

Systèmes différentiels linéaires

Corrigé de l'exercice 1 : Exponentielles diagonales et nilpotentes

1. La matrice $tD = \text{diag}(t, -2t, 0)$ est diagonale. Ses puissances sont donc $(tD)^k = \text{diag}(t^k, (-2t)^k, 0^k)$, et on somme coefficient par coefficient. Ainsi, $\exp(tD) = \text{diag}(e^t, e^{-2t}, 1)$.

2. Un calcul direct donne

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = N^2 N = 0.$$

Par conséquent, $N^k = 0$ pour $k \geq 3$, et la série se réduit à trois termes :

$$\exp(tN) = I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & 2t + \frac{3}{2}t^2 \\ 0 & & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est le résultat demandé.

3. D'après le cours, la solution du problème de Cauchy est $X(t) = \exp(tN) X(0)$, c'est-à-dire la troisième colonne de $\exp(tN)$. Donc $X(t) = \begin{pmatrix} 2t + \frac{3}{2}t^2 \\ 3t \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifions la première équation, qui s'écrit $x' = y + 2z$. D'une part, $x'(t) = 2 + 3t$. D'autre part, $y + 2z = 3t + 2$. L'égalité est donc satisfaite.

Corrigé de l'exercice 2 : Matrices de la forme $\lambda I + N$

1. On a $A = 2I_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0$. Or $2tI_2$ commute avec tN . D'après le théorème sur l'exponentielle d'une somme de matrices qui commutent, $\exp(tA) = \exp(2tI_2) \exp(tN) = e^{2t} (I_2 + tN)$. Ainsi, $\exp(tA) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Le système s'écrit $X' = AX$ avec $X(0) = (1, 1)$. Par conséquent, $X(t) = \exp(tA)(1, 1)$, soit $x(t) = (1+t)e^{2t}$ et $y(t) = e^{2t}$. On vérifie : $x'(t) = e^{2t} + 2(1+t)e^{2t} = 2x(t) + y(t)$.
3. De même, $B = -I_3 + M$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = 0$. Comme $-I_3$ commute avec M , on obtient

$$\exp(tB) = e^{-t} \left(I_3 + tM + \frac{t^2}{2} M^2 \right) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, par croissances comparées, e^{-t} , te^{-t} et t^2e^{-t} tendent vers 0. Chaque coefficient tend donc vers 0 : $\exp(tB) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Corrigé de l'exercice 3 : Exponentielle d'une matrice de rotation

1. On trouve $J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$. Par récurrence, $J^{2p} = (-1)^p I_2$ et $J^{2p+1} = (-1)^p J$.
2. La série $\sum \theta^k J^k / k!$ converge absolument. On peut donc regrouper les termes pairs et impairs :

$$\exp(\theta J) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p \theta^{2p}}{(2p)!} I_2 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p \theta^{2p+1}}{(2p+1)!} J.$$

On reconnaît les développements de $\cos$ et $\sin$. Ainsi, $\exp(\theta J) = \cos \theta I_2 + \sin \theta J$.

3. La solution vaut $X(t) = \exp(tJ)(1, 0)$, première colonne de $\exp(tJ)$. Donc $X(t) = (\cos t, \sin t)$. Ensuite, sans formule explicite, posons $g(t) = |X(t)|_2^2 = \langle X(t), X(t) \rangle$. Alors $g'(t) = 2 \langle X(t), JX(t) \rangle$. Or, pour $X = (x, y)$, $\langle X, JX \rangle = x(-y) + yx = 0$. Par conséquent, g est constante et $|X(t)|_2 = 1$ pour tout t .
4. Les matrices θJ et φJ commutent, donc $\exp((\theta + \varphi)J) = \exp(\theta J)\exp(\varphi J)$. La première colonne du membre de gauche vaut $(\cos(\theta + \varphi), \sin(\theta + \varphi))$. À droite, la première colonne du produit est $\exp(\theta J)(\cos \varphi, \sin \varphi)$. En identifiant, on obtient $\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$ et $\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi$.

Corrigé de l'exercice 4 : Exponentielle d'une matrice symétrique

1. Le polynôme caractéristique vaut $\chi_A = (X - 1)^2 - 4 = (X - 3)(X + 1)$. Pour 3 , on résout $-2x + 2y = 0$: vecteur propre $(1, 1)$. Pour -1 , on résout $2x + 2y = 0$: vecteur propre $(1, -1)$. Ainsi, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(3, -1)$, et $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. D'après le cours, $\exp(tA) = P \exp(tD) P^{-1}$. Le calcul donne

$$\exp(tA) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}.$$

C'est l'exponentielle cherchée. En $t = 0$, on retrouve bien I_2 .

3. La solution est $X(t) = \exp(tA)(2, 0)$, soit deux fois la première colonne. Donc $X(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} \end{pmatrix}$.

4. La solution générale s'écrit $X(t) = c_1 e^{3t}(1, 1) + c_2 e^{-t}(1, -1)$, avec $X_0 = c_1(1, 1) + c_2(1, -1)$. Si $c_1 = 0$, alors $X(t) = c_2 e^{-t}(1, -1) \rightarrow 0$. En revanche, si $c_1 \neq 0$, alors $e^{-3t}X(t) \rightarrow c_1(1, 1) \neq 0$, donc $|X(t)| \rightarrow +\infty$. Par conséquent, **la solution tend vers 0 si et seulement si $X_0 \in \text{Vect}((1, -1))$** .

