

Suites numériques

Corrigé de l'exercice 1 : Monotonie et bornes de trois suites

1. On écrit $u_n = \frac{2(n+3) - 5}{n+3} = 2 - \frac{5}{n+3}$. Quand n augmente, $\frac{5}{n+3}$ diminue, donc (u_n) est strictement croissante. Par conséquent, $u_n \geq u_0 = \frac{1}{3}$. De plus, $\frac{5}{n+3} > 0$, d'où $u_n < 2$. **La suite (u_n) est strictement croissante et bornée : $\frac{1}{3} \leq u_n < 2$.**
2. On a $v_0 = 0$, puis $v_n > 0$ pour $n \geq 1$. Pour $n \geq 1$, on calcule $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{2n}$. Or $n+1 \leq 2n$ équivaut à $n \geq 1$. Donc $v_{n+1} \leq v_n$ pour $n \geq 1$, avec égalité seulement pour $n = 1$. Ainsi $v_0 = 0 < v_1 = v_2 = \frac{1}{2}$, puis la suite décroît. Elle n'est donc pas monotone sur $\mathbb{N}$, mais elle est décroissante à partir du rang 1. Enfin, $0 \leq v_n \leq v_1$. **La suite (v_n) est décroissante à partir du rang 1 et bornée : $0 \leq v_n \leq \frac{1}{2}$.**
3. On a $w_{2p} = 2p$ et $w_{2p+1} = -(2p+1)$. D'une part, pour tout réel M , il existe p tel que $2p > M$: la suite n'est pas majorée. D'autre part, de même, elle n'est pas minorée. Enfin, $w_0 = 0$, $w_1 = -1$ et $w_2 = 2$: elle n'est pas monotone. **La suite (w_n) n'est ni monotone, ni majorée, ni minorée.**

Corrigé de l'exercice 2 : Convergence par la définition epsilon

1. On calcule :

$$u_n - 3 = \frac{3n - 1 - 3(n+2)}{n+2} = \frac{-7}{n+2}, \text{ donc } |u_n - 3| = \frac{7}{n+2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La condition $\frac{7}{n+2} \leq \varepsilon$ équivaut à $n \geq \frac{7}{\varepsilon} - 2$. D'après la propriété d'Archimède,

il existe un entier $N \geq \frac{7}{\varepsilon}$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - 3| \leq \varepsilon$. **Ainsi** $u_n \rightarrow 3$.

2. Avec $\varepsilon = 10^{-3}$, la condition devient $n + 2 \geq 7000$, soit $n \geq 6998$. **Le rang**
 $N = 6998$ convient, et c'est le plus petit.

3. On multiplie par la quantité conjuguée :

$$v_n = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Le dénominateur est positif et supérieur à $2\sqrt{n}$, car $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$. Donc $0 \leq v_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$. Soit ensuite $\varepsilon > 0$. On a $\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \varepsilon$ dès que $n \geq \frac{1}{4\varepsilon^2}$. Prenons un entier $N \geq \max\left(1, \frac{1}{4\varepsilon^2}\right)$. Pour $n \geq N$, on obtient $|v_n - 0| \leq \varepsilon$. **Donc** $v_n \rightarrow 0$.

Point de méthode : on ne résout pas $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ exactement quand c'est compliqué ; on majore d'abord $|u_n - \ell|$ par une expression simple, comme au 3.

Corrigé de l'exercice 3 : Limite infinie par la définition

1. On calcule $n^2 - 3n - \frac{n^2}{2} = \frac{n^2 - 6n}{2} = \frac{n(n-6)}{2}$. Pour $n \geq 6$, les deux facteurs sont positifs. **Donc** $n^2 - 3n \geq \frac{n^2}{2}$ **pour tout** $n \geq 6$.

2. Soit $A > 0$. Posons $N = \max(6, \lceil \sqrt{2A} \rceil)$. Pour $n \geq N$, on a d'abord $n \geq 6$, donc $u_n \geq \frac{n^2}{2}$. Ensuite, $n \geq \sqrt{2A}$, donc $\frac{n^2}{2} \geq A$. Par conséquent, $u_n \geq A$. Pour $A \leq 0$, le même rang convient, puisque $u_n \geq 0$ dès que $n \geq 6$. **Ainsi** $u_n \rightarrow +\infty$.

