

Suites récurrentes

Exercice 1 : Suites arithmétiques et géométriques

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3 = 7$ et $u_{10} = 28$. Soit (v_n) une suite géométrique de raison réelle telle que $v_2 = 12$ et $v_5 = 96$.

1. Déterminez la raison r et le premier terme u_0 de (u_n) .
2. Calculez $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$.
3. Déterminez la raison q et le premier terme v_0 de (v_n) .
4. Calculez $T = v_0 + v_1 + \dots + v_9$.

Exercice 2 : Terme général d'une suite arithmético-géométrique

On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminez le réel ℓ tel que $\ell = 3\ell - 4$.
2. Montrez que la suite $v_n = u_n - \ell$ est géométrique, puis donnez u_n en fonction de n .
3. Calculez $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
4. Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) converge-t-elle ?

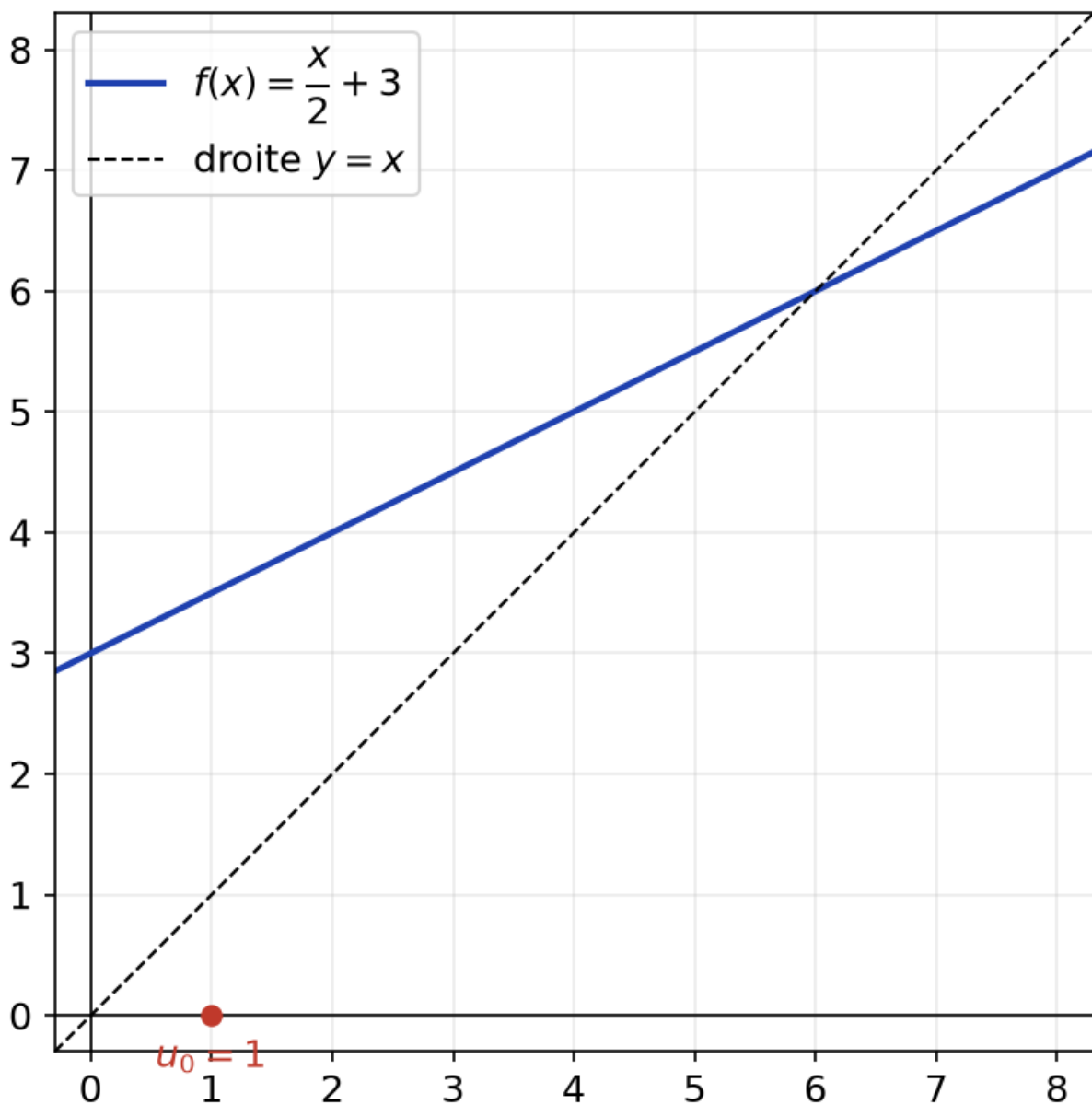
Exercice 3 : Évolution d'un stock

Un entrepôt contient 1 000 pièces au début de l'année 0. Chaque année, 20 % des pièces présentes sont expédiées, puis 300 pièces neuves sont livrées. On note u_n le nombre de pièces au début de l'année n , sans se soucier de l'arrondi à l'entier.

1. Justifiez que $u_{n+1} = 0,8 u_n + 300$.
2. Exprimez u_n en fonction de n , puis étudiez la monotonie et la limite de (u_n) .
3. À partir de quelle année le stock dépasse-t-il 1 490 pièces ?

Exercice 4 : Nombre d'itérations pour une précision donnée

Soit $f(x) = \frac{x}{2} + 3$, et la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. La courbe de f et la droite $y = x$ sont tracées ci-dessous.



1. Construisez sur la figure les termes u_1 , u_2 et u_3 . Que conjecturez-vous ?
2. Déterminez u_n en fonction de n et démontrez la conjecture.
3. Déterminez le plus petit entier n tel que $|u_n - 6| < 10^{-3}$.

Exercice 5 : Récurrence linéaire à racines distinctes

On considère la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 8$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$ pour tout

$n \in \mathbb{N}$.