Corrigé de l'exercice 5 : Déterminant et spectre de l'exponentielle

- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur, et sa diagonale est le produit des diagonales. Par récurrence, T^k est triangulaire supérieure de diagonale $(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$. Ensuite, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel, donc fermé en dimension finie. Les sommes partielles y sont, donc la limite $\exp(T)$ aussi. Enfin, le coefficient (i, i) de la somme partielle vaut $\sum_{k \leq m} \lambda_i^k / k! \rightarrow e^{\lambda_i}$. **Donc $\exp(T)$ est triangulaire supérieure de diagonale $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.**
- Sur $\mathbb{C}$, la matrice A est trigonalisable : $A = PTP^{-1}$. Par conséquent, $\exp(A) = P \exp(T) P^{-1}$ est semblable à $\exp(T)$. Elles ont le même polynôme caractéristique, $\prod (X - e^{\lambda_i})$. D'où $\text{Sp}(\exp A) = \{e^{\lambda}, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ et $\det(\exp A) = \prod e^{\lambda_i} = e^{\text{tr}(A)}$.
- Supposons $\exp(A) = \text{diag}(-1, 2)$ avec A réelle. Alors $\det(\exp A) = -2$. Or $\det(\exp A) = e^{\text{tr}(A)} > 0$, car $\text{tr}(A)$ est réel. C'est une contradiction : **une telle matrice n'existe pas.**
- On a $\text{tr}(A) = 1 + 5 - 3 = 3$. Par la question 2, $\det(\exp A) = e^3$, sans aucun calcul d'exponentielle.

Corrigé de l'exercice 6 : Deux matrices qui ne commutent pas

- On calcule $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Donc $AB \neq BA$.**
- Comme $A^2 = B^2 = 0$, on a $\exp(A) = I_2 + A$ et $\exp(B) = I_2 + B$. Ensuite, $\exp(A)\exp(B) = I_2 + A + B + AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\exp(B)\exp(A) = I_2 + A + B + BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Ces deux produits sont différents.
- Posons $S = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $S^2 = I_2$, donc $S^{2p} = I_2$ et $S^{2p+1} = S$. En regroupant les termes pairs et impairs,

$$\exp(A + B) = \operatorname{ch}(1) I_2 + \operatorname{sh}(1) S = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 1 & \operatorname{sh} 1 \\ 1 & \operatorname{ch} 1 \end{pmatrix}.$$

4. Le coefficient $(1, 1)$ de $\exp(A + B)$ vaut $\operatorname{ch}(1) \approx 1,543$, et non 2 . Ainsi, $\exp(A + B) \neq \exp(A)\exp(B)$: l'hypothèse de commutation est indispensable. Remarquons toutefois que les trois matrices ont le même déterminant $1 = e^0$, comme prévu par l'exercice 5.

Corrigé de l'exercice 7 : Exponentielle et polynôme annulateur

1. Par récurrence, $P^k = P$ pour tout $k \geq 1$. Donc

$$\exp(tP) = I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} P = I_n + (e^t - 1)P.$$

C'est la formule annoncée.

2. Chaque coefficient de U^2 vaut $1 + 1 + 1 = 3$, donc $U^2 = 3U$. Par récurrence, $U^k = 3^{k-1}U$ pour $k \geq 1$. Ainsi,

$$\exp(tU) = I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{k-1} t^k}{k!} U = I_3 + \frac{e^{3t} - 1}{3} U.$$

On obtient $\exp(tU) = I_3 + \frac{1}{3}(e^{3t} - 1)U$.

3. De $K^2 = -I_n$, on déduit $K^{2p} = (-1)^p I_n$ et $K^{2p+1} = (-1)^p K$. En séparant les indices pairs et impairs, comme à l'exercice 3, $\exp(tK) = \cos t I_n + \sin t K$.

Point de méthode : dès qu'un polynôme annulateur de degré 2 est connu, toutes les puissances se réduisent à une combinaison de I_n et de la matrice, et l'exponentielle aussi.

Corrigé de l'exercice 8 : Valeurs propres complexes et spirale

1. On a $\chi_A = (X + 1)^2 + 1$, dont les racines sont $-1 + i$ et $-1 - i$. Pour $\lambda = -1 + i$, on résout $(A - \lambda I_2)V = 0$, soit $-ix - y = 0$. **Le vecteur $V = (1, -i)$ convient.**

2. La fonction $Z(t) = e^{(-1+i)t}V$ est une solution complexe. Comme A est réelle, ses parties réelle et imaginaire sont des solutions réelles. Or

$$Z(t) = e^{-t}(\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \sin t - i \cos t \end{pmatrix}.$$

