

Suites récurrentes

Corrigé de l'exercice 1 : Suites arithmétiques et géométriques

1. Pour une suite arithmétique, $u_{10} - u_3 = 7r$. Ainsi, $7r = 28 - 7 = 21$, donc $r = 3$.
Ensuite, $u_0 = u_3 - 3r = 7 - 9$. **On obtient** $r = 3$ **et** $u_0 = -2$.
2. D'abord, $u_{20} = u_0 + 20r = -2 + 60 = 58$. La somme de 21 termes consécutifs vaut le nombre de termes multiplié par la moyenne des extrêmes :

$$S = 21 \times \frac{u_0 + u_{20}}{2} = 21 \times \frac{-2 + 58}{2} = 21 \times 28.$$

Donc $S = 588$.

3. Pour une suite géométrique, $v_5 = v_2 q^3$. Donc $q^3 = \frac{96}{12} = 8$. Comme q est réel, $q = 2$. Ensuite, $v_0 = \frac{v_2}{q^2} = \frac{12}{4}$. **On obtient** $q = 2$ **et** $v_0 = 3$.
4. Puisque $q \neq 1$, on applique la formule de la somme géométrique :

$$T = v_0 \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 3 \times \frac{1024 - 1}{1} = 3 \times 1023.$$

Donc $T = 3\,069$.

Corrigé de l'exercice 2 : Terme général d'une suite arithmético-géométrique

1. L'équation $\ell = 3\ell - 4$ équivaut à $2\ell = 4$. **Donc** $\ell = 2$.

2. Pour tout n , on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 4 - 2 = 3(u_n - 2) = 3v_n$. Ainsi, (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 5 - 2 = 3$. Par conséquent, $v_n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$. **Donc** $u_n = 2 + 3^{n+1}$ **pour tout** n . Vérification : $u_1 = 3 \times 5 - 4 = 11$ et $2 + 3^2 = 11$.

3. On sépare la somme en deux :

$$S_n = \sum_{k=0}^n 2 + \sum_{k=0}^n 3^{k+1} = 2(n+1) + 3 \cdot \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}.$$

Donc $S_n = 2(n+1) + \frac{3^{n+2} - 3}{2}$. Pour $n = 1$, on trouve $4 + 12 = 16 = u_0 + u_1$.

4. Le même calcul, avec u_0 quelconque, donne $u_n = 2 + (u_0 - 2)3^n$. Si $u_0 > 2$, alors $u_n \rightarrow +\infty$. Si $u_0 < 2$, alors $u_n \rightarrow -\infty$. **La suite converge si et seulement si** $u_0 = 2$; **elle est alors constante.**

Point de méthode : le point fixe ℓ n'est une limite que si $|a| < 1$. Ici $a = 3$, donc le point fixe repousse toutes les suites qui n'en partent pas.

Corrigé de l'exercice 3 : Évolution d'un stock

1. Après l'expédition de 20 % des pièces, il en reste $0,8 u_n$. Ensuite, on en ajoute 300. **Donc** $u_{n+1} = 0,8 u_n + 300$.

2. Le point fixe vérifie $\ell = 0,8\ell + 300$, soit $0,2\ell = 300$, donc $\ell = 1\,500$. La suite $v_n = u_n - 1\,500$ vérifie $v_{n+1} = 0,8 v_n$ et $v_0 = -500$. Ainsi, $u_n = 1\,500 - 500 \times 0,8^n$. Comme $(0,8^n)$ décroît strictement vers 0, la suite (u_n) est strictement croissante. **De plus**, $u_n \rightarrow 1\,500$.

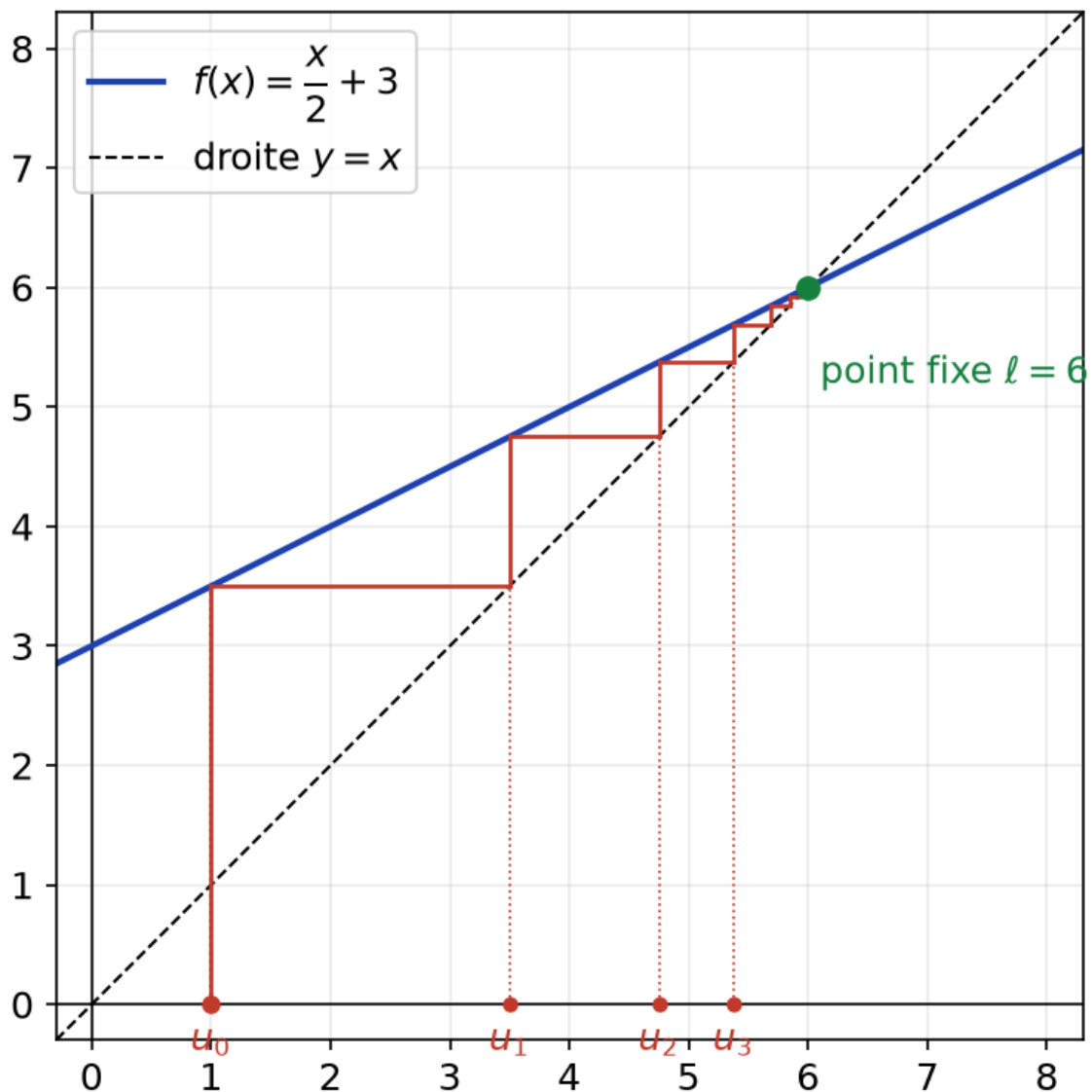
3. On cherche n tel que $u_n > 1\,490$, c'est-à-dire $500 \times 0,8^n < 10$, soit $0,8^n < 0,02$. La fonction $\ln$ est croissante, donc cela équivaut à $n \ln(0,8) < \ln(0,02)$. Or $\ln(0,8) < 0$, donc

$$n > \frac{\ln 50}{\ln 1,25} \approx \frac{3,912}{0,2231} \approx 17,5.$$

Vérification : $0,8^{17} \approx 0,0225$ et $0,8^{18} \approx 0,0180$. Le stock dépasse 1 490 pièces à partir de l'année 18.