3. Pour $n \geq 1$, on a $n^2 + 1 \geq n^2$ et $n + 1 \leq 2n$. Donc $v_n \geq \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$. Soit $A > 0$ et $N = \max(1, \lceil 2A \rceil)$. Pour $n \geq N$, on obtient $v_n \geq \frac{n}{2} \geq A$. **Donc** $v_n \rightarrow +\infty$.

Corrigé de l'exercice 4 : Calculs de limites

1. On factorise par n^3 : $a_n = \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^3}}$. Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 2.
Donc $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$.
2. C'est une forme $\infty - \infty$. Avec la quantité conjuguée, $b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$. Or $\sqrt{1+\frac{1}{n}} \rightarrow 1$. **Donc** $b_n \rightarrow \frac{1}{2}$.
3. On divise par 3^n : $c_n = \frac{1+q^n}{1-q^n}$, avec $q = \frac{2}{3}$. Comme $0 < q < 1$, on a $q^n \rightarrow 0$. **Donc** $c_n \rightarrow 1$.
4. Posons $x_n = \frac{1}{n}$, qui tend vers 0 sans s'annuler. Alors $d_n = \frac{\sin(x_n) - \sin 0}{x_n}$. Ce taux d'accroissement tend vers $\sin'(0) = \cos 0 = 1$. **Donc** $d_n \rightarrow 1$.
5. On écrit $e_n = \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. Par croissances comparées, $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$. Ensuite, la fonction exponentielle est continue en 0. **Donc** $e_n \rightarrow e^0 = 1$.

Corrigé de l'exercice 5 : Encadrements et théorème des gendarmes

1. Pour $1 \leq k \leq n$, on a $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$. Donc $\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$. En sommant ces n inégalités :

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq S_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Les deux bornes valent $\frac{1}{1+1/n}$ et $\frac{1}{1+1/n^2}$: elles tendent vers 1. D'après le théorème des gendarmes, $S_n \rightarrow 1$.

2. Par définition de la partie entière, $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$. En divisant par $n > 0$, on obtient $x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$. Le minorant tend vers x , et le majorant vaut x . **Donc** $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rightarrow x$.

3. Pour tout $n \geq 1$, l'inégalité triangulaire donne $|\sin n + 2\cos n| \leq 1 + 2 = 3$. Ainsi $\left| \frac{\sin n + 2\cos n}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{3}{\sqrt{n}}$, et $\frac{3}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$. **Par comparaison, la suite tend vers 0.**

Corrigé de l'exercice 6 : Comparaison et factorielles

1. Pour $1 \leq k \leq n$, on a $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$, donc $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$. En sommant, $u_n \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Or $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$. **Par comparaison, $u_n \rightarrow +\infty$.**
2. On écrit $\frac{n!}{n^n} = \prod_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \times \prod_{k=2}^n \frac{k}{n}$. Chaque facteur $\frac{k}{n}$ appartient à $]0, 1]$. Donc $0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$. Par les gendarmes, $\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$. Ensuite, $\frac{n^n}{n!} \geq n$, qui tend vers $+\infty$. **Ainsi $\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$ et $\frac{n^n}{n!} \rightarrow +\infty$.**
3. On a $\frac{2^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \frac{2}{k}$. Pour $n = 2$, ce produit vaut $2 = \frac{4}{2}$. Pour $n \geq 3$, on isole le premier et le dernier facteur :

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{n} \times \prod_{k=2}^{n-1} \frac{2}{k}.$$

Les facteurs du produit restant sont dans $]0, 1]$. Donc $0 < \frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n}$. **Par les gendarmes, $\frac{2^n}{n!} \rightarrow 0$.**

Corrigé de l'exercice 7 : Opérations sur les limites : démonstrations

1. Appliquons la définition avec $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0$. Il existe N tel que $|u_n - \ell| \leq \frac{|\ell|}{2}$ pour $n \geq N$. Par l'inégalité triangulaire, $|\ell| \leq |\ell - u_n| + |u_n|$. **Donc $|u_n| \geq |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}$ pour $n \geq N$.** En particulier, $u_n \neq 0$ pour ces rangs.

2. Pour $n \geq N$, on a :

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|\ell - u_n|}{|u_n| |\ell|} \leq \frac{2}{\ell^2} |u_n - \ell|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N' tel que $|u_n - \ell| \leq \frac{\ell^2 \varepsilon}{2}$ pour $n \geq N'$. Alors, pour $n \geq \max(N, N')$, l'écart est au plus ε . **Donc** $\frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{\ell}$.