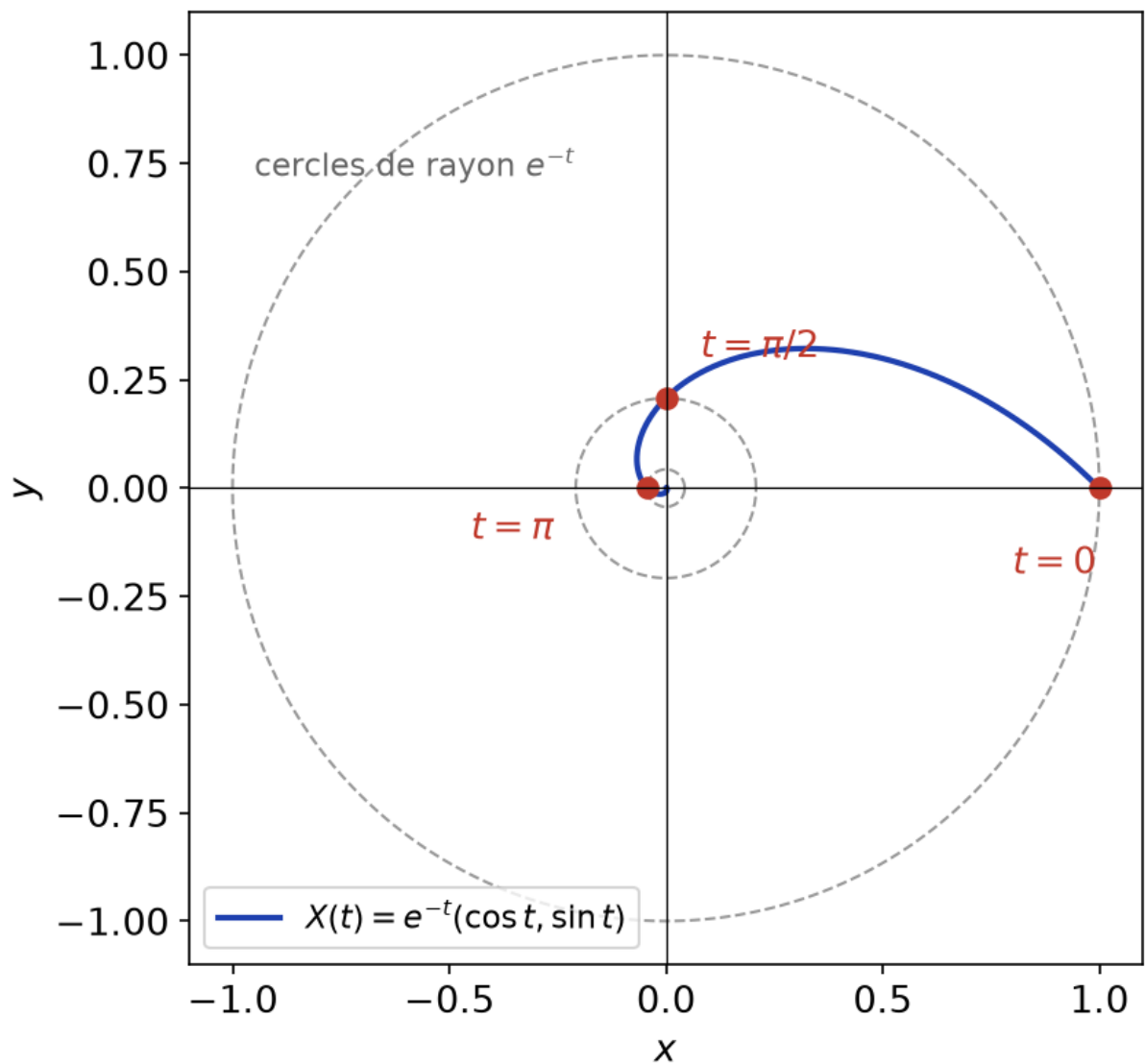
On obtient $X_1(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t)$ et $X_2(t) = e^{-t}(\sin t, -\cos t)$. Leurs valeurs en 0 , $(1, 0)$ et $(0, -1)$, sont indépendantes. Comme $X \rightarrow X(0)$ est un isomorphisme,

X_1 et X_2 forment une base de l'espace des solutions, qui est de dimension 2. **La solution générale est**

$$X(t) = e^{-t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t, c_1 \sin t - c_2 \cos t).$$

3. Les matrices $-I_2$ et J commutent, donc $\exp(tA) = e^{-t}\exp(tJ)$. D'après l'exercice 3, $\exp(tA) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Avec $X_0 = (\alpha, \beta)$, on retrouve la formule précédente pour $c_1 = \alpha$ et $c_2 = -\beta$.

4. Pour $X(0) = (1, 0)$, on obtient $X(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t)$ et $|X(t)|_2 = e^{-t}$. Le point tourne donc d'un angle t autour de l'origine, pendant que sa distance à l'origine décroît exponentiellement. La trajectoire est une spirale logarithmique qui converge vers 0 , comme le montre la figure ci-dessous : c'est un foyer stable.



Corrigé de l'exercice 9 : Système 3×3 diagonalisable

- On a bien $A = I_3 + U$. La matrice U est de rang 1, donc $\ker U$ est le plan $x + y + z = 0$, de dimension 2. De plus, $U(1, 1, 1) = 3(1, 1, 1)$. Ainsi, U a pour valeurs propres 0 (double) et 3, et elle est diagonalisable. Par conséquent, **A a pour valeurs propres 1, de sous-espace propre le plan $x + y + z = 0$, et 4, de sous-espace propre $\text{Vect}((1, 1, 1))$.**
- Les matrices tI_3 et tU commutent. Avec l'exercice 7, on obtient

$$\exp(tA) = e^t \exp(tU) = e^t I_3 + \frac{e^{4t} - e^t}{3} U.$$

C'est l'expression cherchée.

3. Comme $U(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$, on trouve

$$X(t) = e^t(1, 0, 0) + \frac{e^{4t} - e^t}{3}(1, 1, 1).$$

Donc $x(t) = \frac{e^{4t} + 2e^t}{3}$ et $y(t) = z(t) = \frac{e^{4t} - e^t}{3}$. Vérification :

$$2x + y + z = \frac{1}{3}(4e^{4t} + 2e^t) = x'(t).$$

4. Décomposons $X_0 = Y_0 + Z_0$, avec Y_0 dans le plan $x + y + z = 0$ et $Z_0 \in \text{Vect}((1, 1, 1))$. Alors $X(t) = e^t Y_0 + e^{4t} Z_0$. Si $Z_0 \neq 0$, $e^{-4t} X(t) \rightarrow Z_0$, donc $|X(t)| \sim e^{4t} |Z_0| \rightarrow +\infty$. Sinon, $X(t) = e^t Y_0$ avec $Y_0 \neq 0$, et $|X(t)| = e^t |Y_0| \rightarrow +\infty$. **Toute solution non nulle tend donc vers l'infini en norme**, ce qui est cohérent avec des valeurs propres toutes strictement positives.

Corrigé de l'exercice 10 : Système triangulaire résolu en cascade

1. D'abord, $z' = -z$ donne $z(t) = c e^{-t}$, avec $c \in \mathbb{R}$. Ensuite, $y' = y + 2c e^{-t}$. Les solutions homogènes sont $b e^t$; cherchons une solution particulière $k e^{-t}$. On obtient $-k = k + 2c$, soit $k = -c$. Donc $y(t) = b e^t - c e^{-t}$. Enfin, $x' = x + y + z = x + b e^t$, car les termes en e^{-t} se compensent. La variation de la constante, $x = \alpha(t) e^t$, donne $\alpha' = b$. Ainsi, $x(t) = (a + b t) e^t$, $y(t) = b e^t - c e^{-t}$, $z(t) = c e^{-t}$, avec a, b, c réels.

