

Suites numériques

I. Suites numériques : premières définitions

Une suite numérique est une liste infinie de nombres réels, indexée par les entiers. Elle modélise une évolution pas à pas : un capital année après année, une approximation qui s'affine, un algorithme qui itère. Dans ce chapitre, toutes les suites sont réelles.

Définition :

Une **suite réelle** est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$. On la note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) . Le réel u_n est le **terme de rang** n . Une suite peut aussi n'être définie qu'à partir d'un rang n_0 .

Une suite se donne de deux façons. D'abord, par une formule explicite, comme $u_n = \frac{n}{n+1}$. Ensuite, par une relation de récurrence, comme $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. La seconde forme est la plus fréquente en pratique, mais elle est aussi la plus délicate à étudier.

1. Suites majorées, minorées, bornées

Définition :

La suite (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$. Elle est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$. Enfin, elle est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée,

autrement dit s'il existe $K \geq 0$ tel que $\forall n, |u_n| \leq K$.

L'équivalence entre les deux formulations de « bornée » est immédiate. En effet, si $m \leq u_n \leq M$, il suffit de prendre $K = \max(|m|, |M|)$.

2. Suites monotones

Définition :

La suite (u_n) est **croissante** si $\forall n, u_{n+1} \geq u_n$, et **décroissante** si $\forall n, u_{n+1} \leq u_n$. Elle est **monotone** si elle est croissante ou décroissante. On parle de monotonie stricte avec des inégalités strictes.

Méthode :

Pour étudier le sens de variation de (u_n) , on dispose de trois outils.

- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Si tous les termes sont strictement positifs, comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
- Si $u_n = f(n)$, étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

Exemple :

Soit $u_n = \frac{n}{2^n}$. Pour $n \geq 1$, les termes sont strictement positifs et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} \leq 1$, car $n+1 \leq 2n$. Donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. De plus, $0 \leq u_n \leq u_1 = \frac{1}{2}$: la suite est bornée.

II. Définition de la limite d'une suite

Dire que u_n « tend vers ℓ » signifie que les termes finissent par rester aussi près de ℓ qu'on le souhaite. Pour rendre cette idée exploitable, on la traduit avec des quantificateurs. C'est la clé de tout le chapitre.

1. Suites convergentes

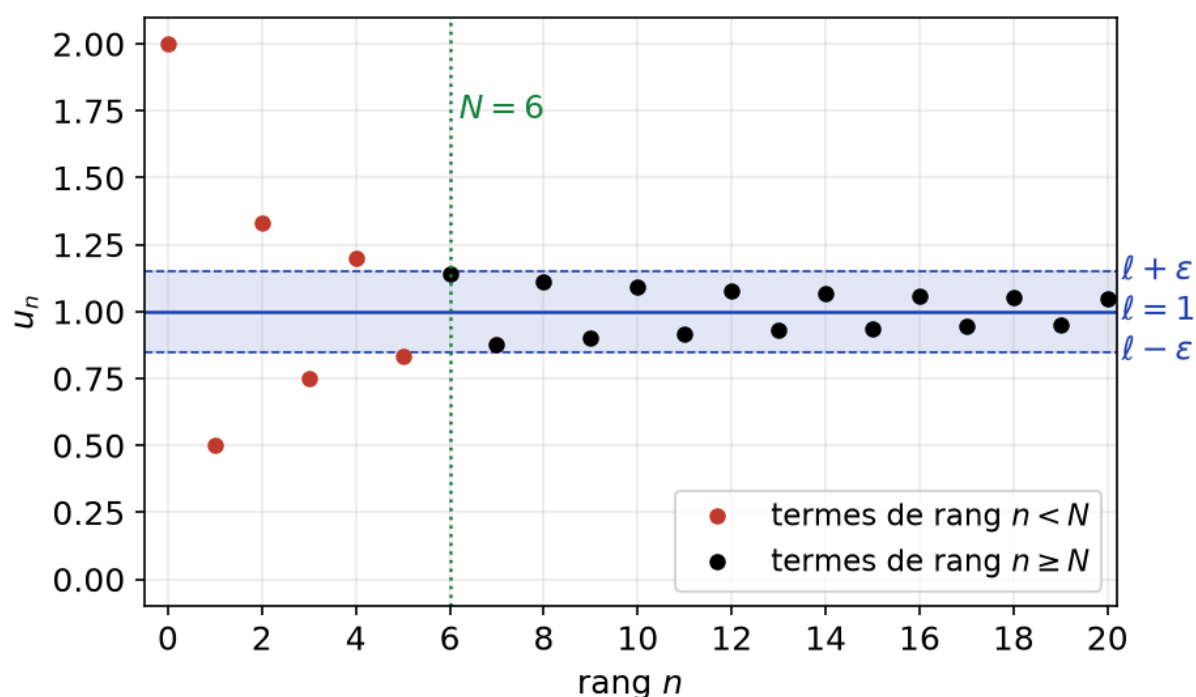
Définition :

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) **converge vers** ℓ si :

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \\ &,\exists N \in \mathbb{N}, \\ &,\forall n \geq N, \\ &,\left| u_n - \ell \right| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On écrit alors $u_n \rightarrow \ell$ ou $\lim u_n = \ell$. Une suite qui ne converge vers aucun réel est dite **divergente**.