3. Soit $K > 0$ tel que $|u_n| \leq K$ pour tout n . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $|v_n| \leq \frac{\varepsilon}{K}$ pour $n \geq N$. Alors $|u_n v_n| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. **Ainsi** $u_n v_n \rightarrow 0$.

4. Prenons $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$. Ces deux suites divergent, car leurs termes pairs et impairs ont des limites distinctes. Pourtant, $u_n + v_n = 0$ et $u_n v_n = (-1)^{2n+1} = -1$. **Ces deux suites divergentes ont une somme et un produit constants, donc convergents.**

Corrigé de l'exercice 8 : Critère du quotient pour une suite positive

1. Comme $0 \leq L < 1$, le réel $q = \frac{1+L}{2}$ vérifie $L < q < 1$. Posons $\varepsilon = q - L = \frac{1-L}{2} > 0$. Par définition de la limite, il existe N tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq L + \varepsilon = q$ pour $n \geq N$. Comme $u_n > 0$, **on obtient** $u_{n+1} \leq q u_n$ **pour tout** $n \geq N$.

2. On raisonne par récurrence sur $n \geq N$. Au rang N , l'égalité $u_N = q^0 u_N$ est vraie. Ensuite, si $u_n \leq q^{n-N} u_N$, alors $u_{n+1} \leq q u_n \leq q^{n+1-N} u_N$. Ainsi $0 < u_n \leq \frac{u_N}{q^N} q^n$. Or $0 < q < 1$, donc $q^n \rightarrow 0$. **Par les gendarmes**, $u_n \rightarrow 0$.

3. Pour $u_n = \frac{n^5}{2^n}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \rightarrow \frac{1}{2}$. Pour $w_n = \frac{10^n}{n!}$, on a $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{10}{n+1} \rightarrow 0$. Dans les deux cas, la limite du quotient est dans $[0, 1[$. **Donc** $\frac{n^5}{2^n} \rightarrow 0$ **et** $\frac{10^n}{n!} \rightarrow 0$.

4. Pour la suite constante égale à 1, le quotient vaut 1. Pour $u_n = n$ (avec $n \geq 1$), il vaut $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$. Or la première suite tend vers 1 et la seconde vers $+\infty$. **Le cas** $L = 1$ **ne permet donc aucune conclusion.**

Corrigé de l'exercice 9 : Sommes des inverses et des inverses des carrés

1. D'abord, $K_{n+1} - K_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$: la suite est croissante. Ensuite, pour $k \geq 2$, on a $k^2 \geq k(k-1)$, donc :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

En sommant pour k de 2 à n , la somme télescopique vaut $1 - \frac{1}{n}$. Ainsi

$K_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$, ce qui reste vrai pour $n = 1$. La suite est croissante et majorée par 2. **D'après le théorème de la limite monotone, (K_n) converge, vers une limite inférieure ou égale à 2.**

2. On a $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Cette somme compte n termes, tous supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2n}$. **Donc** $H_{2n} - H_n \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

3. Supposons que $H_n \rightarrow \ell$ réel. La suite extraite (H_{2n}) tend aussi vers ℓ . Donc $H_{2n} - H_n \rightarrow 0$. Or, par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on aurait $0 \geq \frac{1}{2}$: c'est absurde. Ainsi (H_n) diverge. De plus, elle est croissante. Si elle était majorée, elle convergerait. Elle n'est donc pas majorée. **Par le théorème de la limite monotone,** $H_n \rightarrow +\infty$.

4. On raisonne par récurrence sur p . Pour $p = 0$, on a $H_1 = 1$. Supposons $H_{2^p} \geq 1 + \frac{p}{2}$. En appliquant le 2 avec $n = 2^p$:

$$H_{2^{p+1}} = H_{2^p} + (H_{2 \cdot 2^p} - H_{2^p}) \geq 1 + \frac{p}{2} + \frac{1}{2}.$$

Ainsi la suite extraite (H_{2^p}) tend vers $+\infty$, donc (H_n) n'est pas majorée. **Comme elle est croissante, on retrouve $H_n \rightarrow +\infty$.**