Corrigé de l'exercice 4 : Nombre d'itérations pour une précision donnée

1. On part de $u_0 = 1$ sur l'axe des abscisses. On monte jusqu'à la droite de f , puis on rejoint horizontalement la droite $y = x$. On obtient ainsi $u_1 = 3,5$, puis $u_2 = 4,75$ et $u_3 = 5,375$. Comme le montre la figure ci-dessous, les marches montent vers l'intersection des deux droites. **On conjecture que (u_n) est croissante et converge vers 6.**



2. Le point fixe vérifie $\ell = \frac{\ell}{2} + 3$, donc $\ell = 6$. Ensuite, $u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}(u_n - 6)$. Ainsi, $u_n - 6 = (u_0 - 6)2^{-n} = -5 \cdot 2^{-n}$. **Donc** $u_n = 6 - 5 \cdot 2^{-n}$. Par conséquent, $u_{n+1} - u_n = 5 \cdot 2^{-n} - 5 \cdot 2^{-n-1} = 5 \cdot 2^{-n-1} > 0$, et la suite est croissante. De plus, $2^{-n} \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow 6$: la conjecture est démontrée.
3. On a $|u_n - 6| = 5 \cdot 2^{-n}$. La condition $5 \cdot 2^{-n} < 10^{-3}$ équivaut à $2^n > 5\,000$. Or $2^{12} = 4\,096$ et $2^{13} = 8\,192$. **Le plus petit entier qui convient est** $n = 13$.

Corrigé de l'exercice 5 : Récurrence linéaire à racines distinctes

1. L'équation caractéristique est $r^2 = r + 6$, soit $r^2 - r - 6 = 0$. Son discriminant vaut $1 + 24 = 25$. **Les racines sont** $r_1 = 3$ **et** $r_2 = -2$.
2. Les racines sont réelles et distinctes. Donc il existe deux réels a et b tels que $u_n = a 3^n + b (-2)^n$ pour tout n . Les conditions initiales donnent le système

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a - 2b = 8. \end{cases}$$

En ajoutant deux fois la première équation à la seconde, on obtient $5a = 10$. Ainsi, $a = 2$ et $b = -1$. **Donc** $u_n = 2 \cdot 3^n - (-2)^n$. Vérification : la récurrence donne $u_2 = 8 + 6 = 14$, et la formule donne $18 - 4 = 14$.

3. On écrit $u_n = 2 \cdot 3^n \left(1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$. Or $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$, donc la parenthèse tend vers 1. **Ainsi**, $u_n \sim 2 \cdot 3^n$.
4. Dans le cas général, $u_n = a 3^n + b (-2)^n$ avec $a + b = u_0$ et $3a - 2b = u_1$. On en tire $a = \frac{2u_0 + u_1}{5}$. De plus, $\frac{u_n}{3^n} = a + b \left(-\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow a$. Par conséquent, $\frac{u_n}{3^n} \rightarrow 0$ si et seulement si $a = 0$. **La condition est** $u_1 = -2u_0$. La suite est alors géométrique de raison -2 .

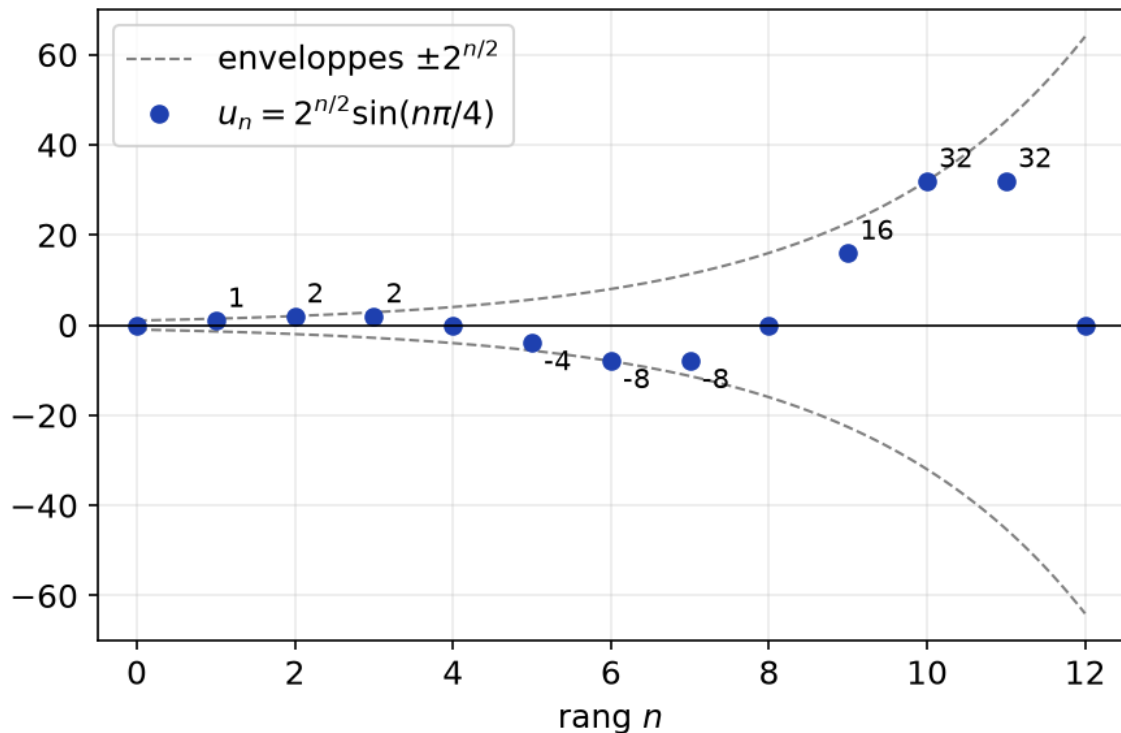
Corrigé de l'exercice 6 : Récurrence linéaire à racine double

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$, soit $(r - 2)^2 = 0$. Elle a une racine double $r_0 = 2$.
2. D'après le cours, il existe deux réels λ et μ tels que $u_n = (\lambda + \mu n) 2^n$. D'abord, $u_0 = \lambda = 1$. Ensuite, $u_1 = 2(\lambda + \mu) = 4$, donc $\mu = 1$. Ainsi, $u_n = (n + 1) 2^n$.
3. On note $P(n)$: « $u_n = (n+1)2^n$ et $u_{n+1} = (n+2)2^{n+1}$ ». D'abord, $P(0)$ est vraie, car $u_0 = 1$ et $u_1 = 4$. Ensuite, supposons $P(n)$. Alors
$$u_{n+2} = 4(n+2)2^{n+1} - 4(n+1)2^n = 2^{n+2}(2(n+2) - (n+1)) = (n+3) 2^{n+2}.$$
Donc $P(n+1)$ est vraie. Par récurrence, la formule est valable pour tout n .
4. Pour tout n , $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2) 2^{n+1}}{(n+1) 2^n} = 2 \cdot \frac{n+2}{n+1}$. Ce quotient tend vers 2.

Corrigé de l'exercice 7 : Récurrence linéaire à racines complexes

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 2 = 0$. Son discriminant vaut $4 - 8 = -4 = (2i)^2$. Les racines sont donc $1 + i$ et $1 - i$. Or $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$. Les racines sont $\sqrt{2} e^{i\pi/4}$ et $\sqrt{2} e^{-i\pi/4}$.
2. D'après le cours (cas réel, $\Delta < 0$), il existe deux réels λ et μ tels que $u_n = 2^{n/2} \left(\lambda \cos \frac{n\pi}{4} + \mu \sin \frac{n\pi}{4} \right)$. D'abord, $u_0 = \lambda = 0$. Ensuite, $u_1 = \sqrt{2} \mu \frac{\sqrt{2}}{2} = \mu = 1$. Donc $u_n = 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}$. Vérification : $u_2 = 2 \times 1 - 0 = 2$, et la formule donne $2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$.
3. Comme $2^{n/2} \neq 0$, on a $u_n = 0$ si et seulement si $\sin \frac{n\pi}{4} = 0$. Cela équivaut à $\frac{n\pi}{4} \in \pi\mathbb{Z}$. Donc $u_n = 0$ si et seulement si n est un multiple de 4.