1. Écrivez l'équation caractéristique et résolvez-la.
2. Déterminez u_n en fonction de n . Vérifiez le résultat sur u_2 .
3. Donnez un équivalent simple de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.
4. Plus généralement, on garde la relation de récurrence mais on laisse u_0 et u_1 quelconques. À quelle condition sur u_0 et u_1 a-t-on $\frac{u_n}{3^n} \rightarrow 0$?

Exercice 6 : Récurrence linéaire à racine double

On considère la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Résolvez l'équation caractéristique.
2. Déterminez u_n en fonction de n .
3. Vérifiez directement, par récurrence double, la formule obtenue.
4. Déterminez la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 7 : Récurrence linéaire à racines complexes

On considère la suite réelle définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Résolvez l'équation caractéristique dans $\mathbb{C}$ et écrivez ses racines sous forme exponentielle.

- Montrez que $u_n = 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}$ pour tout n .
- Pour quels entiers n a-t-on $u_n = 0$?
- La suite (u_n) est-elle bornée ? A-t-elle une limite ?

Exercice 8 : Suite de Fibonacci et nombre d'or

La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

- Démontrez la formule de Binet : $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.
- Montrez que $F_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ et que $\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \varphi$.
- Montrez que F_n est l'entier le plus proche de $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ pour tout $n \geq 0$.
- Démontrez l'identité de Cassini : $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 9 : Récurrence d'ordre 2 avec second membre constant

On considère la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Déterminez la suite constante c qui vérifie la relation de récurrence.
- Montrez que $v_n = u_n - c$ vérifie une récurrence linéaire homogène d'ordre 2.
- Déduisez-en u_n en fonction de n , puis vérifiez sur u_2 .