Autrement dit, pour toute tolérance ε , tous les termes à partir d'un certain rang N sont dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$. Le rang N dépend de ε : plus la tolérance est petite, plus il faut attendre. Comme le montre la figure ci-dessous, pour $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $\varepsilon = 0,15$, seuls les six premiers termes sortent de la bande.



Exemple :

Montrons que $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ converge vers 2. On calcule $|u_n - 2| = \frac{1}{n+1}$. Soit $\epsilon > 0$. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier N tel que $N \geq \frac{1}{\epsilon}$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - 2| \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} \leq \epsilon$. Ainsi $u_n \rightarrow 2$.

Méthode :

Pour démontrer $u_n \rightarrow \ell$ avec la définition :

1. majorer $|u_n - \ell|$ par une expression simple v_n qui tend visiblement vers 0 (par exemple $\frac{C}{n}$ ou $\frac{C}{\sqrt{n}}$);
2. fixer $\epsilon > 0$ et résoudre $v_n \leq \epsilon$, ce qui fournit un rang N explicite ;
3. conclure par « pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq v_n \leq \epsilon$ ».

Inutile de chercher le plus petit N possible : n'importe quel rang qui convient suffit.

2. Unicité de la limite et conséquences

Théorème :

Si une suite converge, sa limite est **unique**.

Démonstration :

Supposons $u_n \rightarrow \ell$ et $u_n \rightarrow \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$. Posons $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3} > 0$. Il existe N_1 tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_1$, et N_2 tel que $|u_n - \ell'| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_2$. Pour $n = \max(N_1, N_2)$, l'inégalité triangulaire donne $|\ell - \ell'| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| \leq 2\varepsilon$. Or $2\varepsilon < 3\varepsilon = |\ell - \ell'|$: c'est absurde. Donc $\ell = \ell'$.

Propriété :

Toute suite convergente est **bornée**.

Démonstration :

Soit $u_n \rightarrow \ell$. Avec $\varepsilon = 1$, il existe N tel que $|u_n - \ell| \leq 1$ pour $n \geq N$. Pour ces rangs, $|u_n| \leq |\ell| + 1$. Par conséquent, $K = \max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1)$ majore $|u_n|$ pour tout n .

Attention :

La réciproque est fautive. La suite $((-1)^n)$ est bornée par 1 mais elle diverge, comme on le verra avec les suites extraites.

3. Limites infinies

Définition :

La suite (u_n) **tend vers** $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$. De même, elle tend vers $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N, \forall n \geq N, u_n \leq A$.

Une suite qui tend vers $\pm\infty$ est divergente, puisqu'elle n'est pas bornée. Cependant, on dit qu'elle « admet une limite » dans $\overline{\mathbb{R}}$. Par exemple, $u_n = \sqrt{n}$ tend vers $+\infty$: pour $A > 0$, le rang $N = \lceil A^2 \rceil$ convient, car $n \geq A^2$ entraîne $\sqrt{n} \geq A$.

III. Opérations sur les limites et théorèmes de comparaison

1. Opérations

Théorème :

Soient $u_n \rightarrow \ell$ et $v_n \rightarrow \ell'$, avec ℓ, ℓ' réels, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $u_n + v_n \rightarrow \ell + \ell'$ et $\lambda u_n \rightarrow \lambda \ell$;
- $u_n v_n \rightarrow \ell \ell'$;
- si $\ell' \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{\ell}{\ell'}$.

Démonstration :

Traisons la somme et le produit. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_1 et N_2 tels que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_1$ et $|v_n - \ell'| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_2$. Pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, on obtient $|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq 2\varepsilon$. Comme ε est arbitraire, la somme converge vers $\ell + \ell'$.

Pour le produit, on écrit d'abord :

$$u_n v_n - \ell \ell' = u_n (v_n - \ell') + \ell' (u_n - \ell).$$

Ensuite, (u_n) converge, donc elle est bornée par un réel $K > 0$. Ainsi, pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a $|u_n v_n - \ell \ell'| \leq (K + |\ell'|) \varepsilon$. La constante $K + |\ell'|$ ne dépend pas de ε , ce qui conclut.

Les règles s'étendent aux limites infinies : par exemple, $+\infty + \ell = +\infty$ et $\ell \times (+\infty) = +\infty$ si $\ell > 0$. En revanche, quatre situations ne permettent pas de conclure directement. Ce sont les **formes indéterminées** : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$. Il faut alors transformer l'écriture, par exemple en factorisant le terme dominant.

Exemple :

Pour $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$, on a une forme $\infty - \infty$. On multiplie par la quantité conjuguée :

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

2. Passage à la limite dans les inégalités

Propriété :

Si $u_n \rightarrow \ell$, $v_n \rightarrow \ell'$ et $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq \ell'$.

Démonstration :

La suite $w_n = v_n - u_n$ est positive à partir d'un rang n_0 et converge vers $L = \ell' - \ell$.
Supposons $L < 0$ et prenons $\varepsilon = -\frac{L}{2}$. Pour n assez grand, $w_n \leq L + \varepsilon = \frac{L}{2} < 0$. C'est contradictoire avec $w_n \geq 0$. Donc $L \geq 0$.

Attention :

Les inégalités strictes deviennent larges à la limite. Par exemple, $\frac{1}{n} > 0$ pour tout $n \geq 1$,
pourtant la limite vaut 0 .

