $\lambda \neq \mu$ , la matrice est diagonalisable si et seulement si  $\dim E_\lambda = 2$  ; sinon, elle est semblable à  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ . Troisièmement, si  $\lambda$  est valeur propre triple, alors  $A = \lambda I_3 + N$  avec  $N^3 = 0$ , et  $\exp(tA)$  s'obtient sans changement de base.

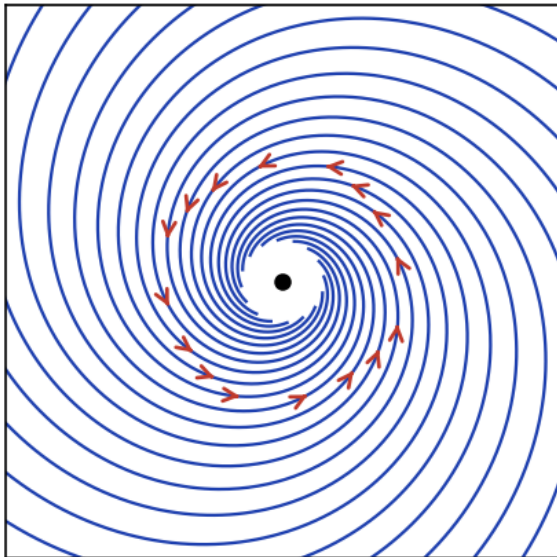
La figure ci-dessous regroupe les principaux **portraits de phase** en dimension 2. Chaque courbe est une trajectoire  $t \rightarrow \exp(tA) X_0$ , et les flèches indiquent le sens de parcours. Ainsi, le type de portrait se lit sur les valeurs propres.



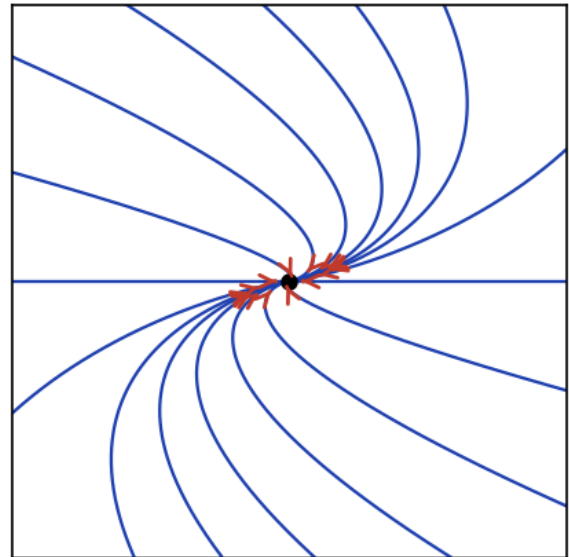
nœud stable :  $-1$  et  $-2$



col :  $1$  et  $-1$



foyer stable :  $-0,3 \pm i$



nœud dégénéré :  $-1$  double

## VI. Comportement asymptotique des solutions

On s'intéresse enfin au comportement des solutions quand  $t \rightarrow +\infty$ . Le résultat dépend du signe des parties réelles des valeurs propres, car  $|e^{\lambda t}| = e^{\operatorname{Re}(\lambda) t}$ .

### Théorème :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de  $X' = AX$ .

- Si toutes les valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle strictement négative, toutes les solutions tendent vers  $0$  en  $+\infty$ .
- Si une valeur propre a une partie réelle strictement positive, il existe des solutions non bornées sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Si  $A$  est diagonalisable et si toutes ses valeurs propres ont une partie réelle négative ou nulle, toutes les solutions sont bornées sur  $\mathbb{R}_+$ .

### Démonstration :

Traisons le cas diagonalisable. La solution générale s'écrit  $X(t) = \sum c_i e^{\lambda_i t} V_i$ , donc

$$|X(t)| \leq \sum |c_i| e^{\operatorname{Re}(\lambda_i) t} |V_i|.$$

Chaque terme tend vers  $0$  si  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ , et reste borné si  $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ . D'autre part, si  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  et  $AV = \lambda V$  avec  $V \neq 0$ , la solution  $e^{\lambda t} V$  a pour norme  $e^{\operatorname{Re}(\lambda) t} |V| \rightarrow +\infty$ .

