

Suites numériques

Exercice 1 : Monotonie et bornes de trois suites

Pour chacune des suites suivantes, étudiez le sens de variation et dites si elle est majorée, minorée ou bornée.

1. $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = \frac{n}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. $w_n = (-1)^n n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : Convergence par la définition epsilon

On revient ici à la définition quantifiée de la limite, sans utiliser les opérations sur les limites.

1. Soit $u_n = \frac{3n-1}{n+2}$. Calculez $|u_n - 3|$, puis démontrez que $u_n \rightarrow 3$ avec la définition.
2. Déterminez un rang N à partir duquel $|u_n - 3| \leq 10^{-3}$.
3. Soit $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Montrez que $0 \leq v_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$, puis démontrez que $v_n \rightarrow 0$ avec la définition.

Exercice 3 : Limite infinie par la définition

1. Montrez que pour tout entier $n \geq 6$, on a $n^2 - 3n \geq \frac{n^2}{2}$.
2. Démontrez avec la définition que $u_n = n^2 - 3n$ tend vers $+\infty$, en donnant un rang N explicite en fonction de $A > 0$.
3. Démontrez avec la définition que $v_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 4 : Calculs de limites

Déterminez la limite éventuelle de chaque suite, en justifiant la levée des formes indéterminées.

1. $a_n = \frac{n^3 - 2n}{2n^3 + 5}$.
2. $b_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.
3. $c_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n - 2^n}$ pour $n \geq 1$.
4. $d_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ pour $n \geq 1$.
5. $e_n = n^{1/n}$ pour $n \geq 1$.

Exercice 5 : Encadrements et théorème des gendarmes

1. Déterminez la limite de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$ pour $n \geq 1$.
2. Soit x un réel fixé. Déterminez la limite de $\left\lfloor \frac{n x}{n} \right\rfloor$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

3. Montrez que $\frac{\sin n + 2\cos n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$.

Exercice 6 : Comparaison et factorielles

1. Montrez que $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$ pour $n \geq 1$. Quelle est la limite de (u_n) ?
2. Montrez que $0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. En déduire la limite de $\frac{n!}{n^n}$, puis celle de $\frac{n^n}{n!}$.
3. Montrez que $0 < \frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n}$ pour $n \geq 2$. Conclure.

Exercice 7 : Opérations sur les limites : démonstrations

Dans cet exercice, on n'utilise que la définition de la limite.

1. Soit (u_n) une suite qui converge vers $\ell \neq 0$. Montrez qu'il existe un rang N tel que $|u_n| \geq \frac{|\ell|}{2}$ pour tout $n \geq N$.
2. En déduire que $\frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{\ell}$.
3. Montrez que si (u_n) est bornée et $v_n \rightarrow 0$, alors $u_n v_n \rightarrow 0$.
4. Donnez deux suites divergentes (u_n) et (v_n) telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ convergent.

Exercice 8 : Critère du quotient pour une suite positive

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow L$, avec $0 \leq L < 1$.

1. Soit $q = \frac{1+L}{2}$. Montrez qu'il existe N tel que $u_{n+1} \leq q u_n$ pour tout $n \geq N$.
2. En déduire que $0 < u_n \leq q^{n-N} u_N$ pour $n \geq N$, puis que $u_n \rightarrow 0$.
3. Application : déterminez les limites de $\frac{n^5}{2^n}$ et de $\frac{10^n}{n!}$.
4. Montrez que la suite constante égale à 1 et la suite (n) vérifient toutes deux $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$. Que peut-on en conclure pour le cas $L = 1$?

Exercice 9 : Sommes des inverses et des inverses des carrés

Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $K_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. Montrez que (K_n) est croissante et que $K_n \leq 2 - \frac{1}{n}$. En déduire que (K_n) converge.
2. Montrez que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.
3. En raisonnant par l'absurde, montrez que (H_n) ne converge pas. En déduire sa limite.
4. Montrez que $H_{2^p} \geq 1 + \frac{p}{2}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Retrouvez ainsi le résultat précédent.

Exercice 10 : Un produit convergent

Pour $n \geq 1$, on pose $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$. On admet l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$.

1. Montrez que (P_n) est strictement croissante.

- Montrez que $\ln P_n \leq 1 - \frac{1}{2^n}$, puis que $P_n \leq e$.
- En déduire que (P_n) converge vers un réel P tel que $\frac{3}{2} < P \leq e$.