3. Théorème des gendarmes et comparaison

Théorème :

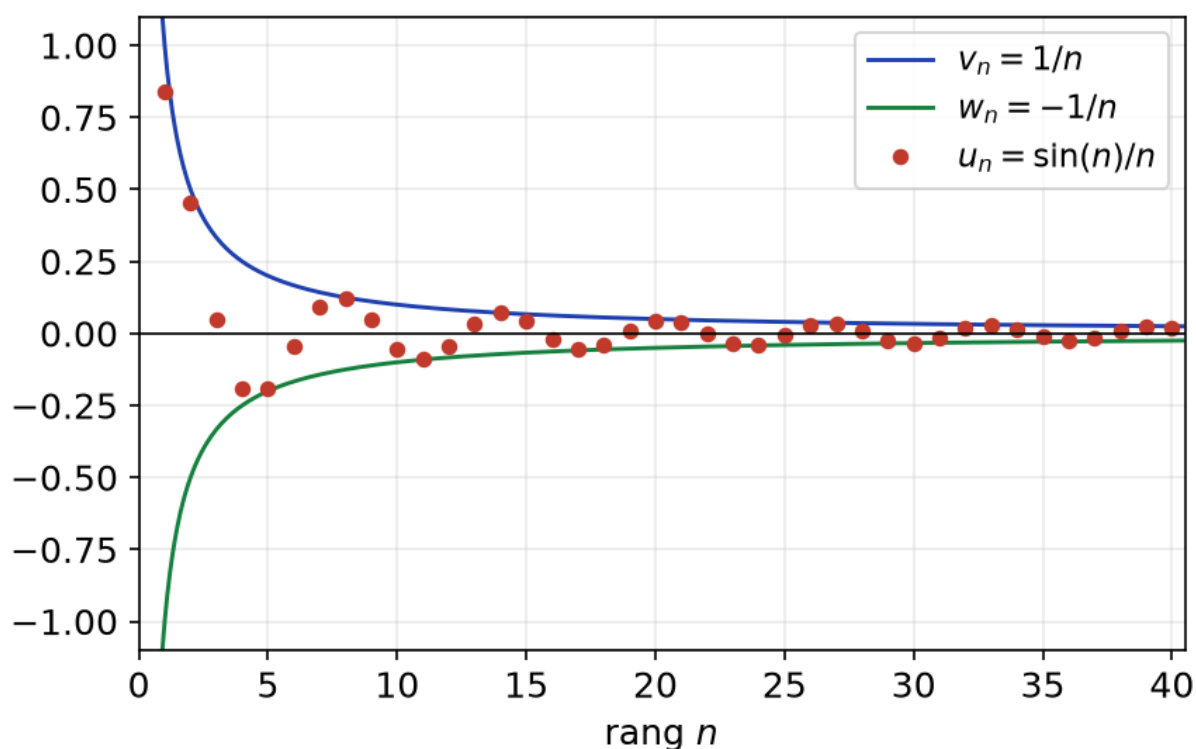
Théorème des gendarmes. Soient trois suites telles que $w_n \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Si (w_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ , alors (u_n) converge aussi vers ℓ .

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. Pour n assez grand, on a à la fois $\ell - \varepsilon \leq w_n$, $v_n \leq \ell + \varepsilon$ et l'encadrement.

Donc $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$, c'est-à-dire $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

La figure ci-dessous illustre ce théorème pour $u_n = \frac{\sin n}{n}$, coincée entre $-\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$. On en déduit que $u_n \rightarrow 0$, alors que $(\sin n)$ n'a pas de limite.



Corollaire :

Comparaison. Si $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$ à partir d'un certain rang et $\alpha_n \rightarrow 0$, alors $u_n \rightarrow \ell$. De même, si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n \rightarrow +\infty$.

Exemple :

Pour $n \geq 1$, on a $n! \geq n$. En effet, les facteurs $1, 2, \dots, n-1$ sont tous supérieurs ou égaux à 1. Par comparaison, $n! \rightarrow +\infty$.

IV. Borne supérieure et théorème de la limite monotone

Les théorèmes précédents supposent la limite connue d'avance. Or on a souvent besoin de prouver qu'une suite converge sans connaître sa limite. C'est ici qu'intervient la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$: toute partie non vide et majorée admet une **borne supérieure**, c'est-à-dire un plus petit majorant.

1. Le théorème de la limite monotone

Théorème :

Soit (u_n) une suite croissante.

- Si (u_n) est majorée, elle converge vers $\ell = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
- Sinon, elle tend vers $+\infty$.