Corrigé de l'exercice 10 : Un produit convergent

1. Tous les facteurs sont strictement positifs, donc $P_n > 0$. Ensuite, $\frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$. **La suite (P_n) est donc strictement croissante.**

2. Le logarithme transforme le produit en somme. Avec l'inégalité admise :

$$\ln P_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi $\ln P_n \leq 1$. La fonction exponentielle étant croissante, **on obtient $P_n \leq e$.**

3. La suite est croissante et majorée par e . D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers $P = \sup_n P_n$. Par passage à la limite, $P \leq e$. De plus, $P \geq P_2 = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$, et $\frac{15}{8} > \frac{3}{2}$. **Donc $\frac{3}{2} < P \leq e$.**

Corrigé de l'exercice 11 : Suites adjacentes et somme alternée

1. On ajoute deux termes, de rangs $2n+1$ et $2n+2$. Le premier est positif, le second négatif :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

$$\text{De même, } S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

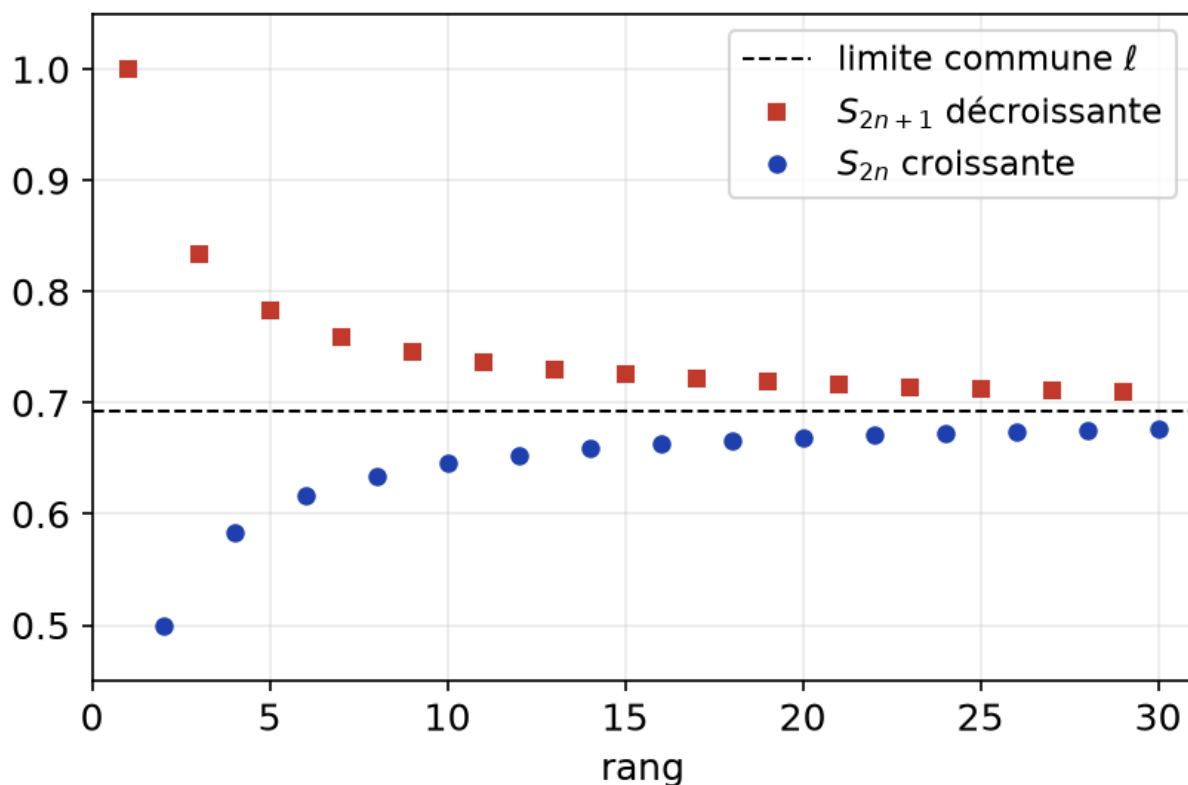
2. D'après le 1, (S_{2n}) est strictement croissante et (S_{2n+1}) est strictement décroissante. Ensuite, $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}$, qui tend vers 0 . **Les deux suites sont donc adjacentes.**