2. Les conditions initiales donnent $c = 1$, $b - c = 1$ et $a = 1$. Donc $b = 2$, et

$$X(t) = \begin{pmatrix} (1 + 2t)e^t, \\ 2e^t - e^{-t}, \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

3. Si $b \neq 0$, alors $|y(t)| \geq |b| e^t - |c| \rightarrow +\infty$. Si $b = 0$ et $a \neq 0$, alors $|x(t)| = |a| e^t \rightarrow +\infty$. Enfin, si $a = b = 0$, la solution $c e^{-t}(0, -1, 1)$ est bornée. Or $X(0) = (a, b - c, c)$. **La solution est bornée sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $X_0 \in \text{Vect}((0, -1, 1))$** . Ce vecteur est justement un vecteur propre de la matrice pour la valeur propre -1 , la seule valeur propre de partie réelle négative.

Corrigé de l'exercice 11 : Racine double et trigonalisation

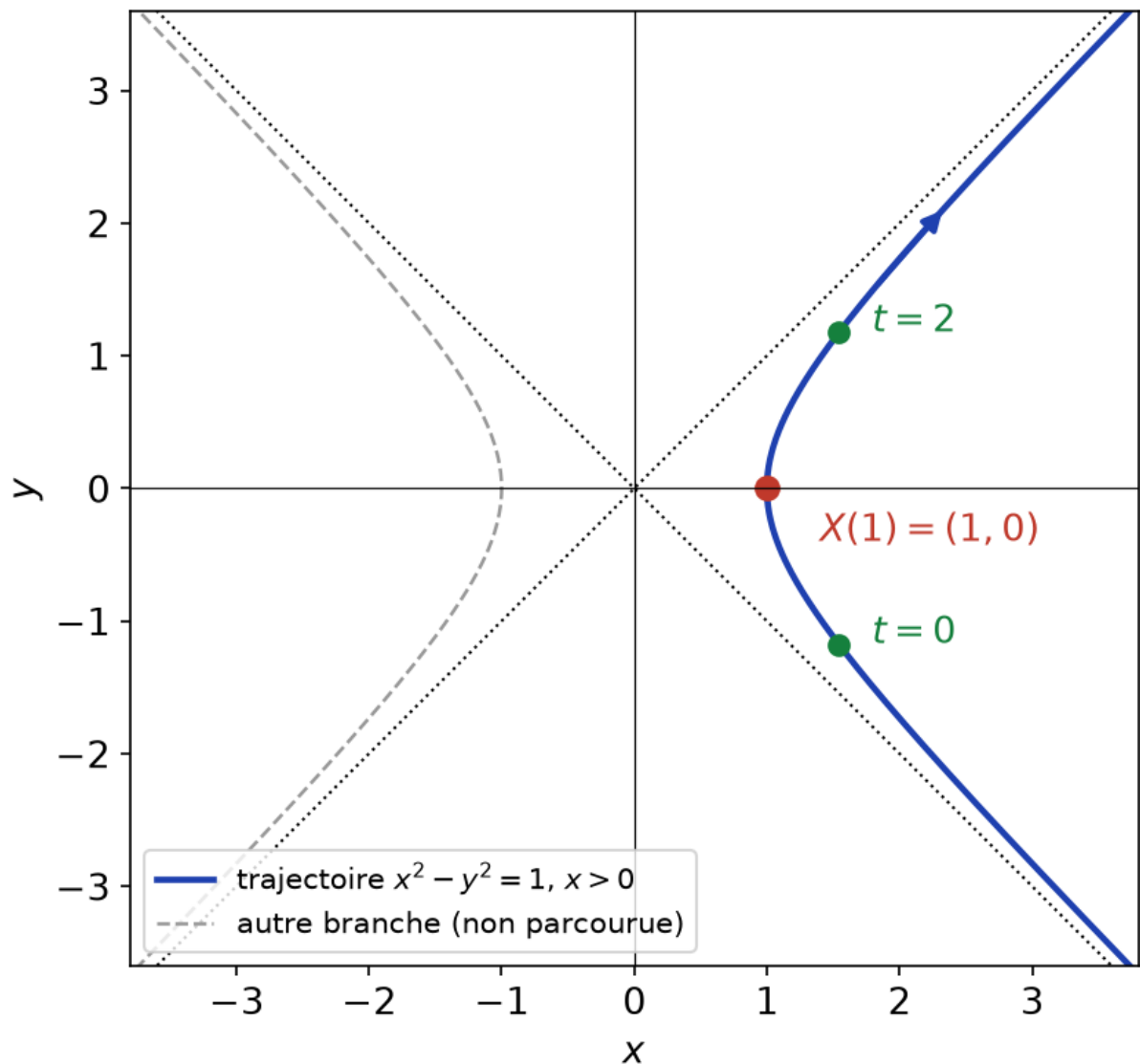
- On a $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à $2I_2$, donc égale à $2I_2$. Ce n'est pas le cas : **A n'est pas diagonalisable.**
- On a $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, de noyau $\text{Vect}((1, 1))$. On prend $V_1 = (1, 1)$. Ensuite, $(A - 2I_2)(x, y) = (x - y, x - y) = (1, 1)$ est satisfait par $V_2 = (1, 0)$. Alors $AV_1 = 2V_1$ et $AV_2 = V_1 + 2V_2$. Ainsi, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant -1 , convient, avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- Première méthode : $\exp(tT) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par l'exercice 2. Puis
$$P \exp(tT) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & t \end{pmatrix}, \quad P \exp(tT) P^{-1} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}.$$
Seconde méthode : $N = A - 2I_2$ vérifie $N^2 = 0$, et $2I_2$ commute avec N . Donc $\exp(tA) = e^{2t}(I_2 + tN)$. **Les deux méthodes donnent**
$$\exp(tA) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}.$$
- On calcule $\exp(tA)(1, 2) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t-2t \\ t+2-2t \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t \\ 2-t \end{pmatrix}$. Donc $X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t \\ 2-t \end{pmatrix}$. Vérification :
$$x' = e^{2t}(1-2t) \text{ et } 3x - y = e^{2t}(3-3t-2+t) = e^{2t}(1-2t).$$

Corrigé de l'exercice 12 : Problème de Cauchy en un instant quelconque

- La matrice de a est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $A^2 = I_2$. Donc $A^{2p} = I_2$ et $A^{2p+1} = A$. En regroupant les termes pairs et impairs de la série,
$$\exp(tA) = \text{ch}(t) I_2 + \text{sh}(t) A.$$
- D'après le théorème de Cauchy, la solution est $u(t) = \exp((t-1)a)(1, 0)$. Matriciellement,

c'est la première colonne de $\exp((t-1)A)$. Donc $v(t) = \begin{pmatrix} \text{ch}(t-1) \\ \text{sh}(t-1) \end{pmatrix}$.