De même, une suite décroissante minorée converge vers sa borne inférieure, et une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration :

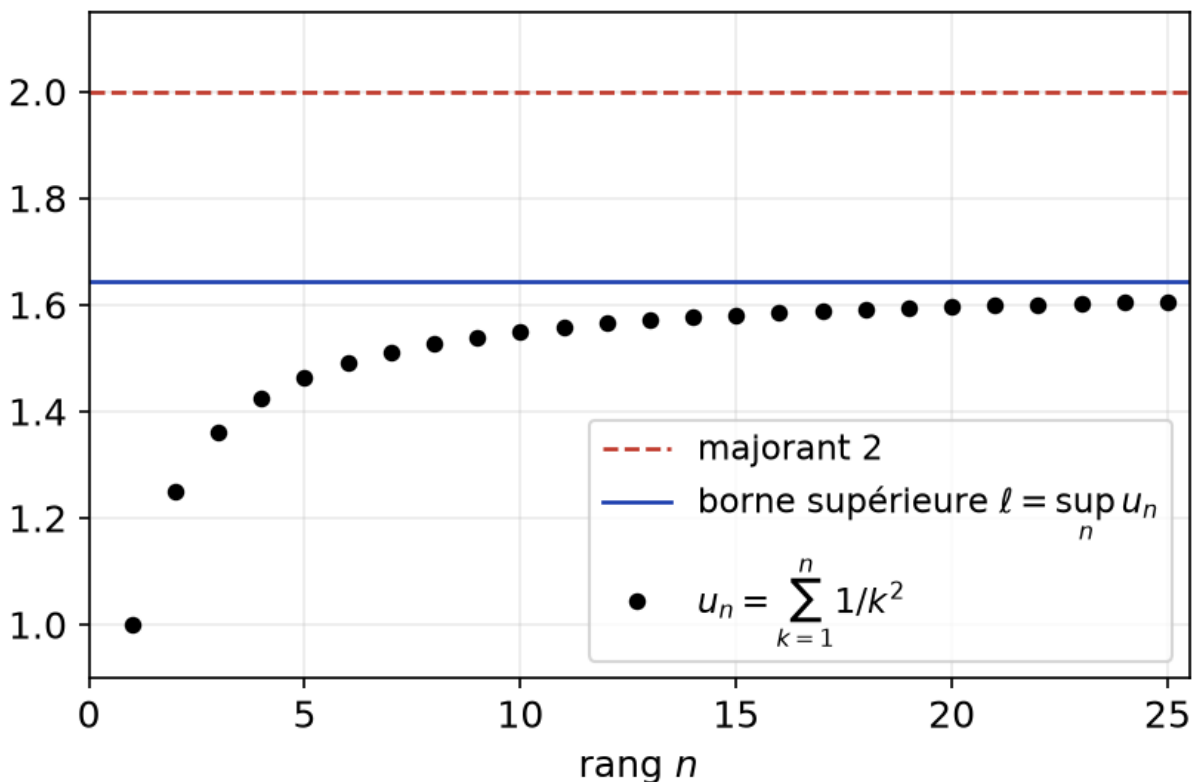
Supposons (u_n) croissante et majorée. L'ensemble $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré, donc il possède une borne supérieure ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E , il existe N tel que $u_N > \ell - \varepsilon$. Ensuite, pour $n \geq N$, la croissance donne $u_n \geq u_N > \ell - \varepsilon$. De plus, $u_n \leq \ell$ puisque ℓ majore E . Ainsi $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$.

Supposons maintenant (u_n) croissante et non majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque A ne majore pas la suite, il existe N tel que $u_N > A$. Par croissance, $u_n \geq u_N > A$ pour tout $n \geq N$. Donc $u_n \rightarrow +\infty$.

Exemple :

Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. La suite est croissante, car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Pour $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Par télescopage, $u_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2$. La suite converge donc, vers un réel $\ell \leq 2$.

La figure ci-dessous montre cette suite croissante qui s'approche de sa borne supérieure sans la dépasser. Le théorème donne l'existence de la limite, sans en fournir la valeur exacte.



Remarque :

On peut montrer que $\ell = \frac{\pi^2}{6}$, mais c'est hors programme à ce stade de l'année. L'intérêt du théorème est précisément de prouver la convergence sans connaître la limite.

2. Suites adjacentes

Définition :

Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si $v_n - u_n \rightarrow 0$.

Théorème :

Deux suites adjacentes convergent vers la **même limite** ℓ . Si (u_n) est la croissante, on a de plus $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout n .

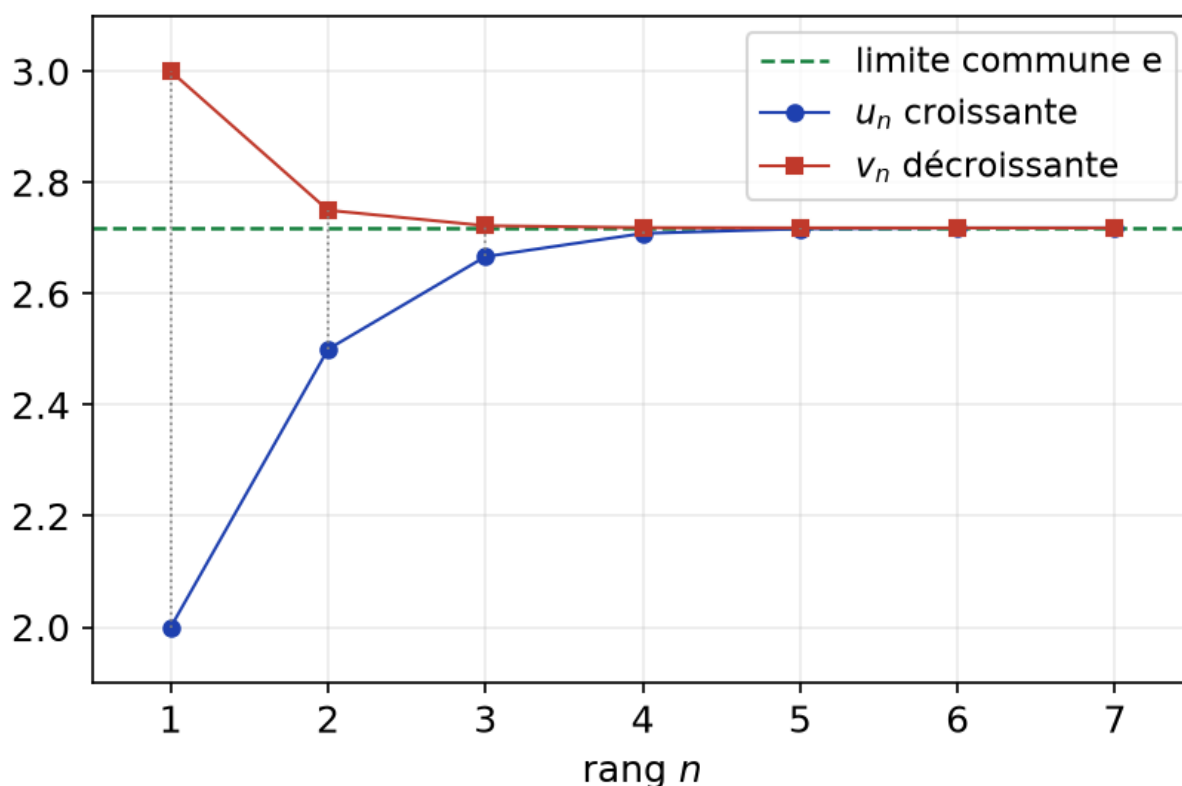
Démonstration :