3. Elles convergent vers une même limite ℓ . Or ce sont les suites des termes pairs et impairs de (S_n) . D'après la propriété du cours, (S_n) **converge vers ℓ** . De plus,

$$S_{2n} \leq \ell \leq S_{2n+1}, \text{ d'amplitude } \frac{1}{2n+1}. \text{ Cette amplitude est inférieure à } \frac{1}{5} \text{ dès que } n = 3. \text{ On calcule } S_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{37}{60}, \text{ puis } S_7 = \frac{37}{60} + \frac{1}{7} = \frac{319}{420}.$$

$$\text{Ainsi } \frac{37}{60} \leq \ell \leq \frac{319}{420}.$$

La figure ci-dessous place les termes pairs sous la limite et les termes impairs au-dessus. On voit que l'encadrement se resserre, mais lentement : l'amplitude ne décroît qu'en $\frac{1}{2n+1}$.



Point de méthode : on peut montrer plus tard, avec l'intégrale, que $\ell = \ln 2$; l'encadrement obtenu est bien compatible avec $\ln 2 \approx 0,693$.

Corrigé de l'exercice 12 : Irrationalité de e

1. D'abord, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$: (u_n) est strictement croissante. Ensuite, réduisons au dénominateur $n(n+1)(n+1)!$. On a $\frac{1}{(n+1)!} = \frac{n(n+1)}{n(n+1)(n+1)!}$, puis $\frac{1}{(n+1)(n+1)!} = \frac{n}{n(n+1)(n+1)!}$, et $\frac{1}{n \cdot n!} = \frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$. Ainsi :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n^2 + n + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0.$$

Enfin, $v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} \rightarrow 0$. **Les suites sont adjacentes.**

2. La suite (u_n) croît strictement vers e . Donc $u_n < u_{n+1} \leq e$. De même, (v_n) décroît strictement vers e , donc $e \leq v_{n+1} < v_n$. **Ainsi $u_n < e < v_n$ pour tout $n \geq 1$.**

3. Supposons $e = \frac{p}{q}$. Au rang q , on a $u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q \cdot q!}$. On multiplie par $q \cdot q! > 0$:

$$q \cdot q! u_q < p \cdot q! < q \cdot q! u_q + 1.$$

Or $q! u_q = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}$ est une somme d'entiers. Donc $M = q \cdot q! u_q$ est un entier, et

$p \cdot q!$ aussi. **On obtient un entier strictement compris entre M et $M + 1$: c'est absurde.**

4. **Donc e est irrationnel.** Pour l'encadrement, on cherche n tel que $n \cdot n! > 1000$. Pour $n = 5$, $5 \times 120 = 600$ ne suffit pas. En revanche, pour $n = 6$, $6 \times 720 = 4320$ convient. On calcule $u_6 = \frac{720 + 720 + 360 + 120 + 30 + 6 + 1}{720} = \frac{1957}{720}$, puis $v_6 = \frac{1957}{720} + \frac{1}{4320} = \frac{11743}{4320}$. **Ainsi $\frac{1957}{720} < e < \frac{11743}{4320}$, soit $2,71805 < e < 2,71829$.**

Corrigé de l'exercice 13 : Divergence par les suites extraites

1. On a $a_{2p} = \frac{2p}{2p+1} \rightarrow 1$ et $a_{2p+1} = -\frac{2p+1}{2p+2} \rightarrow -1$. Si (a_n) convergeait, toutes ses suites extraites auraient la même limite. **Donc (a_n) diverge.**

2. On a $b_{6p} = \cos(2p\pi) = 1$ et $b_{6p+3} = \cos(2p\pi + \pi) = -1$. Ces deux suites extraites sont constantes, de valeurs différentes. **Donc (b_n) diverge.**

3. On a $c_{2p} = 4p \rightarrow +\infty$ et $c_{2p+1} = 0$. Ainsi (c_n) n'est pas bornée, donc elle diverge. Si elle tendait vers $+\infty$, toutes ses suites extraites tendraient vers $+\infty$, ce qui est faux pour (c_{2p+1}) . **La suite (c_n) diverge et ne tend pas vers $+\infty$.**

4. Notons ℓ_1 , ℓ_2 et ℓ_3 les limites de (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) . La suite (u_{6n}) est extraite de (u_{2n}) , car $6n = 2 \cdot 3n$. Elle est aussi extraite de (u_{3n}) , car $6n = 3 \cdot 2n$. Donc $\ell_1 = \ell_3$. De même, (u_{6n+3}) est extraite de (u_{2n+1}) , car $6n+3 = 2(3n+1) + 1$, et de (u_{3n}) , car $6n+3 = 3(2n+1)$. Donc $\ell_2 = \ell_3$. Ainsi $\ell_1 = \ell_2$. **Par la propriété des termes pairs et impairs, (u_n) converge.**