3. Pour tout t , $x^2 - y^2 = \text{ch}^2(t-1) - \text{sh}^2(t-1) = 1$. De plus, $x(t) > 0$. Enfin, $t \rightarrow \text{sh}(t-1)$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. **La trajectoire est donc toute la branche $x > 0$ de l'hyperbole, parcourue une fois, de bas en haut.** La figure ci-dessous représente cette branche et le point atteint en $t = 1$.



4. Posons $w(t) = \exp(-(t-1)A)v(t)$. Par dérivation d'un produit,

$$w'(t) = -A \exp(-(t-1)A)v(t) + \exp(-(t-1)A)Av(t).$$

Or A commute avec $\exp(-(t-1)A)$, donc $w' = 0$. Ainsi, w est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, égale à $w(1) = v(1)$. En multipliant par $\exp((t-1)A)$, inverse de

$\exp(-(t-1)A)$, on obtient $v(t) = \exp((t-1)A)v(1)$, d'où l'unicité.

Corrigé de l'exercice 13 : Équation d'ordre 2 et matrice compagnon

1. Si y est deux fois dérivable et $X = (y, y')$, alors $X' = (y', y'')$. L'équation équivaut à $y'' = -y - 2y'$. **Donc y est solution si et seulement si $X' = AX$, avec**
 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Réciproquement, si $X = (x_1, x_2)$ est solution, alors $x_1' = x_2$ et $y = x_1$ convient.

2. On a $A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et $(A + I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $-I_2$ commute avec $A + I_2$,

$$\exp(tA) = e^{-t} \left(I_2 + t(A + I_2) \right) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}.$$

C'est l'exponentielle cherchée.

3. La solution est la première coordonnée de $\exp(tA)(y_0, y_1)$. **Donc**
 $y(t) = e^{-t}((1+t)y_0 + t y_1)$, et pour $y_0 = 1$, $y_1 = 0$, $y(t) = (1+t)e^{-t}$.
 Vérifions : $y' = -te^{-t}$ et $y'' = (t-1)e^{-t}$. Donc
 $y'' + 2y' + y = e^{-t}(t-1-2t+1+t) = 0$. De plus, la seconde ligne de $\exp(tA)$ donne $y'(t) = -te^{-t}$, ce qui est cohérent.

Corrigé de l'exercice 14 : L'exponentielle comme limite

1. Pour $1 \leq k \leq n$, on écrit

$$\frac{1}{n^k} \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k! n^k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right).$$

Chaque facteur du produit est dans $[0, 1]$, donc le produit aussi. Pour $k = 0$, les deux termes

valent 1. D'où $0 \leq \frac{1}{k!} - \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!}$.

2. Par la formule du binôme (I_n commute avec A), $(I_n + A/n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^{-k} A^k$.

Posons $\alpha_k = \frac{1}{k!} - \binom{n}{k} n^{-k} \geq 0$, avec $\alpha_0 = 0$. Alors

$$\exp(A) - \left(I_n + \frac{A}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^n \alpha_k A^k + \sum_{k > n} \frac{A^k}{k!}.$$

Avec $|A^k| \leq |A|^k$ pour $k \geq 1$, l'inégalité triangulaire donne une majoration par

$$\sum_{k \leq n} \alpha_k |A|^k + \sum_{k > n} |A|^k / k!. \text{ Or cette dernière somme vaut exactement}$$

$e^{|A|} - (1 + |A|/n)^n$, par le même calcul dans $\mathbb{R}$. **L'inégalité demandée est établie.**

3. Le réel $a = |A|$ est fixé, et $(1 + a/n)^n = \exp(n \ln(1 + a/n)) \rightarrow e^a$, car $n \ln(1 + a/n) \rightarrow a$. Le majorant tend donc vers 0. **Ainsi, $(I_n + A/n)^n \rightarrow \exp(A)$.**

Corrigé de l'exercice 15 : L'exponentielle est un polynôme en A

1. L'ensemble $\mathbb{K}[A]$ est l'image de l'application linéaire $Q \rightarrow Q(A)$, donc un sous-espace vectoriel. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$ avec $\deg \chi_A = n$. Par division euclidienne, tout $Q(A)$ s'écrit alors $R(A)$ avec $\deg R \leq n-1$. Donc $\mathbb{K}[A] = \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$, de dimension au plus n . **Enfin, un sous-espace de dimension finie est fermé.**

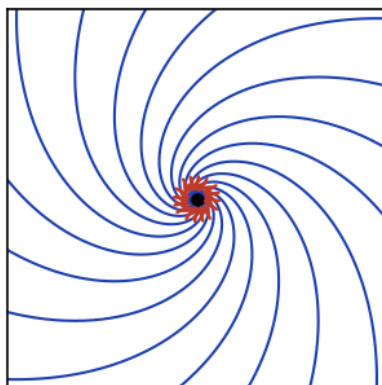
2. Les sommes partielles $\sum_{k \leq m} A^k / k!$ appartiennent à $\mathbb{K}[A]$. Comme ce sous-espace est fermé, la limite $\exp(A)$ y appartient aussi. **Il existe donc Q de degré au plus $n-1$ tel que $\exp(A) = Q(A)$.**