Supposons (u_n) croissante et (v_n) décroissante. La suite $d_n = v_n - u_n$ est décroissante, comme différence d'une suite décroissante et d'une suite croissante. Elle tend vers 0, donc $d_n \geq 0$ pour tout n , par passage à la limite dans $d_m \leq d_n$ pour $m \geq n$. Par conséquent, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$. Ainsi (u_n) est croissante et majorée par v_0 : elle converge vers ℓ . De même, (v_n) converge vers ℓ' . Enfin, $\ell' - \ell = \lim d_n = 0$. L'encadrement découle de $u_n \leq \sup_k u_k = \ell$ et $v_n \geq \inf_k v_k = \ell$.

Exemple :

Pour $n \geq 1$, posons $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$. La suite (u_n) croît. Un calcul direct donne $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$. Enfin, $v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} \rightarrow 0$. Les suites sont donc adjacentes. Leur limite commune est le nombre e .

Comme le montre la figure ci-dessous, les deux suites se referment rapidement sur leur limite commune. Chaque couple (u_n, v_n) fournit ainsi un encadrement de e .



V. Suites extraites et théorème de Bolzano-Weierstrass

1. Suites extraites

Définition :

Une **extraction** est une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. La suite $(u_{\varphi(n)})$ est appelée **suite extraite** (ou sous-suite) de (u_n) . Par exemple, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont extraites de (u_n) .

Lemme :

Si φ est une extraction, alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration :

On raisonne par récurrence. D'abord, $\varphi(0) \geq 0$ car $\varphi(0) \in \mathbb{N}$. Ensuite, si $\varphi(n) \geq n$, alors $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$. Comme ce sont des entiers, $\varphi(n+1) \geq n+1$.

Proposition :

Si $u_n \rightarrow \ell$ (avec ℓ réel ou infini), alors **toute suite extraite** de (u_n) tend aussi vers ℓ .

Démonstration :

Traitons ℓ réel. Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$. Pour $n \geq N$, le lemme donne $\varphi(n) \geq n \geq N$. Donc $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$.

Méthode :

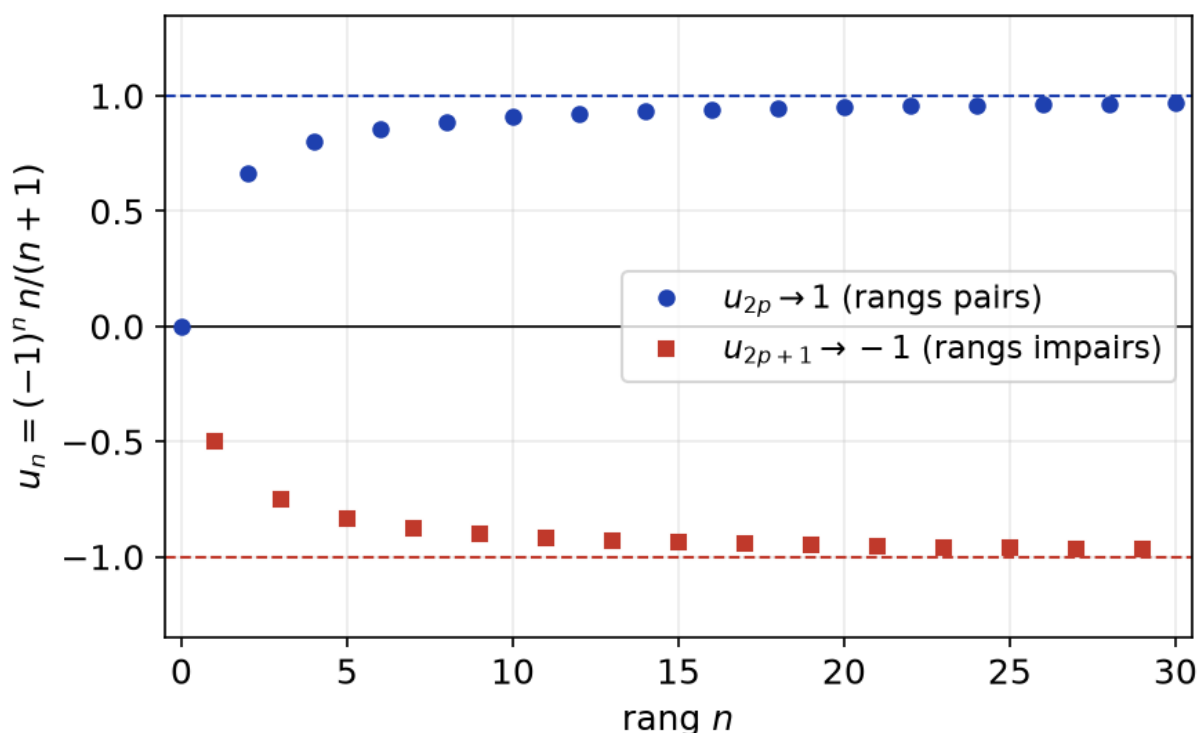
Pour prouver qu'une suite **diverge**, il suffit d'exhiber :