Exercice 10 : Continuité et point fixe, un contre-exemple

On définit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{x}{2}$ pour $x \in]0, 1]$. On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculez u_n pour tout n et déterminez la limite ℓ de la suite.
2. Comparez $f(\ell)$ et ℓ . Quelle hypothèse du théorème du point fixe n'est pas satisfaite ?
3. On considère maintenant $g :]0, 1] \rightarrow]0, 1]$, $g(x) = \frac{x}{2}$, et $v_0 = 1$, $v_{n+1} = g(v_n)$.
La fonction g est continue. Pourquoi la limite de (v_n) n'est-elle pas un point fixe de g ?

Exercice 11 : Suite définie par une racine carrée

Soit $f(x) = \sqrt{2+x}$ sur $[-2, +\infty[$, et la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Déterminez les points fixes de f .
2. On suppose $u_0 = 0$. Montrez que $[0, 2]$ est stable par f , puis que (u_n) est croissante. Concluez sur sa limite.
3. On suppose $u_0 = 7$. Trouvez un intervalle stable contenant u_0 et étudiez la suite.
4. Dans le cas $u_0 = 0$, montrez que $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3}|u_n - 2|$, puis que $|u_n - 2| \leq \frac{2}{3^n}$.

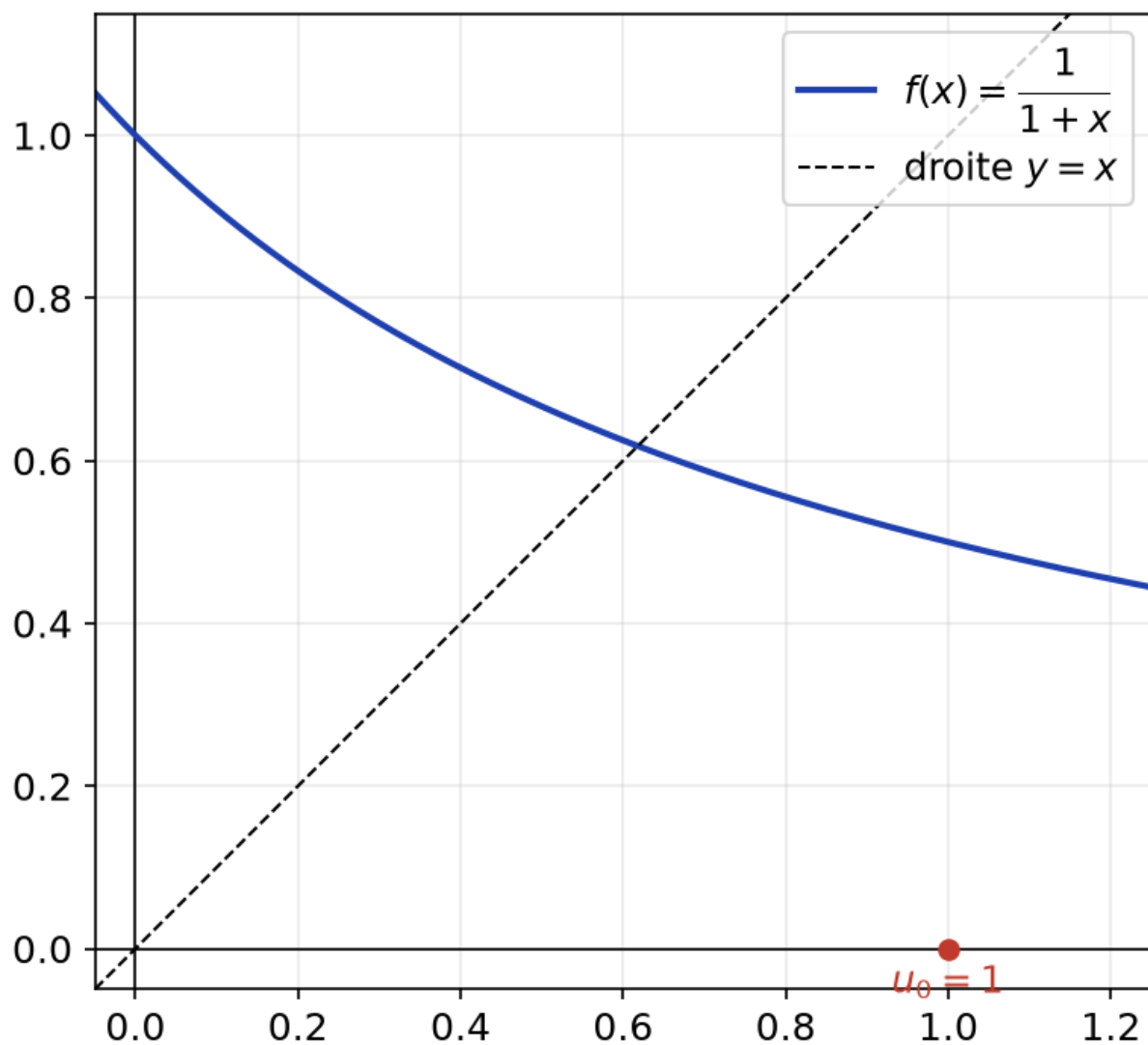
Exercice 12 : Discussion selon le premier terme