3. Si $MA = AM$, alors $MA^k = A^k M$ pour tout k , donc M commute avec tout polynôme en A . **En particulier, M commute avec $\exp(A) = Q(A)$.**

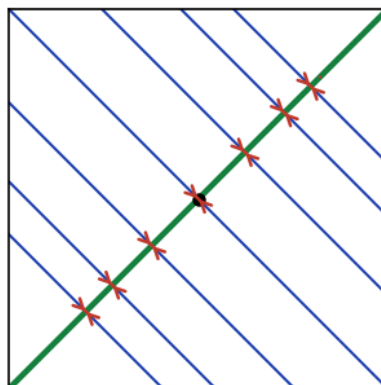
4. Si $A^2 = I_2$, le calcul de l'exercice 12 donne $\exp(A) = \text{ch}(1)I_2 + \text{sh}(1)A$. **Donc $Q = \text{ch}(1) + \text{sh}(1)X$.**

Corrigé de l'exercice 16 : Comportement des solutions selon un paramètre

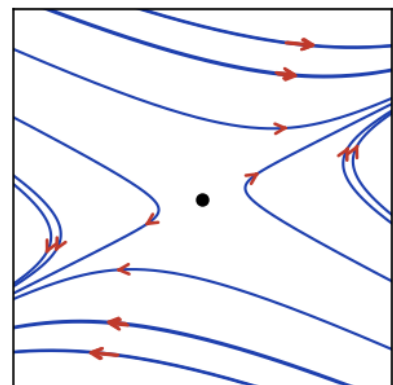
- On a $\chi_{A_a} = (X + 1)^2 - a$. Si $a > 0$, les valeurs propres sont $-1 \pm \sqrt{a}$. Si $a = 0$, -1 est valeur propre double. Si $a < 0$, ce sont $-1 \pm i\sqrt{-a}$.
- Si $a < 0$, les deux valeurs propres sont distinctes, donc A_a est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et leur partie réelle vaut -1 . Si $0 < a < 1$, les valeurs propres $-1 \pm \sqrt{a}$ sont distinctes et strictement négatives. Dans les deux cas, d'après le théorème du cours, toutes les solutions tendent vers 0 .
Pour $a = 0$, $A_0 = -I_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0$. Donc $\exp(tA_0) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 0$ par croissances comparées. **Pour tout $a < 1$, toutes les solutions tendent vers 0 .**
- Pour $a = 1$, les valeurs propres sont 0 et -2 . Le noyau de A_1 est dirigé par $(1, 1)$; celui de $A_1 + 2I_2$ par $(1, -1)$. **Les solutions sont $X(t) = c_1(1, 1) + c_2 e^{-2t}(1, -1)$.** Elles sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ et tendent vers $c_1(1, 1)$. En particulier, les solutions constantes $c_1(1, 1)$, avec $c_1 \neq 0$, ne tendent pas vers 0 . Toute la droite $y = x$ est formée de points fixes.
- Pour $a > 1$, $\lambda = -1 + \sqrt{a} > 0$. Avec V un vecteur propre associé, $X(t) = e^{\lambda t} V$ est solution et $|X(t)| = e^{\lambda t} |V| \rightarrow +\infty$. **Il existe donc des solutions non bornées.** L'autre valeur propre $-1 - \sqrt{a}$ est négative : l'origine est un col. La figure ci-dessous compare les trois régimes.



$a = -1$: foyer stable



$a = 1$: droite de points fixes



$a = 4$: col

Corrigé de l'exercice 17 : Commutation et exponentielle d'une somme

1. D'après le cours, $\varphi(t) = \exp(tA)$ est dérivable et $\varphi'(t) = A\varphi(t)$. Or le membre de droite est dérivable, de dérivée $A\varphi'(t) = A^2\varphi(t)$, continue. **Donc φ est de classe $\mathcal{C}^2$, avec $\varphi' = A\varphi$ et $\varphi'' = A^2\varphi$.**
2. Posons $f(t) = \exp(tA)\exp(tB)$. En dérivant le produit,
 $f'(t) = A\exp(tA)\exp(tB) + \exp(tA)B\exp(tB)$. En dérivant encore,
 $f''(t) = A^2e^{tA}e^{tB} + 2Ae^{tA}Be^{tB} + e^{tA}B^2e^{tB}$.
Donc $f''(0) = A^2 + 2AB + B^2$. D'autre part, $g(t) = \exp(t(A+B))$ vérifie
 $g''(0) = (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. Comme $f = g$, leurs dérivées secondes en 0 coïncident. **On en déduit $AB = BA$.**
3. On calcule $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $AB \neq BA$.
Par contraposée de la question 2, **l'égalité $\exp(tA)\exp(tB) = \exp(t(A+B))$ est fausse pour au moins un réel t .**

Corrigé de l'exercice 18 : Exponentielle non injective

1. D'après l'exercice 3, $\exp(2\pi J) = \cos(2\pi)I_2 + \sin(2\pi)J = I_2$. Or $\exp(0) = I_2$ et $2\pi J \neq 0$. **L'exponentielle n'est donc pas injective.**
2. Écrivons $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors
 $\exp(A) = P \text{diag}(e^{\lambda_i}) P^{-1}$. Ainsi, $\exp(A) = I_n$ si et seulement si
 $\text{diag}(e^{\lambda_i}) = I_n$, c'est-à-dire $e^{\lambda_i} = 1$ pour tout i . Or $e^z = 1$ équivaut à $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
D'où l'équivalence demandée.
3. Soit p tel que $N^p = 0$. On a $\exp(N) - I_n = NU$, avec
 $U = \sum_{k=1}^p \frac{N^{k-1}}{(k-1)!} = I_n + M$, où $M = \sum_{k=2}^p \frac{N^{k-1}}{(k-1)!}$. La matrice M est un multiple de N qui commute avec N , donc $M^p = 0$. Ainsi, $U = I_n + M$ est inversible, d'inverse

$\sum_{k=0}^{p-1} (-M)^k$, car $(I_n + M) \sum_{k=0}^{p-1} (-M)^k = I_n - (-M)^p = I_n$. Enfin, $NU = 0$ entraîne $N = NUU^{-1} = 0$. **Donc** $N = 0$.