- deux suites extraites qui ont des limites différentes ;
- ou une suite extraite qui n'a pas de limite.

Exemple :

Soit $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$. D'une part, $u_{2p} = \frac{2p}{2p+1} \rightarrow 1$. D'autre part, $u_{2p+1} = -\frac{2p+1}{2p+2} \rightarrow -1$. Les deux limites diffèrent, donc (u_n) diverge.

La figure ci-dessous sépare les rangs pairs et impairs de cette suite. On y voit deux « branches » qui s'accumulent autour de 1 et de -1.



Propriété :

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ .

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_1 tel que $|u_{2p} - \ell| \leq \varepsilon$ pour $p \geq N_1$, et N_2 tel que $|u_{2p+1} - \ell| \leq \varepsilon$ pour $p \geq N_2$. Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Tout $n \geq N$

s'écrit $2p$ avec $p \geq N_1$, ou $2p + 1$ avec $p \geq N_2$. Dans les deux cas, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

2. Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème :

Bolzano-Weierstrass. De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration :

On procède par dichotomie. Soit $a_0 \leq u_n \leq b_0$ pour tout n . L'intervalle $[a_0, b_0]$ contient une infinité de termes, au sens d'une infinité d'indices. On le coupe en deux moitiés : l'une d'elles contient encore une infinité d'indices, on la note $[a_1, b_1]$. En itérant, on construit des intervalles emboîtés $[a_k, b_k]$, de longueur $\frac{b_0 - a_0}{2^k}$, qui contiennent chacun une infinité d'indices.

Ensuite, on choisit $\varphi(0) = 0$, puis $\varphi(k) > \varphi(k-1)$ tel que $u_{\varphi(k)} \in [a_k, b_k]$. Ce choix est possible car il reste une infinité d'indices. Les suites (a_k) et (b_k) sont adjacentes : (a_k) croît, (b_k) décroît et $b_k - a_k \rightarrow 0$. Elles ont donc une limite commune ℓ . Enfin, $a_k \leq u_{\varphi(k)} \leq b_k$, et les gendarmes donnent $u_{\varphi(k)} \rightarrow \ell$.

Remarque :

Le théorème affirme l'existence d'une sous-suite convergente, sans en donner la limite. Par exemple, $(\sin n)$ est bornée : elle admet donc une suite extraite convergente, alors qu'elle-même diverge.

VI. Suites récurrentes $u(n+1) = f(u(n))$

On étudie ici une suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction réelle. La démarche est toujours la même, et le dessin guide le raisonnement. Dans cette partie, on utilise la continuité au sens intuitif vu au lycée ; elle sera étudiée en détail au chapitre suivant.

1. Bonne définition et limites possibles

Définition :

Un intervalle I est **stable** par f si $f(I) \subset I$. Si $u_0 \in I$ et I est stable, une récurrence immédiate montre que la suite est bien définie et que $u_n \in I$ pour tout n .

Théorème :

Si $u_n \rightarrow \ell$, si $\ell \in I$ et si f est continue en ℓ , alors $f(\ell) = \ell$: la limite est un **point fixe** de f .

En effet, $u_{n+1} \rightarrow \ell$ comme suite extraite, et $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$ par continuité. L'unicité de la limite donne $f(\ell) = \ell$. Ce résultat réduit la recherche de la limite à la résolution d'une équation. Cependant, il ne prouve pas la convergence.

2. Monotonie

Propriété :

Soit I un intervalle stable contenant u_0 .

- Si f est croissante sur I , la suite (u_n) est monotone : croissante si $u_1 \geq u_0$, décroissante si $u_1 \leq u_0$.
- Si f est décroissante sur I , les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens contraires.

Démonstration :

Supposons f croissante et $u_1 \geq u_0$. Si $u_{n+1} \geq u_n$, alors $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$, soit $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. La récurrence conclut. Si f est décroissante, $f \circ f$ est croissante, et on applique le premier point aux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) , qui vérifient $u_{n+1} = (f \circ f)(u_n)$.