4. Pour $n = 8k + 2$, on a $\sin \frac{n\pi}{4} = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Ainsi,
 $u_{8k+2} = 2^{4k+1} \rightarrow +\infty$. La suite n'est donc pas bornée. Par ailleurs, $u_{4k} = 0$ pour tout k . Une suite extraite tend vers $+\infty$ et une autre vers 0. **La suite n'est pas bornée et n'a pas de limite, ni finie ni infinie.** La figure ci-dessous montre ces oscillations d'amplitude croissante.



Corrigé de l'exercice 8 : Suite de Fibonacci et nombre d'or

1. L'équation caractéristique est $r^2 - r - 1 = 0$. Son discriminant vaut 5, donc ses racines sont φ et ψ , réelles et distinctes. Il existe donc λ et μ tels que $F_n = \lambda\varphi^n + \mu\psi^n$.
D'abord, $F_0 = 0$ donne $\mu = -\lambda$. Ensuite, $F_1 = 1$ donne $\lambda(\varphi - \psi) = 1$. Or $\varphi - \psi = \sqrt{5}$. Ainsi, $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.
2. On a $\varphi \approx 1,618$ et $|\psi| \approx 0,618 < 1$. Donc $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n \rightarrow 0$, et

$$F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \left(1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n\right) \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}.$$

Par conséquent, $\frac{F_{n+1}}{F_n} \sim \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} = \varphi$. **Donc** $\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \varphi$.

3. D'après la formule de Binet, $\left| F_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right| = \frac{|\psi|^n}{\sqrt{5}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Or $\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,447 < \frac{1}{2}$. Ainsi, l'entier F_n est à distance strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ de $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$. **C'est donc l'entier le plus proche de ce réel.**

4. On raisonne par récurrence. Pour $n = 1$: $F_2 F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1$.
Supposons l'identité vraie au rang n . En utilisant $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ puis $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, on obtient

$$F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = F_{n+1} F_n + F_n^2 - F_{n+1} F_n - F_{n+1} F_{n-1} = -(F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2).$$

Ce dernier terme vaut $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$. **L'identité de Cassini est donc vraie pour tout $n \geq 1$.**

Corrigé de l'exercice 9 : Récurrence d'ordre 2 avec second membre constant

1. Une suite constante égale à c convient si et seulement si $c = 5c - 6c + 4$, soit $2c = 4$.
Donc $c = 2$.

2. Pour tout n , on remplace u_k par $v_k + 2$:

$$v_{n+2} = u_{n+2} - 2 = 5(v_{n+1} + 2) - 6(v_n + 2) + 4 - 2 = 5v_{n+1} - 6v_n.$$

Ainsi, (v_n) vérifie $v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n$.

3. L'équation $r^2 - 5r + 6 = 0$ a pour racines 2 et 3. Donc $v_n = a 2^n + b 3^n$. Or $v_0 = 1$ et $v_1 = 4$. Le système $a + b = 1$, $2a + 3b = 4$ donne $b = 2$ et $a = -1$. **Donc** $u_n = 2 - 2^n + 2 \cdot 3^n$. Vérification : la récurrence donne $u_2 = 30 - 18 + 4 = 16$, et la formule donne $2 - 4 + 18 = 16$.

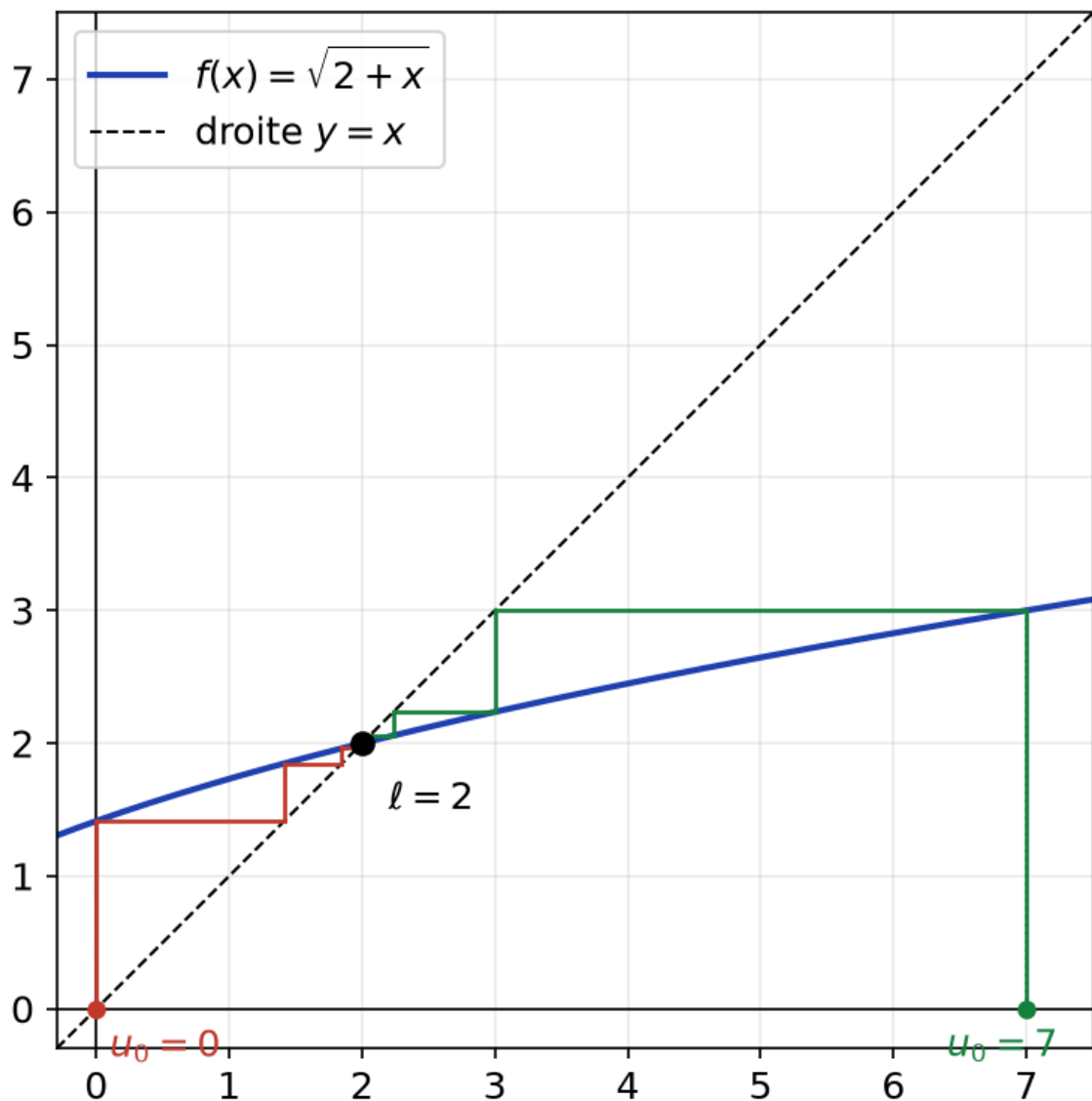
Point de méthode : comme pour les suites arithmético-géométriques, une solution particulière constante ramène le problème au cas homogène.