4. Supposons $\exp(A) = D = \text{diag}(-1, -2)$ avec A réelle. D'après l'exercice 15, A commute avec $\exp(A) = D$. En écrivant $AD = DA$ coefficient par coefficient, $a_{ij}d_j = d_i a_{ij}$, donc $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, car $d_1 \neq d_2$. Ainsi $A = \text{diag}(\alpha, \beta)$ avec α, β réels, et $\exp(A) = \text{diag}(e^\alpha, e^\beta)$. Or $e^\alpha > 0 \neq -1$. **Aucune matrice réelle ne convient**, bien que $\det D = 2 > 0$.

Corrigé de l'exercice 19 : Parties réelles négatives et convergence vers 0

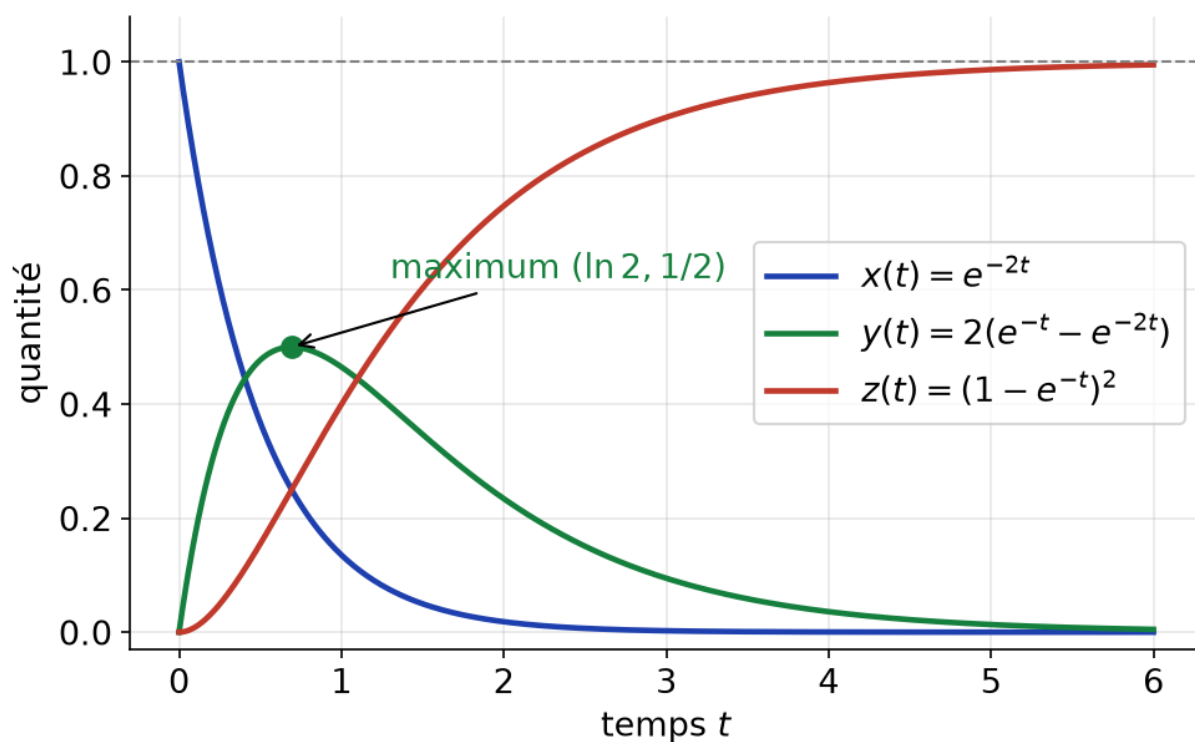
1. Par variation de la constante, les solutions sont $y(t) = e^{\lambda t} \left(c + \int_0^t e^{-\lambda s} f(s) ds \right)$. Par linéarité, il suffit de traiter $f(s) = Q(s)e^{\mu s}$. Si $\mu = \lambda$, l'intégrale vaut $\int_0^t Q$, qui est un polynôme. Si $\alpha = \mu - \lambda \neq 0$, l'application $R \rightarrow R' + \alpha R$ est linéaire et injective sur $\mathbb{C}_d[X]$, où $d = \deg Q$, car elle conserve le degré. Elle est donc bijective, et il existe R tel que $(Re^{\alpha s})' = Qe^{\alpha s}$. L'intégrale vaut alors $R(t)e^{\alpha t} - R(0)$. En multipliant par $e^{\lambda t}$, **y est une somme de termes $R(t)e^{\lambda t}$ et $R(t)e^{\mu t}$.**
2. La dernière équation $y'_n = \lambda_n y_n$ donne $y_n = ce^{\lambda_n t}$: la propriété est vraie au rang n . Supposons-la vraie pour les indices $k+1, \dots, n$. La k -ième équation s'écrit $y'_k = \lambda_k y_k + f_k$, avec $f_k = \sum_{j>k} t_{kj} y_j$. Par hypothèse, f_k est une somme de termes $R(t)e^{\lambda_j t}$, $j > k$. D'après la question 1, y_k **est une somme de termes $R(t)e^{\lambda_j t}$ avec $j \geq k$** , ce qui achève la récurrence.
3. Trigonalisons : $A = PTP^{-1}$. Si $X' = AX$, alors $Y = P^{-1}X$ vérifie $Y' = TY$. Chaque coordonnée de Y est une somme de termes $R(t)e^{\lambda_j t}$, avec $|R(t)e^{\lambda_j t}| = |R(t)|e^{\text{Re}(\lambda_j)t}$. Comme $\text{Re}(\lambda_j) < 0$, ces termes tendent vers 0 par croissances comparées. Donc $Y(t) \rightarrow 0$, puis $X = PY \rightarrow 0$ par continuité de $Y \rightarrow PY$. **Toute solution tend vers 0.**
4. Supposons qu'une valeur propre λ vérifie $\text{Re}(\lambda) \geq 0$, et soit $V \neq 0$ tel que $AV = \lambda V$

. Alors $X(t) = e^{\lambda t}V$ est solution et $|X(t)| = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t}|V| \geq |V| > 0$ pour $t \geq 0$. Elle ne tend donc pas vers 0 . **Par contraposée, la réciproque est démontrée.**

Point de méthode : la résolution en cascade d'un système triangulaire suffit à décrire toutes les solutions, sans aucune décomposition plus fine de la matrice.