Soit $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ et la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudiez le signe de $f(x) - x$. Déduisez-en la monotonie de (u_n) , quel que soit u_0 .
2. Déterminez les points fixes de f .
3. On suppose $|u_0| \leq \frac{1}{2}$. Montrez que $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ pour tout $n \geq 1$, puis déterminez la limite.
4. On suppose $|u_0| > \frac{1}{2}$. Montrez que $u_n \rightarrow +\infty$.

Exercice 13 : Une suite en escargot

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $[0, +\infty[$, et la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. La figure ci-dessous représente f et la droite $y = x$.



1. Montrez que $[\frac{1}{2}, 1]$ est stable par f et que f admet un unique point fixe ℓ dans cet intervalle. Donnez sa valeur exacte.
2. Montrez que $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{4}{9}|u_n - \ell|$ pour tout n . Déduisez-en que (u_n) converge vers ℓ .
3. Déterminez un rang N   partir duquel $|u_n - \ell| \leq 10^{-6}$.
4.  tudiez la monotonie des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .
5. Avec la suite de Fibonacci (F_n) , montrez que $u_n = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$.

Exercice 14 : Suite logistique de paramètre 2

Soit $f(x) = 2x(1 - x)$ et la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Déterminez les points fixes de f .
2. On pose $v_n = 1 - 2u_n$. Montrez que $v_{n+1} = v_n^2$, puis exprimez u_n en fonction de u_0 et de n .
3. Discutez la limite de (u_n) selon la valeur de u_0 .
4. On prend $u_0 = \frac{1}{4}$. Déterminez le plus petit n tel que $|u_n - \frac{1}{2}| \leq 10^{-10}$. Commentez la vitesse de convergence.

Exercice 15 : Convergence lente vers zéro

Soit $f(x) = x - x^2$ et la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrez que $]0, \frac{1}{2}]$ est stable par f , puis que (u_n) est décroissante et converge vers 0.
2. Montrez que $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{1 - u_n}$ pour tout n .
3. Dédisez-en que $\frac{1}{2n+2} \leq u_n \leq \frac{1}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On veut $u_n \leq 10^{-3}$. Donnez un rang qui convient et un rang en dessous duquel c'est impossible. Comparez avec l'exercice 4.

Exercice 16 : Point fixe du cosinus

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos u_n$.

1. Montrez que $[0, 1]$ est stable par la fonction cosinus.
2. Montrez que l'équation $\cos x = x$ a une unique solution α dans $[0, 1]$.
3. À l'aide de la formule $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$, montrez que $|\cos a - \cos b| \leq \sin(1) |a - b|$ pour tous $a, b \in [0, 1]$.
4. Déduisez-en que $u_n \rightarrow \alpha$, puis un rang N qui garantit $|u_n - \alpha| \leq 10^{-6}$ pour $n \geq N$. On donne $\ln(\sin 1) \approx -0,1726$ et $\ln 10 \approx 2,3026$.