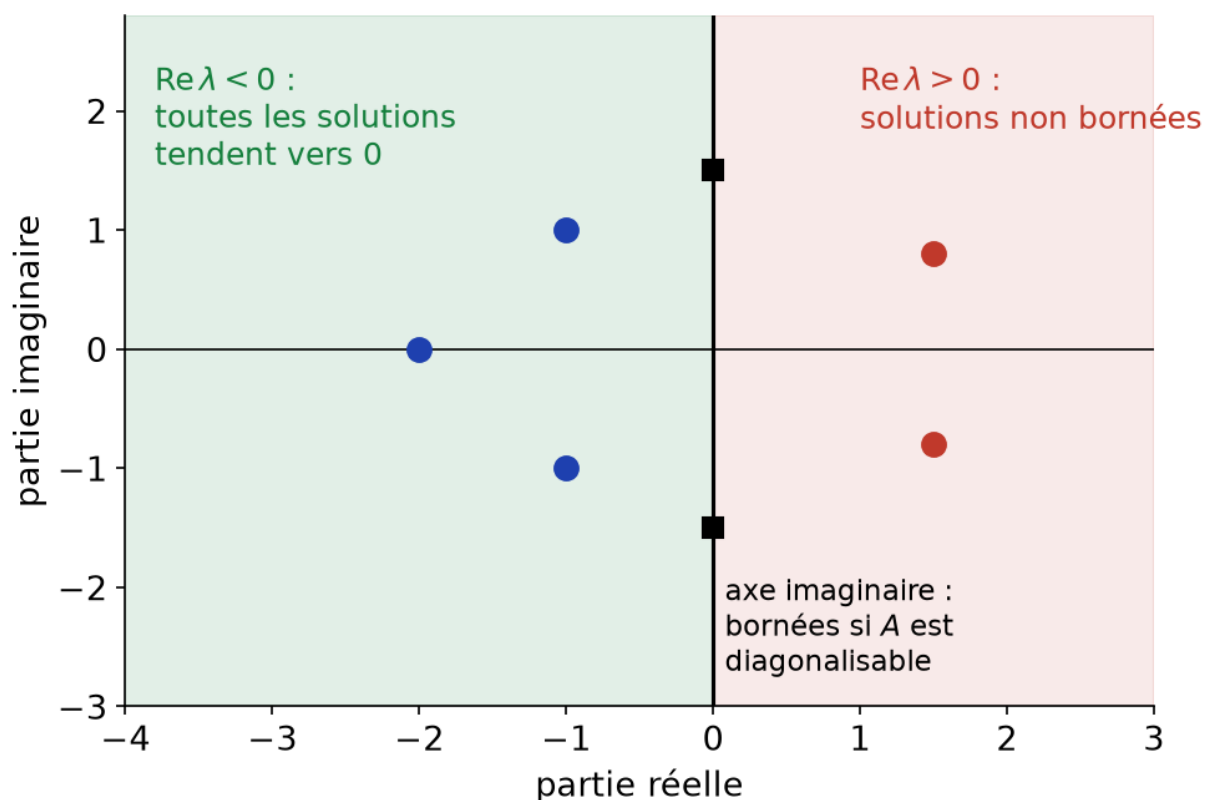
Dans le cas général, on trigonalise. La résolution en cascade montre alors que chaque coordonnée est une somme de termes  $Q(t) e^{\lambda t}$ , où  $Q$  est un polynôme et  $\lambda$  une valeur propre. Or  $|Q(t) e^{\lambda t}| = |Q(t)| e^{\operatorname{Re}(\lambda) t} \rightarrow 0$  si  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ , par croissances comparées.

### Remarque :

L'hypothèse de diagonalisabilité est indispensable dans le troisième point. En effet, pour

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , la seule valeur propre est  $0$ , mais la solution  $\exp(tN)(0, 1) = (t, 1)$  n'est pas bornée.

La figure ci-dessous résume ce théorème dans le plan complexe. Les valeurs propres du demi-plan gauche (en bleu) donnent des solutions qui s'amortissent. À l'inverse, celles du demi-plan droit (en rouge) donnent des solutions qui explosent. Enfin, l'axe imaginaire est le cas critique.