Corrigé de l'exercice 20 : Problème, trois compartiments

1. Avec $X = (x, y, z)$, le système s'écrit $X' = AX$, où $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. De plus, $(x + y + z)' = -2x + 2x - y + y = 0$. Donc $x + y + z$ **est constante, égale à** $x(0) + y(0) + z(0) = 1$: la substance se conserve.
2. La matrice A est triangulaire inférieure, de valeurs propres -2 , -1 et 0 . Elles sont distinctes, donc A est diagonalisable. Pour -2 , on résout $2x + y = 0$ et $y + 2z = 0$: vecteur $V_1 = (1, -2, 1)$. Pour -1 , on obtient $x = 0$ et $y + z = 0$: vecteur $V_2 = (0, 1, -1)$. Pour 0 , on obtient $x = y = 0$: vecteur $V_3 = (0, 0, 1)$. **La famille (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres.**
3. La solution générale est $X(t) = c_1 e^{-2t}V_1 + c_2 e^{-t}V_2 + c_3 V_3$. En $t = 0$, on doit avoir $(c_1, -2c_1 + c_2, c_1 - c_2 + c_3) = (1, 0, 0)$, donc $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$. Par conséquent, $x(t) = e^{-2t}$, $y(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t})$ **et** $z(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} = (1 - e^{-t})^2$. On retrouve bien $x + y + z = 1$.
4. On a $y'(t) = -2e^{-t} + 4e^{-2t} = 2e^{-2t}(2 - e^t)$. Cette dérivée est positive pour $t < \ln 2$ et négative ensuite. **La quantité y est maximale en $t = \ln 2$, et vaut alors** $2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$.
5. Les termes e^{-t} et e^{-2t} tendent vers 0 . **Donc $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ et $z \rightarrow 1$** : toute la substance finit dans le compartiment 3. En effet, les composantes sur V_1 et V_2 s'amortissent, car -2 et -1 sont strictement négatives. Seule reste la composante sur V_3 , associée à la valeur propre 0 . La figure ci-dessous montre l'évolution des trois quantités.



Corrigé de l'exercice 21 : Problème, trigonalisation d'un système 3×3

1. On développe $\det(XI_3 - A)$ selon la première ligne :

$$\chi_A = (X - 1)[(X - 1)(X - 2) + 1] - (X - 1) = (X - 1)^2(X - 2).$$

Ensuite, $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donne $z = 0$ et $x = y$, d'où

$E_1 = \text{Vect}((1, 1, 0))$. De même, $A - 2I_3$ donne $x = z$ et $y = z$, d'où

$E_2 = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Comme $\dim E_1 = 1 < 2$, **A n'est pas diagonalisable.**

2. On a $(A - I_3)(0, b, c) = (c, c, -b + c)$. L'égalité avec $(1, 1, 0)$ impose $c = 1$ et $b = 1$: $V_2 = (0, 1, 1)$. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant 1, donc elle est inversible. Enfin, $AV_1 = V_1$, $AV_2 = V_1 + V_2$ et $AV_3 = 2V_3$. Ces relations traduisent exactement $P^{-1}AP = T$.

3. Le bloc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour exponentielle $e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comme à l'exercice 2.

Comme T est diagonale par blocs, $\exp(tT) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$. Par la méthode du pivot, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, et on vérifie $PP^{-1} = I_3$. Le produit $P\exp(tT)P^{-1}$ donne alors

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{2t} - te^t & (1+t)e^t & \\ ,e^{2t} & e^{2t} - e^t & \\ e^{2t} - (1+t)e^t & (2+t)e^t - e^{2t} & \& e^{2t} - e^t \\ e^{2t} - e^t & t - e^{2t} & \& e^{2t} \end{pmatrix}.$$

En $t = 0$, on retrouve bien I_3 .

4. Les coordonnées de $X_0 = (1, 0, 0)$ dans la base (V_1, V_2, V_3) sont $P^{-1}X_0 = (0, -1, 1)$. Donc $Y(t) = \exp(tT)(0, -1, 1) = (-te^t, -e^t, e^{2t})$. En revenant à $X = PY = -te^tV_1 - e^tV_2 + e^{2t}V_3$, $X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} - te^t, \\ ,e^{2t} - (1+t)e^t, \\ ,e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$.
C'est bien la première colonne de $\exp(tA)$.

5. Notons $(\alpha, \beta, \gamma) = P^{-1}X_0$. Alors $X(t) = (\alpha + \beta t)e^tV_1 + \beta e^tV_2 + \gamma e^{2t}V_3$. Par croissances comparées, $e^{-2t}X(t) \rightarrow \gamma V_3$. Cette limite est nulle si et seulement si $\gamma = 0$. Or γ est la troisième ligne de $P^{-1}X_0$, soit $x_0 - y_0 + z_0$. **La condition cherchée est donc** $x_0 - y_0 + z_0 = 0$: c'est le plan $\text{Vect}(V_1, V_2) = \ker(A - I_3)^2$.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [systèmes différentiels linéaires, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur systèmes différentiels linéaires](#)
- À maîtriser avant : [Équations différentielles linéaires](#), [Polynômes d'endomorphismes et Cayley-Hamilton](#), [Compacité, connexité par arcs et dimension finie](#)

- Chapitre précédent : [Équations différentielles linéaires](#)
- Chapitre suivant : [Calcul différentiel dans les espaces normés](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)