Exercice 17 : Méthode de Newton pour racine de deux

On applique la méthode de Newton à $g(x) = x^2 - 2$ avec $u_0 = 2$.

1. Montrez que la suite obtenue vérifie $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$. Calculez u_1 , u_2 et u_3 sous forme de fractions.
2. Montrez que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$. Déduisez-en que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n , puis que (u_n) est décroissante.
3. On pose $e_n = \frac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$. Montrez que $0 \leq e_{n+1} \leq e_n^2$, puis que $e_n \leq e_0^{2^n}$.
4. Déterminez un rang n qui garantit $u_n - \sqrt{2} \leq 10^{-10}$. Comparez avec la dichotomie sur $[1, 2]$.

Exercice 18 : Suites bornées d'une récurrence à paramètre

Soit α un réel. On note E_α l'ensemble des suites réelles vérifiant $u_{n+2} = 2\alpha u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On suppose $|\alpha| < 1$ et on pose $\alpha = \cos\theta$ avec $\theta \in]0, \pi[$. Décrivez E_α et montrez que toutes ses suites sont bornées.
2. Décrivez E_1 et E_{-1} . Toutes leurs suites sont-elles bornées ?
3. On suppose $|\alpha| > 1$. Montrez que l'équation caractéristique a deux racines réelles r_1, r_2 avec $|r_1| > 1 > |r_2|$. Quelles suites de E_α sont bornées ?
4. Déterminez l'ensemble des réels α pour lesquels toutes les suites de E_α sont bornées.
5. Montrez que toutes les suites de $E_{1/2}$ sont périodiques de période 6.

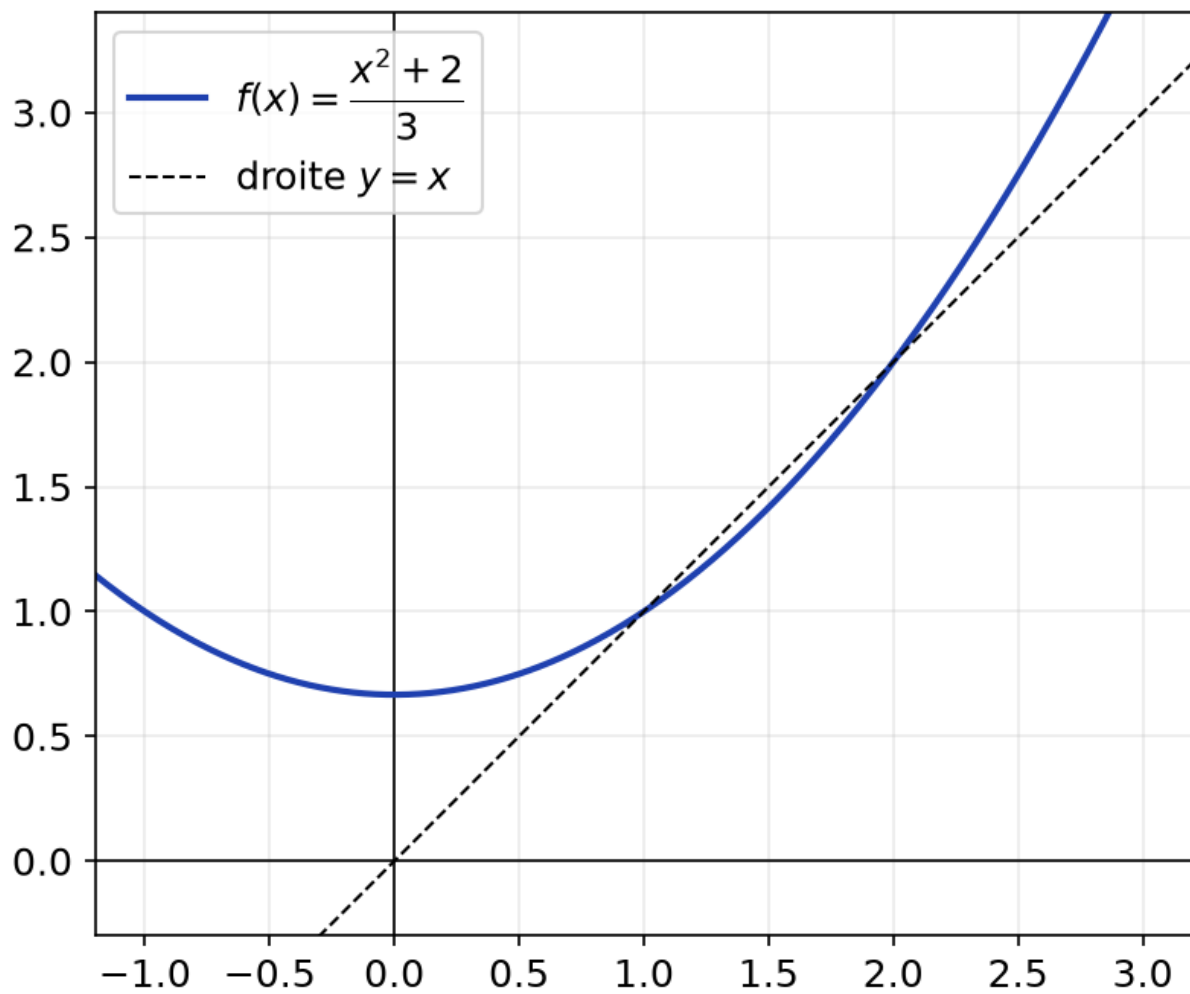
Exercice 19 : Comportement asymptotique de $u(n+1) = u(n) + 1/u(n)$