Corrigé de l'exercice 10 : Continuité et point fixe, un contre-exemple

1. Montrons par récurrence que $u_n = 2^{-n}$. C'est vrai pour $n = 0$. Si $u_n = 2^{-n}$, alors $u_n \in]0, 1]$, donc $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} = 2^{-n-1}$. **Ainsi, $u_n = 2^{-n}$ et $\ell = 0$.**
2. On a $f(\ell) = f(0) = 1 \neq 0 = \ell$. La limite n'est donc pas un point fixe. En effet, f n'est pas continue en 0 : $f(x) = \frac{x}{2} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$, alors que $f(0) = 1$. **L'hypothèse manquante est la continuité de f en ℓ .**
3. De même, $v_n = 2^{-n} \rightarrow 0$. Or 0 n'appartient pas à $]0, 1]$, domaine de g . Par ailleurs, g n'a aucun point fixe, car $\frac{x}{2} = x$ impose $x = 0$. **L'hypothèse « ℓ appartient au domaine de g » est ici en défaut.** C'est pourquoi on travaille de préférence sur un intervalle stable fermé.

Corrigé de l'exercice 11 : Suite définie par une racine carrée

1. Un point fixe vérifie $\sqrt{2+x} = x$. Cela impose $x \geq 0$ et $2+x = x^2$, soit $(x-2)(x+1) = 0$. Comme $x \geq 0$, on garde $x = 2$. **L'unique point fixe est 2.**
2. La fonction f est croissante. De plus, $f(0) = \sqrt{2} \in [0, 2]$ et $f(2) = 2$. Donc $f([0, 2]) = [\sqrt{2}, 2] \subset [0, 2]$: l'intervalle est stable. Ainsi, $u_n \in [0, 2]$ pour tout n . Ensuite, $u_1 = \sqrt{2} \geq u_0 = 0$. Comme f est croissante, la suite est croissante (cours, partie IV). Elle est donc croissante et majorée par 2 : elle converge vers $\ell \in [0, 2]$. Enfin, f est continue, donc ℓ est un point fixe. **Ainsi, $u_n \rightarrow 2$.**
3. L'intervalle $[2, +\infty[$ est stable, car f est croissante et $f(2) = 2$. De plus, $u_1 = 3 \leq u_0 = 7$. Donc la suite est décroissante et minorée par 2. Elle converge vers un point fixe de $[2, 7]$. **À nouveau, $u_n \rightarrow 2$, cette fois en décroissant.** La figure ci-dessous montre les deux escaliers, l'un montant et l'autre descendant.



4. Pour tout n , on multiplie par la quantité conjuguée :

$$u_{n+1} - 2 = \sqrt{2 + u_n} - 2 = \frac{(2 + u_n) - 4}{\sqrt{2 + u_n} + 2} = \frac{u_n - 2}{\sqrt{2 + u_n} + 2}.$$

Or $u_n \geq 0$, donc $\sqrt{2 + u_n} + 2 \geq \sqrt{2} + 2 \geq 3$. Ainsi, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3}|u_n - 2|$. Par une récurrence immédiate, $|u_n - 2| \leq \frac{1}{3^n}|u_0 - 2|$. **Donc** $|u_n - 2| \leq \frac{2}{3^n}$.

Corrigé de l'exercice 12 : Discussion selon le premier terme

- On a $f(x) - x = x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. Ainsi,
 $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ pour tout n . **La suite est croissante, quel que soit u_0 .**
- On a $f(x) = x$ si et seulement si $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$. **L'unique point fixe est $\frac{1}{2}$.**
 Graphiquement, la parabole est tangente à la droite $y = x$ en ce point.
- Si $|u_0| \leq \frac{1}{2}$, alors $u_0^2 \leq \frac{1}{4}$. Donc $u_1 = u_0^2 + \frac{1}{4} \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Ensuite, f est croissante sur $[0, +\infty[$, avec $f(0) = \frac{1}{4}$ et $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Donc $[0, \frac{1}{2}]$ est stable, et $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ pour tout $n \geq 1$. La suite est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$: elle converge vers $\ell \in [0, \frac{1}{2}]$. Comme f est continue, ℓ est un point fixe. **Donc $u_n \rightarrow \frac{1}{2}$.**
- Si $|u_0| > \frac{1}{2}$, alors $u_1 = u_0^2 + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$. La suite étant croissante, $u_n \geq u_1 > \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$. Supposons qu'elle converge vers ℓ . Alors $\ell \geq u_1 > \frac{1}{2}$, et ℓ est un point fixe par continuité de f . C'est absurde. Ainsi, (u_n) est croissante et ne converge pas. **Par le théorème de la limite monotone, $u_n \rightarrow +\infty$.**

Point de méthode : pour montrer une divergence vers $+\infty$, on combine la monotonie avec l'absence de point fixe dans la zone où se trouve la suite.

Corrigé de l'exercice 13 : Une suite en escargot

- La fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Donc
 $f([\frac{1}{2}, 1]) = [f(1), f(\frac{1}{2})] = [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \subset [\frac{1}{2}, 1]$: l'intervalle est stable. Ensuite, $f(x) = x$ équivaut à $x^2 + x - 1 = 0$, dont les racines sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Seule la racine positive, environ 0,618, est dans $[\frac{1}{2}, 1]$. **Donc $\ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.**
- Comme $u_0 = 1$, tous les termes sont dans $[\frac{1}{2}, 1]$. Pour tout n , on réduit au même dénominateur :

$$u_{n+1} - \ell = \frac{1}{1+u_n} - \frac{1}{1+\ell} = \frac{\ell - u_n}{(1+u_n)(1+\ell)}.$$

Or $u_n \geq \frac{1}{2}$ et $\ell \geq \frac{1}{2}$, donc le dénominateur est au moins $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$. Ainsi,

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{4}{9}|u_n - \ell|. \text{ Par récurrence, } |u_n - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - \ell|, \text{ qui tend vers } 0.$$

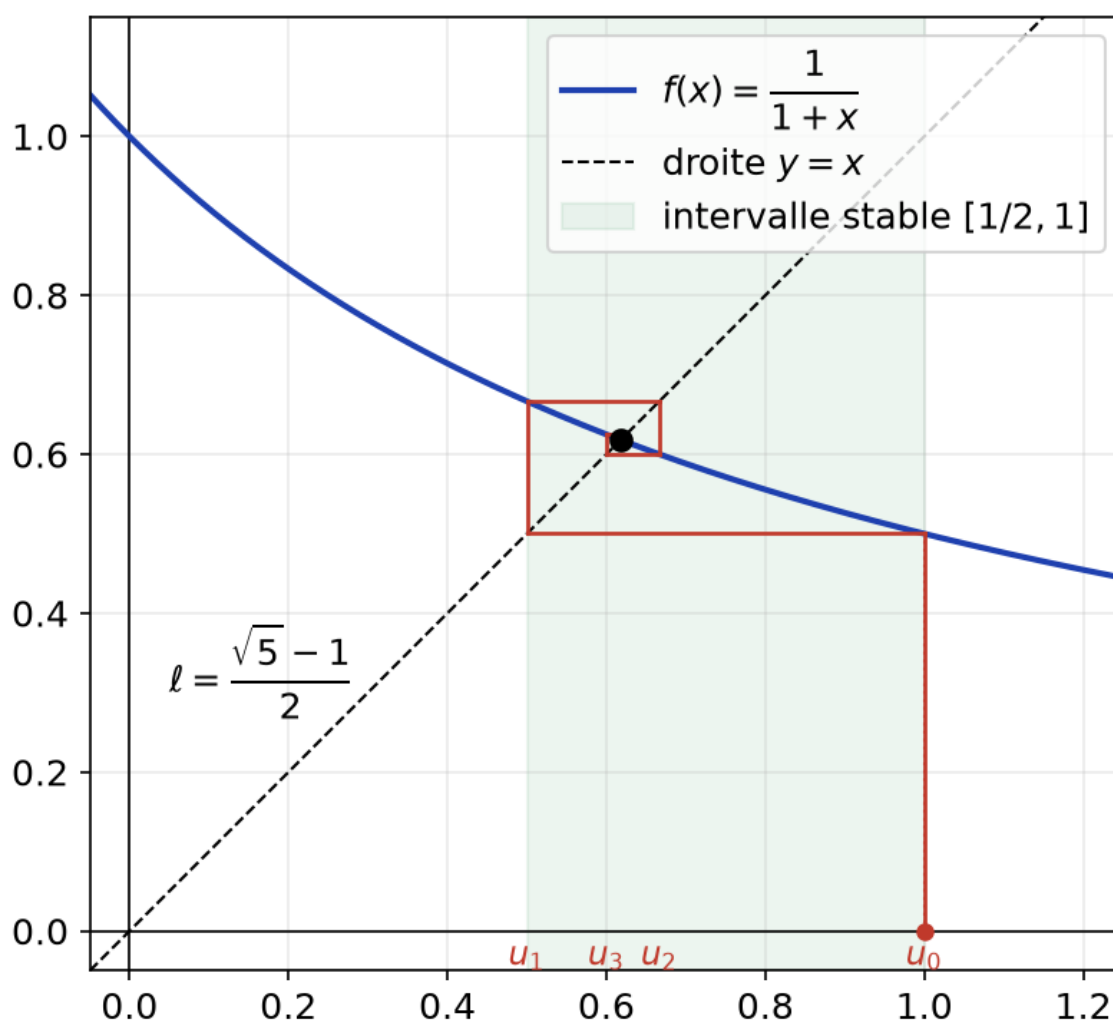
Donc $u_n \rightarrow \ell$.