Méthode :

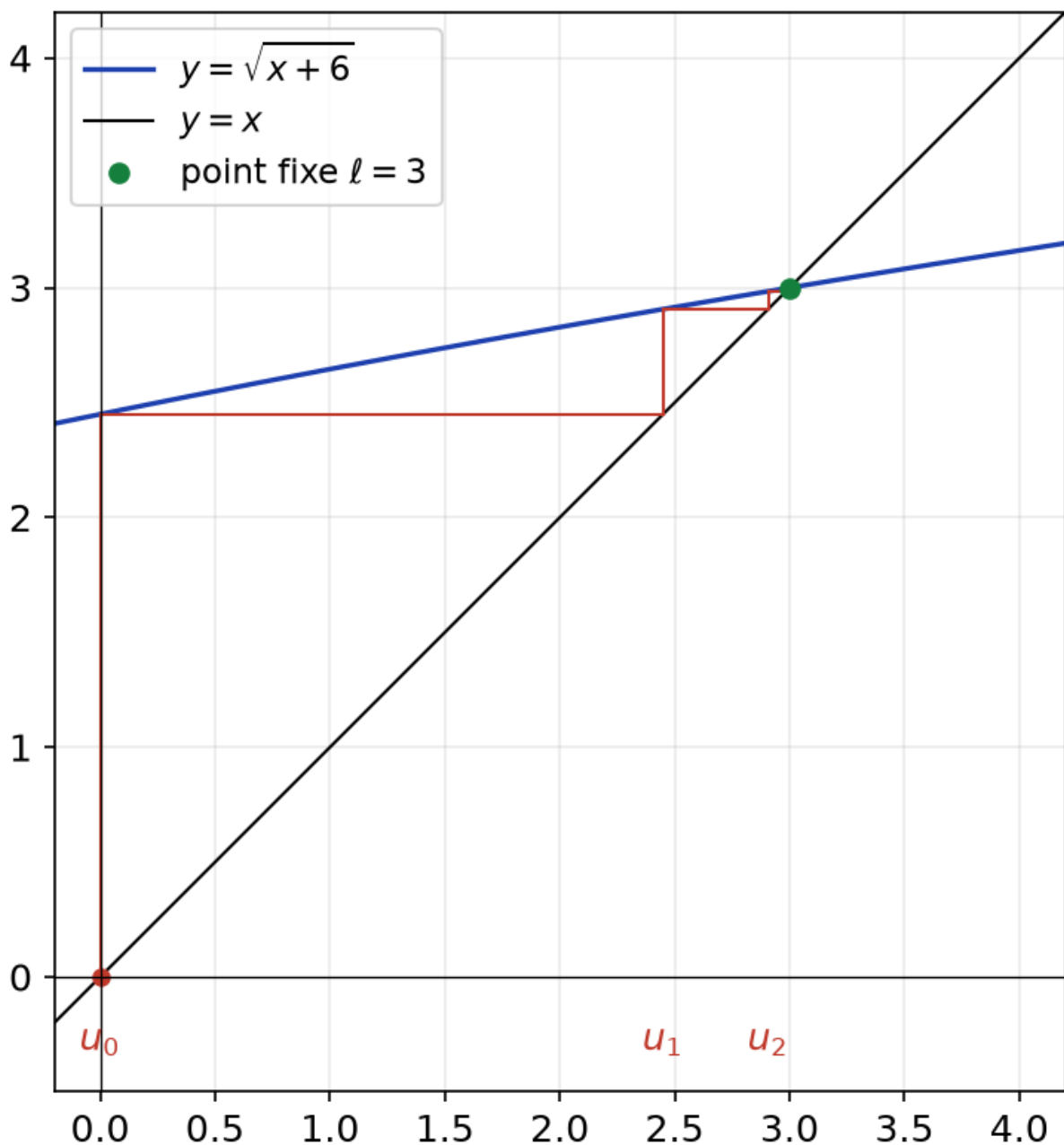
Plan d'étude de $u_{n+1} = f(u_n)$:

1. trouver un intervalle stable I contenant u_0 ;
2. chercher les points fixes de f dans I et le signe de $f(x) - x$;
3. établir la monotonie (sens de variation de f , ou signe de $f(x) - x$) ;
4. conclure avec le théorème de la limite monotone, puis identifier la limite parmi les points fixes.

Exemple :

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. La fonction $f : x \rightarrow \sqrt{x + 6}$ est croissante, et l'intervalle $[0, 3]$ est stable, car $f(0) = \sqrt{6} \geq 0$ et $f(3) = 3$. Comme $u_1 = \sqrt{6} \geq u_0$, la suite est croissante. Elle est majorée par 3, donc elle converge vers $\ell \in [0, 3]$. Enfin, $\ell = \sqrt{\ell + 6}$ donne $\ell^2 - \ell - 6 = 0$, soit $\ell = 3$ ou $\ell = -2$. Donc $\ell = 3$.

La figure ci-dessous représente cette suite par un **diagramme en toile d'araignée**. On part de u_0 sur l'axe des abscisses, on monte jusqu'à la courbe, puis on revient horizontalement sur la droite $y = x$. En répétant, on voit les termes s'approcher du point fixe.