Exercice 11 : Suites adjacentes et somme alternée

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$.

- Calculez $S_{2n+2} - S_{2n}$ et $S_{2n+3} - S_{2n+1}$.
- Montrez que les suites $(S_{2n})_n \geq 1$ et $(S_{2n+1})_n \geq 0$ sont adjacentes.
- En déduire que (S_n) converge. Donnez un encadrement de sa limite ℓ d'amplitude inférieure à $\frac{1}{5}$.

Exercice 12 : Irrationalité de e

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$.

- Montrez que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note e leur limite commune.
- Montrez que $u_n < e < v_n$ pour tout $n \geq 1$ (inégalités strictes).
- On suppose que $e = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers naturels non nuls. En multipliant l'encadrement précédent au rang $n = q$ par $q \cdot q!$, obtenez une contradiction.
- Conclure. Donnez aussi un encadrement de e d'amplitude inférieure à 10^{-3} .

Exercice 13 : Divergence par les suites extraites

Montrez que les suites suivantes divergent.

1. $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

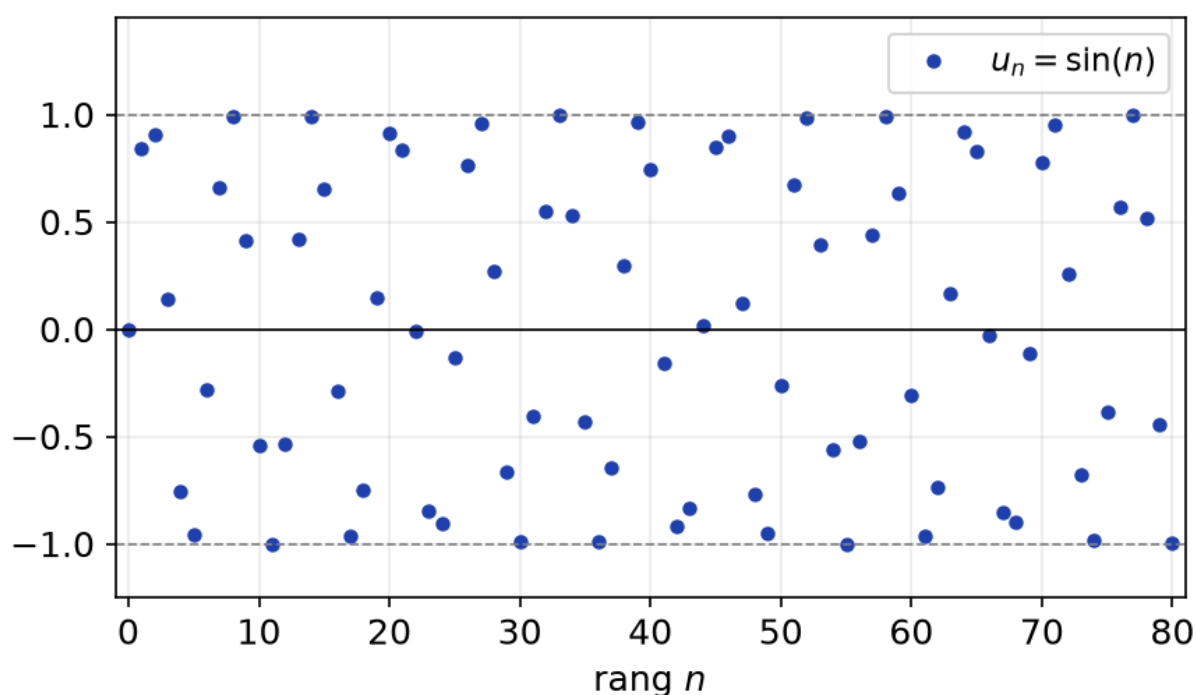
2. $b_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

3. $c_n = n \left(1 + (-1)^n\right)$. Cette suite tend-elle vers $+\infty$?

4. Soit (u_n) une suite telle que (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrez que (u_n) converge.

Exercice 14 : La suite $(\sin n)$ diverge

La figure ci-dessous représente les premiers termes de la suite $(\sin n)$. Ils semblent remplir tout l'intervalle $[-1, 1]$. On se propose de démontrer que cette suite n'a pas de limite. On raisonne par l'absurde en supposant que $\sin n \rightarrow \ell$, avec ℓ réel.