3. On a $|u_0 - \ell| = 1 - \ell = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,382 \leq \frac{1}{2}$. Il suffit donc que $\frac{1}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-6}$. Cela équivaut à $n \ln \frac{9}{4} \geq \ln(5 \cdot 10^5)$, soit

$$n \geq \frac{\ln(5 \cdot 10^5)}{\ln(9/4)} \approx \frac{13,122}{0,8109} \approx 16,2.$$

Le rang $N = 17$ convient.

4. La fonction $f \circ f$ est croissante, comme composée de deux fonctions décroissantes. On calcule $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{2}{3}$ et $u_3 = \frac{3}{5}$. Comme $u_2 \leq u_0$, la suite (u_{2n}) est décroissante. Comme $u_3 \geq u_1$, la suite (u_{2n+1}) est croissante. **Les termes pairs décroissent et les termes impairs croissent, vers la même limite ℓ .** La figure ci-dessous montre cet escargot.



5. On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$, $\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{1} = u_0$. Si $u_n = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$, alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+2} + F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+3}}.$$

Donc $u_n = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$ **pour tout** n . On retrouve ainsi $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} \rightarrow \frac{1}{\ell} = \varphi$.

Corrigé de l'exercice 14 : Suite logistique de paramètre 2

1. On a $f(x) - x = 2x - 2x^2 - x = x(1 - 2x)$. **Les points fixes sont 0 et $\frac{1}{2}$.**

2. Pour tout n , $v_{n+1} = 1 - 4u_n(1 - u_n) = 1 - 4u_n + 4u_n^2 = (1 - 2u_n)^2 = v_n^2$. Par récurrence, $v_n = v_0^{2^n}$. En effet, $v_{n+1} = (v_n^2)^2 = v_n^{2^{n+1}}$. **Donc**

$$u_n = \frac{1 - (1 - 2u_0)^{2^n}}{2}.$$

3. On discute selon $|v_0| = |1 - 2u_0|$.

◦ Si $0 < u_0 < 1$, alors $|v_0| < 1$ et $v_n \rightarrow 0$. **Donc** $u_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

◦ Si $u_0 \in \{0, 1\}$, alors $v_0 = \pm 1$ et $v_n = 1$ pour $n \geq 1$. **Donc** $u_n = 0$ pour $n \geq 1$.

◦ Si $u_0 < 0$ ou $u_0 > 1$, alors $|v_0| > 1$ et $v_n \rightarrow +\infty$. **Donc** $u_n \rightarrow -\infty$.

4. Avec $u_0 = \frac{1}{4}$, on a $v_0 = \frac{1}{2}$. Ainsi, $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{|v_n|}{2} = 2^{-(2^n + 1)}$. La condition $2^{-(2^n + 1)} \leq 10^{-10}$ équivaut à $2^n + 1 \geq 10 \log_2 10 \approx 33,2$. Pour $n = 5$, on a $2^5 + 1 = 33$: c'est insuffisant. Pour $n = 6$, on a 65 . **Le plus petit rang est $n = 6$.**
 L'exposant double à chaque étape : la convergence est quadratique, comme pour la méthode de Newton. Cela s'explique par $f'(\frac{1}{2}) = 2 - 4 \times \frac{1}{2} = 0$.

Corrigé de l'exercice 15 : Convergence lente vers zéro

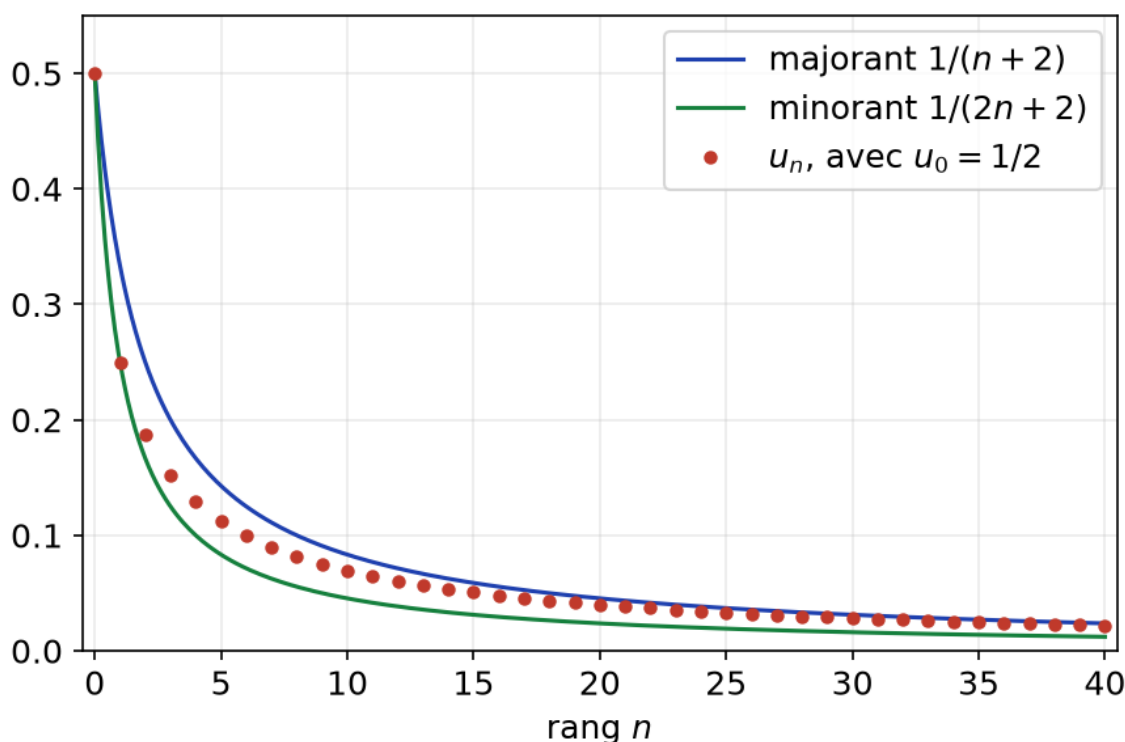
1. On a $f'(x) = 1 - 2x \geq 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, donc f y est croissante. De plus,
 $f(x) = x(1 - x) > 0$ pour $x \in]0, \frac{1}{2}]$, et $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Donc $f([0, \frac{1}{2}]) \subset]0, \frac{1}{4}]$:
l'intervalle est stable. Ensuite, $f(x) - x = -x^2 < 0$, donc la suite est décroissante. Elle est
minorée par 0, donc elle converge vers $\ell \in [0, \frac{1}{2}]$. Enfin, f est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$, donc
 $\ell - \ell^2 = \ell$. **Ainsi, $\ell = 0$.**

2. Comme $u_n \in]0, \frac{1}{2}]$, on peut écrire

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n(1 - u_n)} = \frac{(1 - u_n) + u_n}{u_n(1 - u_n)} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{1 - u_n}.$$

C'est la relation demandée.