### Exemple :

Pour le système  $x' = x + 2y$ ,  $y' = 2x + y$ , les valeurs propres sont  $3$  et  $-1$ . Par conséquent, une solution tend vers  $0$  si et seulement si  $c_1 = 0$ , c'est-à-dire si  $X_0$  est colinéaire à  $(1, -1)$ . Toutes les autres solutions ont une norme qui tend vers  $+\infty$  : l'origine est un **col**.

## Ce qu'il faut retenir

- $\exp(A) = \sum A^k/k!$  converge absolument pour toute matrice, et  $\exp$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- $\exp(\text{diag}(\lambda_i)) = \text{diag}(e^{\lambda_i})$ , et  $\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}$ .
- Pour  $N$  nilpotente,  $\exp(N)$  est une somme finie ; pour  $A = \lambda I_n + N$ ,  $\exp(tA) = e^{\lambda t} \exp(tN)$ .

- Les valeurs propres de  $\exp(A)$  sont les  $e^\lambda$ , et  $\det(\exp A) = e^{\text{tr } A}$ .
- Si  $AB = BA$ , alors  $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ ; sinon, c'est faux en général.
- $t \rightarrow \exp(tA)$  est  $\mathcal{C}^1$ , de dérivée  $A \exp(tA)$ .
- La solution de  $X' = AX$ ,  $X(t_0) = X_0$  est  $X(t) = \exp((t - t_0)A) X_0$ , et l'espace des solutions est de dimension  $n$ .
- On résout en diagonalisant (solutions  $e^{\lambda t} V$ ) ou en trigonalisant (résolution en cascade).
- Si toutes les valeurs propres ont une partie réelle strictement négative, toutes les solutions tendent vers  $0$ .

## Questions fréquentes sur systèmes différentiels linéaires

---

Peut-on toujours écrire  $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$  ?

Non, cette formule n'est garantie que si  $A$  et  $B$  commutent. Sans cette hypothèse, elle est fautive en général : pour les deux matrices nilpotentes élémentaires de taille 2, les deux membres diffèrent. On montre même que si l'égalité  $\exp(tA) \exp(tB) = \exp(t(A + B))$  vaut pour tout réel  $t$ , alors  $AB = BA$ .

Comment calculer  $\exp(tA)$  quand  $A$  n'est pas diagonalisable ?

En dimension 2 ou 3, on écrit  $A = \lambda I + N$  avec  $N$  nilpotente lorsque  $A$  n'a qu'une valeur propre, et  $\exp(tA) = e^{\lambda t} \exp(tN)$  est une somme finie. Sinon, on trigonalise  $A = PTP^{-1}$  et on calcule  $\exp(tT)$  par blocs. On peut aussi résoudre directement le système triangulaire  $Y' = TY$  en cascade.

Pourquoi la solution du problème de Cauchy est-elle unique ?

Si  $Y$  est solution de  $X' = AX$  avec  $Y(t_0) = X_0$ , la fonction  $\exp(-(t - t_0)A) Y(t)$  a une dérivée nulle, car  $A$  commute avec son exponentielle. Elle est donc constante sur l'intervalle, égale à  $X_0$ . On en déduit  $Y(t) = \exp((t - t_0)A) X_0$ .

Quand toutes les solutions tendent-elles vers 0 ?

Toutes les solutions de  $X' = AX$  tendent vers 0 en plus l'infini si et seulement si toutes les valeurs propres complexes de  $A$  ont une partie réelle strictement négative. En effet, chaque coordonnée est une somme

de termes  $Q(t) e^{\lambda t}$ , dont le module vaut  $|Q(t)| e^{\operatorname{Re}(\lambda) t}$ .

## Pour aller plus loin en maths spé

---

- Les énoncés : [exercices de maths spé sur systèmes différentiels linéaires](#)
- À maîtriser avant : [Équations différentielles linéaires](#), [Polynômes d'endomorphismes et Cayley-Hamilton](#), [Compacité, connexité par arcs et dimension finie](#)
- Chapitre précédent : [Équations différentielles linéaires](#)
- Chapitre suivant : [Calcul différentiel dans les espaces normés](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)