1. En utilisant $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2 \cos n \sin 1$, montrez que $\cos n \rightarrow 0$.
2. En utilisant la suite extraite $(\sin(2n))$, montrez que $\ell = 0$.
3. Obtenez une contradiction avec la relation $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$.
4. Justifiez que $(\sin n)$ admet néanmoins une suite extraite convergente.

Exercice 15 : Lemme des pics et Bolzano-Weierstrass

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que l'indice p est un **pic** si $u_p \geq u_n$ pour tout $n \geq p$.

1. On suppose que (u_n) possède une infinité de pics $p_0 < p_1 < p_2 < \dots$. Montrez que $(u_{p_k})_k$ est une suite extraite décroissante.
2. On suppose que (u_n) n'a qu'un nombre fini de pics, tous strictement inférieurs à un entier n_0 . Construisez une suite extraite strictement croissante.
3. En déduire que toute suite réelle admet une suite extraite monotone.

4. Démontrez le théorème de Bolzano-Weierstrass à l'aide du théorème de la limite monotone.
5. Montrez qu'une suite réelle non majorée admet une suite extraite qui tend vers $+\infty$.

Exercice 16 : Suite arithmético-géométrique

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

1. Déterminez le réel c tel que $c = \frac{1}{2}c + 3$.
2. Montrez que $v_n = u_n - c$ est géométrique. Exprimez u_n en fonction de n .
3. Étudiez la monotonie et la limite de (u_n) .
4. Calculez $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .

Exercice 17 : Récurrences linéaires d'ordre 2 à racines réelles

Déterminez le terme général des suites suivantes, puis étudiez leur limite.

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
2. $v_0 = 1$, $v_1 = 4$ et $v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$.
3. $w_0 = 3$, $w_1 = 0$ et $w_{n+2} = \frac{1}{2}w_{n+1} + \frac{1}{2}w_n$.

Exercice 18 : Racines complexes et suite périodique

On définit $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

1. Résolvez l'équation caractéristique et écrivez ses racines sous forme exponentielle.
2. Déterminez u_n sous la forme $\lambda \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$, puis sous la forme $A \cos\left(\frac{n\pi}{3} + \theta\right)$.
3. Montrez que $u_{n+6} = u_n$ pour tout n . Calculez $u_0, \dots, u_5$.
4. La suite (u_n) converge-t-elle ?

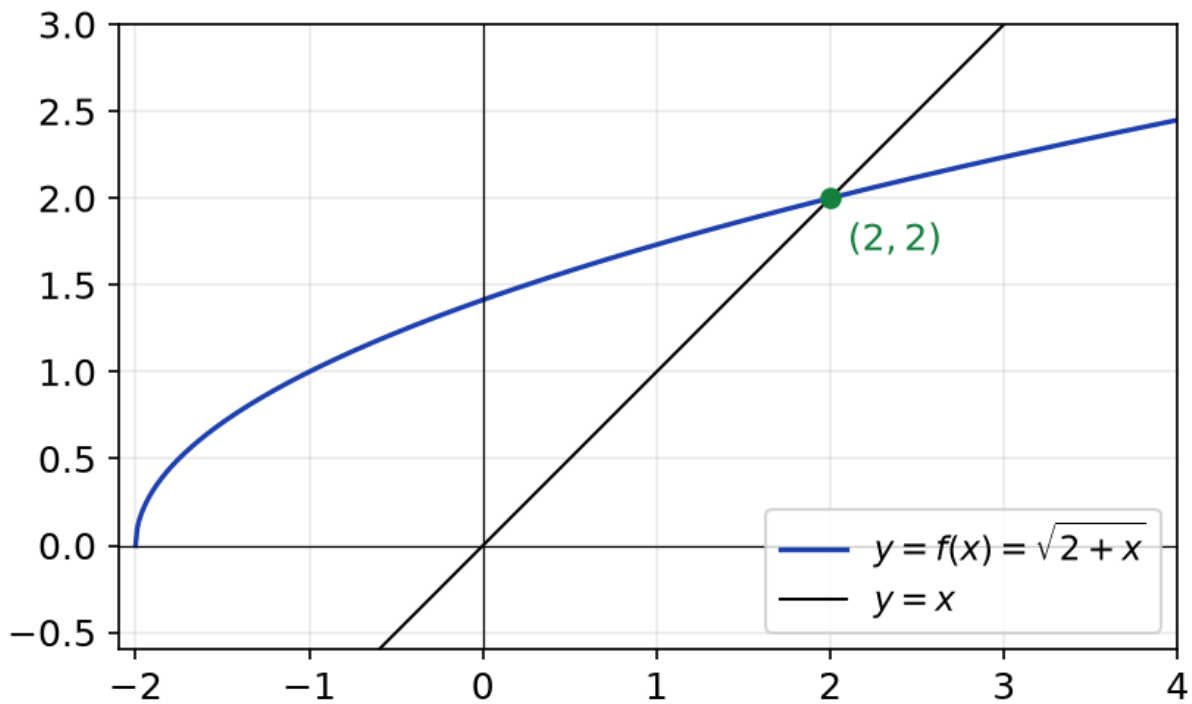
Exercice 19 : Suite de Fibonacci et nombre d'or