3. Pour tout k , on a $0 < u_k \leq \frac{1}{2}$, donc $1 \leq \frac{1}{1 - u_k} \leq 2$. En sommant la relation précédente
de $k = 0$ à $n - 1$, on obtient $\frac{1}{u_n} = 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - u_k}$. Par conséquent,
 $n + 2 \leq \frac{1}{u_n} \leq 2n + 2$. **En passant aux inverses,** $\frac{1}{2n + 2} \leq u_n \leq \frac{1}{n + 2}$. La figure ci-
dessous montre la suite coincée entre ces deux bornes.



4. Si $n + 2 \geq 1\,000$, alors $u_n \leq 10^{-3}$. Donc **le rang $n = 998$ convient**. À l'inverse, si $2n + 2 < 1\,000$, c'est-à-dire $n \leq 498$, alors $u_n > 10^{-3}$. **C'est donc impossible pour $n \leq 498$** . Dans l'exercice 4, treize itérations suffisaient pour la même précision. Ici, la convergence est lente, car $f'(0) = 1$.

Corrigé de l'exercice 16 : Point fixe du cosinus

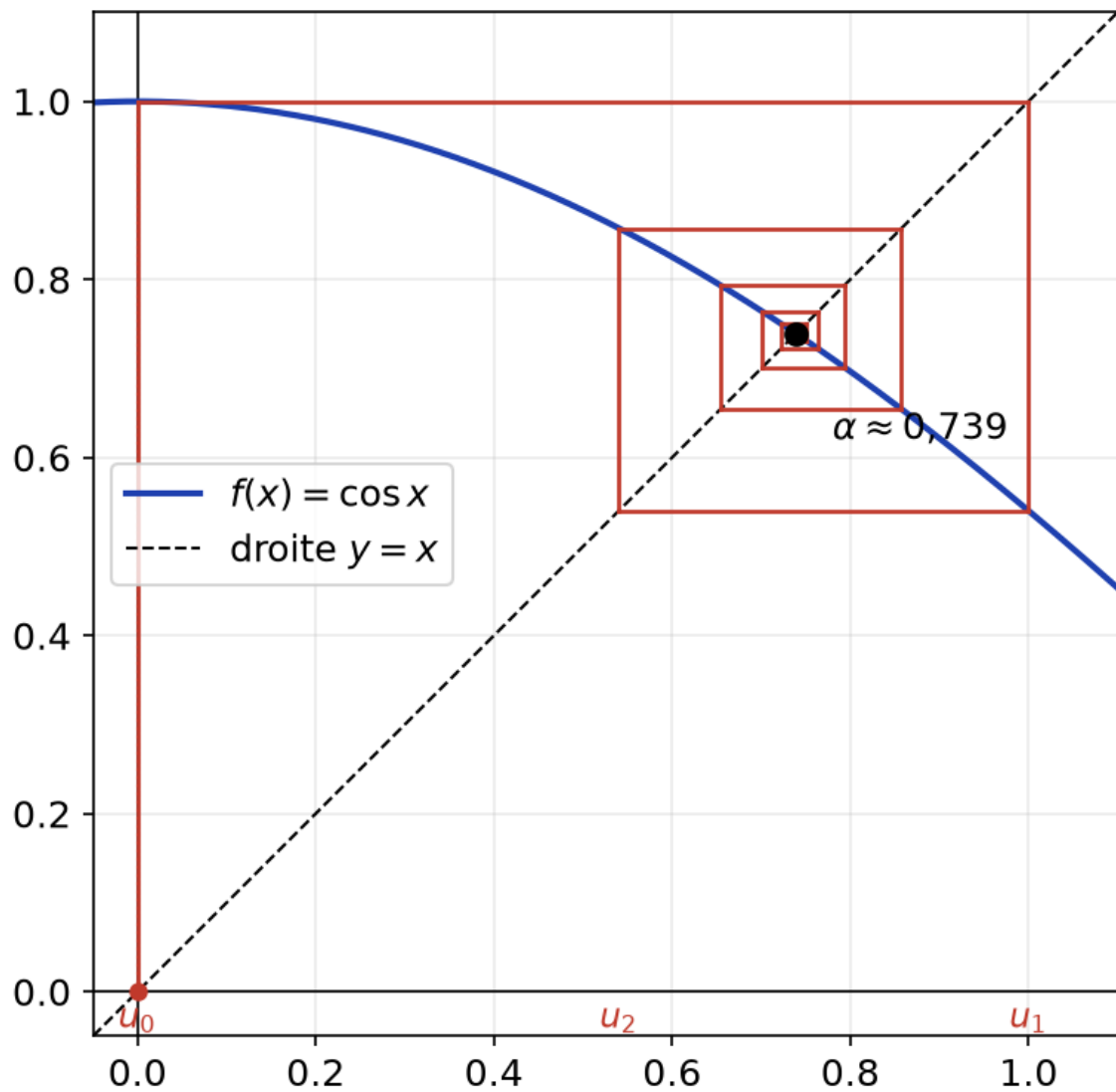
- Sur $[0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, le cosinus est décroissant. Donc $\cos([0, 1]) = [\cos 1, 1]$. Or $\cos 1 > 0$, car $1 < \frac{\pi}{2}$. **Ainsi, $\cos([0, 1]) \subset [0, 1]$: l'intervalle est stable.**
- Posons $h(x) = \cos x - x$. Cette fonction est continue et strictement décroissante sur $[0, 1]$, comme somme de deux fonctions décroissantes dont l'une strictement. De plus, $h(0) = 1 > 0$ et $h(1) = \cos 1 - 1 < 0$. **Par le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie, h s'annule en un unique $\alpha \in]0, 1[$.**

- Soit $a, b \in [0, 1]$. On a $\frac{a+b}{2} \in [0, 1]$, et le sinus est croissant et positif sur $[0, 1]$. Donc $\left| \sin \frac{a+b}{2} \right| \leq \sin 1$. De plus, $|\sin t| \leq |t|$ pour tout réel t . Ainsi,

$$|\cos a - \cos b| = 2 \left| \sin \frac{a+b}{2} \right| \left| \sin \frac{a-b}{2} \right| \leq 2 \sin(1) \frac{|a-b|}{2}.$$

Donc $|\cos a - \cos b| \leq \sin(1) |a - b|$.

- Tous les termes u_n sont dans $[0, 1]$, tout comme α . On applique l'inégalité avec $a = u_n$ et $b = \alpha$: $|u_{n+1} - \alpha| \leq \sin(1) |u_n - \alpha|$. Par récurrence, $|u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n |u_0 - \alpha| \leq (\sin 1)^n$. Or $0 < \sin 1 < 1$, donc $u_n \rightarrow \alpha$. Ensuite, $(\sin 1)^n \leq 10^{-6}$ équivaut à $n \geq \frac{6 \ln 10}{-\ln(\sin 1)} \approx \frac{13,816}{0,1726} \approx 80,04$. **Le rang $N = 81$ convient.** La figure ci-dessous montre l'escargot obtenu, car le cosinus est décroissant sur $[0, 1]$.