VII. Suites arithmético-géométriques et récurrentes linéaires d'ordre 2

1. Suites arithmético-géométriques

Propriété :

Soit $u_{n+1} = a u_n + b$, avec $a \neq 1$. Notons $c = \frac{b}{1-a}$, l'unique solution de $c = ac + b$. Alors la suite $v_n = u_n - c$ est géométrique de raison a , et :

$$u_n = c + a^n (u_0 - c).$$

En effet, en soustrayant $c = ac + b$ à $u_{n+1} = a u_n + b$, on obtient $u_{n+1} - c = a(u_n - c)$. Par conséquent, si $|a| < 1$, la suite converge vers c . Si $|a| > 1$ et $u_0 \neq c$, elle diverge.

2. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On considère maintenant la relation $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$, où a et b sont réels, avec $b \neq 0$. On cherche d'abord des solutions géométriques $u_n = r^n$. En substituant, on trouve la condition $r^2 = ar + b$.

Définition :

L'équation caractéristique de la relation $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ est $r^2 - ar - b = 0$.

Théorème :

Soit $\Delta = a^2 + 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique.

- Si $\Delta > 0$, de racines réelles $r_1 \neq r_2$: $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
- Si $\Delta = 0$, de racine double r : $u_n = (\lambda + \mu n) r^n$.
- Si $\Delta < 0$, de racines $\rho e^{\pm i\theta}$: $u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$.

Dans chaque cas, λ et μ sont des réels, uniques, fixés par u_0 et u_1 .

Démonstration :

Traisons le premier cas. Les suites (r_1^n) et (r_2^n) vérifient la relation, et toute combinaison $\lambda r_1^n + \mu r_2^n$ aussi, par linéarité. Ensuite, le système $\lambda + \mu = u_0$, $\lambda r_1 + \mu r_2 = u_1$ a une unique solution, car son déterminant $r_2 - r_1$ est non nul. Enfin, une suite vérifiant la relation est entièrement déterminée par u_0 et u_1 , par récurrence. Donc (u_n) coïncide avec la combinaison trouvée. Les deux autres cas se traitent de même : dans le deuxième, on vérifie que $(n r^n)$ est solution grâce à $2r = a$; dans le troisième, on prend les parties réelle et imaginaire de $(\rho e^{i\theta})^n$.

Exemple :

Soit $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. L'équation $r^2 - 5r + 6 = 0$ a pour racines 2 et 3. Donc $u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$, avec $\lambda + \mu = 1$ et $2\lambda + 3\mu = 4$. On obtient $\mu = 2$ et $\lambda = -1$, soit $u_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$. On vérifie :
 $u_2 = 5 \times 4 - 6 = 14 = 18 - 4$.

Ce qu'il faut retenir

- La définition quantifiée $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$ est la base de toutes les démonstrations du chapitre.
- La limite est unique, et toute suite convergente est bornée ; la réciproque est fausse.
- Les opérations sur les limites se démontrent avec ε ; les formes indéterminées demandent une transformation d'écriture.
- Le théorème des gendarmes et la comparaison donnent une limite à partir d'un encadrement.
- Une suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure : c'est la conséquence directe de la propriété de la borne supérieure.
- Deux suites adjacentes convergent vers une même limite, qu'elles encadrent.

- Deux suites extraites de limites différentes prouvent une divergence ; toute suite bornée admet une suite extraite convergente (Bolzano-Weierstrass).
- Pour $u_{n+1} = f(u_n)$: intervalle stable, points fixes, monotonie, puis limite monotone.
- Arithmético-géométrique : on se ramène à une suite géométrique via le point fixe ; ordre 2 : on résout l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$.

Questions fréquentes sur suites numériques

Faut-il toujours utiliser la définition avec epsilon pour prouver une convergence ?

Non. La définition sert à démontrer les théorèmes généraux et à traiter les cas simples demandés explicitement. Dans la pratique, on utilise ensuite les opérations sur les limites, les gendarmes ou la limite monotone. En revanche, un énoncé qui dit « avec la définition » exige un rang N construit à partir de ε .

Une suite bornée est-elle forcément convergente ?

Non. La suite $((-1)^n)$ est bornée par 1 mais elle diverge, car ses termes pairs valent 1 et ses termes impairs valent -1. Une suite bornée admet seulement une suite extraite convergente, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Il faut la monotonie en plus pour conclure à la convergence.

Comment montrer qu'une suite n'a pas de limite ?

La méthode la plus sûre consiste à trouver deux suites extraites de limites différentes, par exemple les termes de rang pair et de rang impair. Une autre option est d'exhiber une suite extraite qui n'a pas de limite. Si la suite n'est pas bornée, elle diverge aussi, mais elle peut encore tendre vers $+\infty$.

Pourquoi la limite d'une suite $u(n+1) = f(u(n))$ est-elle un point fixe ?

Si $u_n \rightarrow \ell$ et si f est continue en ℓ , alors $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ tend aussi vers ℓ , donc $f(\ell) = \ell$ par unicité de la limite. Attention : ce résultat identifie la limite possible, mais il ne prouve pas que la suite converge.

Pour aller plus loin en L1

- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur suites numériques](#)
- Les solutions : [corrigé des exercices sur suites numériques](#)
- À maîtriser avant : [Nombres réels et borne supérieure](#), [Entiers naturels, récurrence et dénombrement](#)
- Chapitre précédent : [Nombres réels et borne supérieure](#)
- Chapitre suivant : [Limites et continuité des fonctions](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)