On note $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On pose $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. Montrez que $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$ pour tout n .
2. Montrez que $F_n \rightarrow +\infty$.
3. Montrez que $\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \varphi$.
4. Montrez que F_n est l'entier le plus proche de $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 20 : Étude de $u(n+1) = \sqrt{2 + u(n)}$

Soit $f : x \rightarrow \sqrt{2+x}$ définie sur $[-2, +\infty[$, dont la courbe est représentée ci-dessous avec la droite $y = x$. On définit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.



1. Montrez que l'intervalle $[0, 2]$ est stable par f . En déduire que $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout n .
2. Montrez que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge et déterminez sa limite.
4. Montrez que $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - 2|$, puis que $|u_n - 2| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. À partir de quel rang a-t-on $|u_n - 2| \leq 10^{-6}$?

Exercice 21 : Fonction décroissante et fraction continue

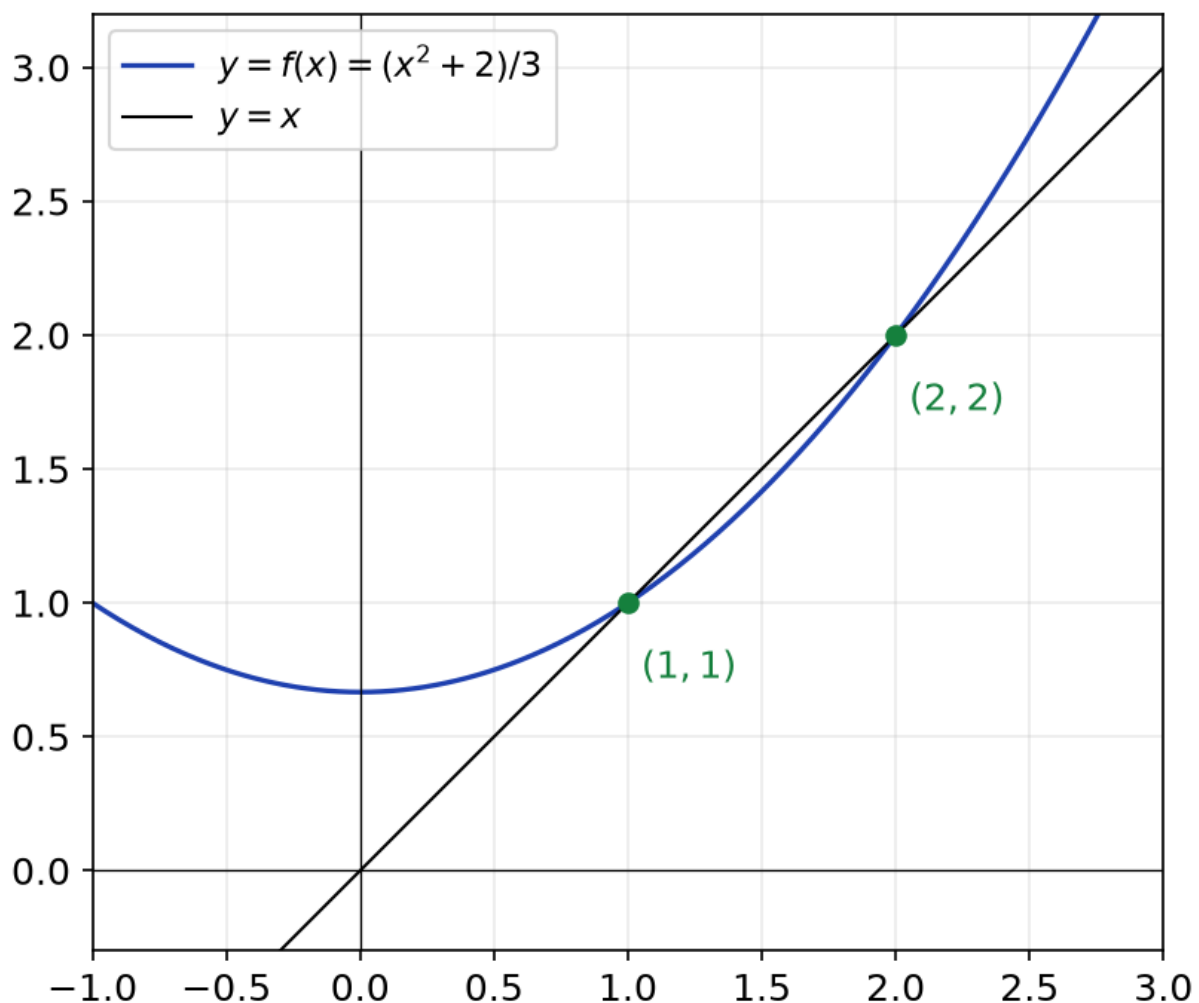
Soit $f : x \rightarrow \frac{1}{1+x}$ sur $[0, +\infty[$. On définit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrez que l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ est stable par f . Calculez u_1, u_2, u_3 .
2. Déterminez l'unique point fixe ℓ de f dans I .