Point de méthode : une formule de trigonométrie remplace ici l'inégalité des accroissements finis, qui donnerait la même constante $\sin 1$.

Corrigé de l'exercice 17 : Méthode de Newton pour racine de deux

1. On a $g'(x) = 2x$. La méthode de Newton s'écrit donc

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2u_n} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right). \text{ Ensuite, } u_1 = \frac{1}{2}(2 + 1) = \frac{3}{2}. \text{ Puis}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12}. \text{ Enfin, } u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{289 + 288}{408}. \text{ Donc } u_1 = \frac{3}{2},$$

$$u_2 = \frac{17}{12} \text{ et } u_3 = \frac{577}{408}.$$

2. Pour $u_n > 0$, on a $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$. Par récurrence, $u_n > 0$ et $u_{n+1} - \sqrt{2} \geq 0$. En effet, $u_0 = 2 > 0$, et si $u_n > 0$, la formule donne $u_{n+1} \geq \sqrt{2} > 0$. Ainsi, $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n . Ensuite, $u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0$. **La suite est donc décroissante et minorée par $\sqrt{2}$.**

3. Comme $u_n \geq \sqrt{2}$, on a $2u_n \geq 2\sqrt{2}$. Donc

$$0 \leq e_{n+1} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n \cdot 2\sqrt{2}} \leq \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{(2\sqrt{2})^2} = e_n^2.$$

Par récurrence, si $e_n \leq e_0^{2^n}$, alors $e_{n+1} \leq e_n^2 \leq e_0^{2^{n+1}}$. **Ainsi, $e_n \leq e_0^{2^n}$ pour tout n .**

4. On a $e_0 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \approx 0,2071$. Ensuite, $e_0^8 \approx 3,4 \cdot 10^{-6}$ et $e_0^{16} \approx 1,15 \cdot 10^{-11}$. Donc $u_4 - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}e_4 \leq 2\sqrt{2} \times 1,15 \cdot 10^{-11} \approx 3,2 \cdot 10^{-11}$. **Le rang $n = 4$ garantit une erreur au plus 10^{-10} .** Le rang 3 ne suffit pas, car $u_3 - \sqrt{2} \approx 2,1 \cdot 10^{-6}$. En comparaison, la dichotomie sur $[1, 2]$ divise la longueur par 2 à chaque étape. Il faut alors $2^{-n} \leq 10^{-10}$, soit environ 34 étapes.

Corrigé de l'exercice 18 : Suites bornées d'une récurrence à paramètre

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 2ar + 1 = 0$. Avec $a = \cos \theta$, elle s'écrit $(r - e^{i\theta})(r - e^{-i\theta}) = 0$. En effet, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos \theta$ et $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$. Comme $\theta \in]0, \pi[$, les deux racines sont distinctes et non réelles. **Donc**
- $$E_a = \left\{ (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)_n \right\}_{\lambda, \mu \in \mathbb{R}}.$$
- Pour une telle suite, $|u_n| \leq |\lambda| + |\mu|$: elle est bornée.
2. Pour $a = 1$, l'équation $(r - 1)^2 = 0$ a une racine double 1. Ainsi, E_1 est formé des suites $\lambda + \mu n$. Pour $a = -1$, la racine double est -1 , et E_{-1} est formé des suites $(\lambda + \mu n)(-1)^n$. Dans les deux cas, la suite est bornée si et seulement si $\mu = 0$. **Toutes les suites ne sont donc pas bornées : par exemple (n) ou $(n(-1)^n)$.**

3. Le discriminant réduit vaut $a^2 - 1 > 0$. Il y a donc deux racines réelles distinctes, de produit 1. Aucune ne vaut ± 1 : sinon $2 \mp 2a = 0$ et $|a| = 1$. Comme $|r_1 r_2| = 1$, l'une est de module strictement supérieur à 1 et l'autre strictement inférieur. Les suites de E_a s'écrivent $\lambda r_1^n + \mu r_2^n$. Le second terme est borné. Si $\lambda \neq 0$, alors $|u_n| \geq |\lambda| |r_1|^n - |\mu| \rightarrow +\infty$.
Les suites bornées de E_a sont exactement les suites (μr_2^n) .
4. D'après les trois questions précédentes, **toutes les suites de E_a sont bornées si et seulement si $a \in]-1, 1[$.**
5. Pour $a = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, les suites de $E_{1/2}$ sont $\lambda \cos \frac{n\pi}{3} + \mu \sin \frac{n\pi}{3}$. Or $\frac{(n+6)\pi}{3} = \frac{n\pi}{3} + 2\pi$. **Donc $u_{n+6} = u_n$ pour tout n .** On peut aussi le voir directement : $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ donne $u_{n+3} = -u_n$, puis $u_{n+6} = u_n$.

Corrigé de l'exercice 19 : Comportement asymptotique de $u(n+1) = u(n) + 1/u(n)$

1. Montrons par récurrence que u_n est défini et $u_n \geq 1$. C'est vrai pour $n = 0$. Si $u_n \geq 1$, alors $u_n \neq 0$, donc u_{n+1} est défini. De plus, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \geq 1$. **Ensuite, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$, donc la suite est croissante.**
2. Supposons (u_n) majorée. Étant croissante, elle converge vers un réel $\ell \geq 1$. La fonction $x \rightarrow x + \frac{1}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Donc $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$, soit $\frac{1}{\ell} = 0$: c'est absurde.
La suite est croissante et non majorée, donc $u_n \rightarrow +\infty$.
3. On élève la relation au carré : $u_{k+1}^2 = u_k^2 + 2 + \frac{1}{u_k^2}$. En sommant de $k = 0$ à $n - 1$, les termes se télescopent :

$$u_n^2 = u_0^2 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}.$$

La somme étant positive, $u_n^2 \geq 2n + 1$.

4. Pour $k \geq 1$, on a $\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{k}}$. Donc $\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$. Ensuite, pour $k \geq 1$, la question 3 donne $\frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$, car $2k+1 \geq 2\sqrt{k}$. Le terme

$k = 0$ vaut 1. Ainsi, par télescopage,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = 1 + \sqrt{n-1}.$$

Donc $u_n^2 \leq 2n + 2 + \sqrt{n-1}$ **pour** $n \geq 1$. Pour $n = 1$, on a bien $u_1^2 = 4$, qui est égal au majorant.

5. En divisant l'encadrement par $2n$, on obtient $1 + \frac{1}{2n} \leq \frac{u_n^2}{2n} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{\sqrt{n-1}}{2n}$. Les deux bornes tendent vers 1. Par le théorème des gendarmes, $\frac{u_n^2}{2n} \rightarrow 1$. La fonction racine est continue en 1, donc $\frac{u_n}{\sqrt{2n}} \rightarrow 1$. **Ainsi,** $u_n \sim \sqrt{2n}$.