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. Montrez que la suite est bien définie, que $u_n \geq 1$ et que (u_n) est croissante.
2. Montrez par l'absurde que $u_n \rightarrow +\infty$.
3. Montrez que $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ pour tout $n \geq 1$. Déduisez-en que $u_n^2 \geq 2n + 1$.
4. Montrez que $\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ pour $k \geq 1$. Déduisez-en que $u_n^2 \leq 2n + 2 + \sqrt{n-1}$ pour $n \geq 1$.
5. Concluez que $u_n \sim \sqrt{2n}$.

Exercice 20 : Problème, étude complète d'une suite récurrente

Soit $f(x) = \frac{x^2+2}{3}$ et la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. La courbe de f est tracée ci-dessous avec la droite $y = x$.



Partie A : étude de f .

1. Donnez les variations de f et le signe de $f(x) - x$. Quels sont les points fixes de f ?
2. Montrez que les intervalles $[0, 1]$, $[1, 2]$ et $[2, +\infty[$ sont stables par f .

Partie B : étude selon $u(0)$.

1. On suppose $u_0 \in [0, 1[$. Montrez que (u_n) converge et déterminez sa limite.
2. Même question lorsque $u_0 \in]1, 2[$.

3. On suppose $u_0 > 2$. Montrez que $u_n \rightarrow +\infty$.
4. Traitez le cas $u_0 < 0$, puis résumez le comportement de la suite selon $|u_0|$.

Partie C : vitesse de convergence. On prend $u_0 = \frac{3}{2}$.

1. Montrez que $u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)(u_n + 1)}{3}$, puis que $0 \leq u_n - 1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n$.
2. Déterminez un rang qui garantit $u_n - 1 \leq 10^{-4}$.
3. Montrez que $\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} \rightarrow \frac{2}{3}$. Comparez avec $f'(1)$ et $f'(2)$, et interprétez sur la figure.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [suites récurrentes, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Nombres réels et suites numériques](#), [Fonctions usuelles et techniques de dérivation](#)
- Chapitre précédent : [Nombres réels et suites numériques](#)

- Chapitre suivant : [Limites et continuité des fonctions](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)