3. Montrez que pour $x, y \in I$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{9} |x - y|$.
4. En déduire que $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - \ell|$, puis que $u_n \rightarrow \ell$.
5. Montrez par récurrence que $u_n = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$, où (F_n) est la suite de Fibonacci de l'exercice 19.
Retrouvez la limite de $\frac{F_{n+1}}{F_n}$.

Exercice 22 : Problème : discussion selon la valeur initiale

Soit $f: x \rightarrow \frac{x^2 + 2}{3}$, dont la courbe est représentée ci-dessous avec la droite $y = x$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Le but est de décrire le comportement de (u_n) selon a .



1. Déterminez les points fixes de f , et le signe de $f(x) - x$ selon x .
2. Montrez que $u_1 = f(|a|)$. Justifiez qu'on peut se limiter au cas $a \geq 0$.
3. Montrez que les intervalles $[0, 1]$, $[1, 2]$ et $[2, +\infty[$ sont stables par f .
4. Cas $0 \leq a < 1$: montrez que (u_n) converge et donnez sa limite.
5. Cas $1 < a < 2$: même question.
6. Cas $a > 2$: montrez que (u_n) tend vers $+\infty$.
7. Résumez : pour quelles valeurs de a la suite converge-t-elle, et vers quelle limite ?
8. Pour $0 \leq a \leq 1$, montrez que $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{2}{3} |u_n - 1|$, puis majorez $|u_n - 1|$.

Exercice 23 : Problème : moyenne arithmético-géométrique

Soient deux réels $a_0 > b_0 > 0$. On définit, pour tout n :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

1. Montrez par récurrence que a_n et b_n sont bien définis et strictement positifs.
2. Montrez que $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2$. En déduire que $b_n \leq a_n$ pour tout n .
3. Montrez que (a_n) est décroissante et (b_n) croissante.
4. Montrez que $0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a_n - b_n}{2}$, puis que $a_n - b_n \leq \frac{a_0 - b_0}{2^n}$.
5. En déduire que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite $M(a_0, b_0)$, appelée moyenne arithmético-géométrique.
6. Pour $a_0 = 4$ et $b_0 = 1$, calculez a_1, b_1, a_2, b_2 et donnez un encadrement de $M(4, 1)$.

7. Montrez que $M(\lambda a_0, \lambda b_0) = \lambda M(a_0, b_0)$ pour tout $\lambda > 0$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [suites numériques, cours de maths en L1](#)
- À maîtriser avant : [Nombres réels et borne supérieure](#), [Entiers naturels, récurrence et dénombrement](#)
- Chapitre précédent : [Nombres réels et borne supérieure](#)
- Chapitre suivant : [Limites et continuité des fonctions](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)