Corrigé de l'exercice 20 : Problème, étude complète d'une suite récurrente

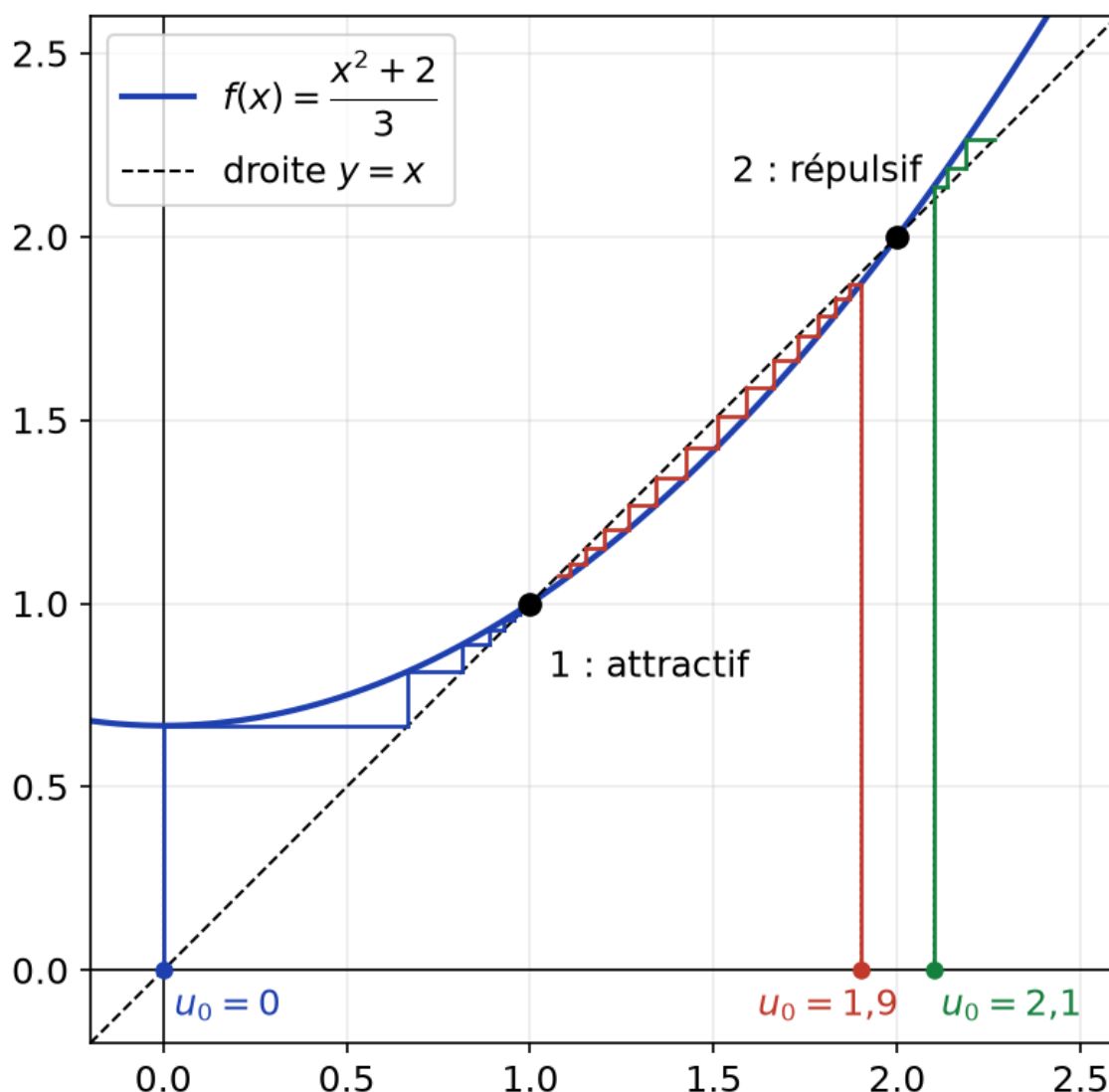
Partie A.

- La fonction f est paire, décroissante sur $] -\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$, de minimum $f(0) = \frac{2}{3}$. Ensuite, $f(x) - x = \frac{x^2 - 3x + 2}{3} = \frac{(x-1)(x-2)}{3}$. Cette quantité est positive hors de $]1, 2[$ et strictement négative sur $]1, 2[$. **Les points fixes sont 1 et 2.**
- Comme f est croissante sur $[0, +\infty[$, on obtient $f([0, 1]) = [\frac{2}{3}, 1] \subset [0, 1]$, puis $f([1, 2]) = [1, 2]$. Enfin, $f([2, +\infty[) = [2, +\infty[$. **Les trois intervalles sont stables.**

Partie B.

- Si $u_0 \in [0, 1[$, l'intervalle $[0, 1[$ est stable, car $f([0, 1[) = [\frac{2}{3}, 1[$. Sur cet intervalle, $f(x) - x > 0$, donc la suite est croissante. Elle est majorée par 1, donc elle converge vers $\ell \in [u_0, 1]$. Par continuité de f , ℓ est un point fixe. **Donc** $u_n \rightarrow 1$.

2. Si $u_0 \in]1, 2[$, l'intervalle $]1, 2[$ est stable, car $f(]1, 2[) =]1, 2[$. Sur cet intervalle, $f(x) - x < 0$, donc la suite est décroissante. Elle est minorée par 1, donc elle converge vers un point fixe de $[1, u_0]$. Or $u_0 < 2$. **Donc** $u_n \rightarrow 1$.
3. Si $u_0 > 2$, l'intervalle $]2, +\infty[$ est stable et $f(x) - x > 0$ sur celui-ci. La suite est donc croissante. Si elle convergeait, sa limite $\ell \geq u_0 > 2$ serait un point fixe : c'est impossible. **Donc** $u_n \rightarrow +\infty$.
4. Si $u_0 < 0$, alors $u_1 = f(u_0) = f(|u_0|)$, car f est paire. À partir du rang 1, la suite coïncide donc avec celle issue de $|u_0|$. Si $|u_0| = 1$ ou $|u_0| = 2$, la suite est constante à partir du rang 1. En résumé : **si** $|u_0| < 2$, **alors** $u_n \rightarrow 1$; **si** $|u_0| = 2$, **alors** $u_n = 2$ **pour** $n \geq 1$; **si** $|u_0| > 2$, **alors** $u_n \rightarrow +\infty$. La figure ci-dessous illustre trois de ces comportements.



Partie C.

1. On a $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2 + 2 - 3}{3} = \frac{(u_n - 1)(u_n + 1)}{3}$. D'après la partie B, la suite est décroissante et $u_n \in [1, \frac{5}{2}]$. Donc $0 \leq u_n + 1 \leq \frac{5}{2}$, et $0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \frac{5}{6}(u_n - 1)$.
Par récurrence, $0 \leq u_n - 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
2. Il suffit que $\frac{1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 10^{-4}$, soit $n \ln \frac{6}{5} \geq \ln 5\,000$. Cela donne $n \geq \frac{8,517}{0,1823} \approx 46,7$. **Le rang $n = 47$ convient.**
3. Par récurrence, $u_n > 1$ pour tout n , car $u_0 > 1$ et $u_{n+1} - 1$ a le signe de $u_n - 1$. On peut donc écrire $\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 1}{3}$. Or $u_n \rightarrow 1$. **Donc ce quotient tend vers $\frac{2}{3}$.** Par ailleurs, $f'(x) = \frac{2x}{3}$, donc $f'(1) = \frac{2}{3} < 1$ et $f'(2) = \frac{4}{3} > 1$. Ainsi, près de 1, l'erreur est multipliée par environ $\frac{2}{3}$ à chaque étape : le point fixe 1 est attractif. À l'inverse, près de 2, l'écart est multiplié par environ $\frac{4}{3}$: le point fixe 2 est répulsif. Sur la figure, les marches rétrécissent près de 1 et s'agrandissent en s'éloignant de 2. Notre majoration par $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ est donc prudente : le vrai facteur se rapproche de $\frac{2}{3}$.

Point de méthode : le quotient $\frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}$ tend vers $f'(\ell)$; sa valeur mesure la vitesse de convergence géométrique.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [suites récurrentes, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur suites récurrentes](#)
- À maîtriser avant : [Nombres réels et suites numériques](#), [Fonctions usuelles et techniques de](#)

[dérivation](#)

- Chapitre précédent : [Nombres réels et suites numériques](#)
- Chapitre suivant : [Limites et continuité des fonctions](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)