Corrigé de l'exercice 14 : La suite $(\sin n)$ diverge

1. Les suites $(\sin(n+1))$ et $(\sin(n-1))_{n \geq 1}$ sont des décalages de $(\sin n)$. Elles tendent donc aussi vers ℓ . Par conséquent, $\sin(n+1) - \sin(n-1) \rightarrow 0$. Or $\sin 1 \neq 0$, car $0 < 1 < \pi$. **Donc** $\cos n = \frac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{2 \sin 1} \rightarrow 0$.
2. D'une part, $(\sin(2n))$ est extraite de $(\sin n)$, donc elle tend vers ℓ . D'autre part, $\sin(2n) = 2 \sin n \cos n \rightarrow 2\ell \times 0 = 0$. **Par unicité de la limite**, $\ell = 0$.
3. On aurait alors $\sin^2 n + \cos^2 n \rightarrow 0 + 0 = 0$. Or cette quantité vaut 1 pour tout n . **C'est absurde : la suite $(\sin n)$ diverge.** Elle ne tend pas non plus vers $\pm\infty$, puisqu'elle est bornée.
4. La suite est bornée par 1. **D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite convergente.**

Corrigé de l'exercice 15 : Lemme des pics et Bolzano-Weierstrass

1. Les indices p_k forment une suite strictement croissante d'entiers : $k \rightarrow p_k$ est une extraction. Ensuite, p_k est un pic et $p_{k+1} > p_k$. Donc $u_{p_k} \geq u_{p_{k+1}}$. **La suite extraite (u_{p_k}) est décroissante.**
2. Posons $\varphi(0) = n_0$. Comme $\varphi(0) \geq n_0$, ce n'est pas un pic : il existe $m > \varphi(0)$ tel que $u_m > u_{\varphi(0)}$. On pose $\varphi(1) = m$. Ensuite, on itère : si $\varphi(k) \geq n_0$ est construit, ce n'est pas un pic, et on choisit $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ avec $u_{\varphi(k+1)} > u_{\varphi(k)}$. **On obtient une extraction φ telle que $(u_{\varphi(k)})$ est strictement croissante.**
3. Soit la suite possède une infinité de pics, soit elle en possède un nombre fini (éventuellement nul). Dans le premier cas, le 1 fournit une sous-suite décroissante. Dans le second, le 2 fournit une sous-suite croissante. **Toute suite réelle admet donc une suite extraite monotone.**
4. Soit (u_n) bornée par K . D'après le 3, elle admet une suite extraite monotone, elle aussi

bornée par K . Si elle est croissante, elle est majorée, donc elle converge. Si elle est décroissante, elle est minorée, donc elle converge aussi. **On retrouve le théorème de Bolzano-Weierstrass.**

5. Supposons (u_n) non majorée. Montrons d'abord que pour tout A et tout N , il existe $n \geq N$ tel que $u_n > A$. Sinon, on aurait $u_n \leq \max(A, u_0, \dots, u_{N-1})$ pour tout n , ce qui est exclu. On pose alors $\varphi(0) = 0$, puis on choisit $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ tel que $u_{\varphi(k+1)} > k+1$. Ainsi $u_{\varphi(k)} > k$ pour $k \geq 1$. **Par comparaison, $u_{\varphi(k)} \rightarrow +\infty$.**

Corrigé de l'exercice 16 : Suite arithmético-géométrique

1. L'équation $c = \frac{1}{2}c + 3$ équivaut à $\frac{1}{2}c = 3$. **Donc $c = 6$.**
2. On calcule $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, de premier terme $v_0 = -4$. **Donc $u_n = 6 - \frac{4}{2^n}$.**
3. La suite $\left(\frac{4}{2^n}\right)$ est strictement décroissante, donc (u_n) est strictement croissante. De plus, $\frac{4}{2^n} \rightarrow 0$. **La suite (u_n) croît strictement et converge vers 6.**
4. On somme la formule du 2 :

$$S_n = 6(n+1) - 4 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 6(n+1) - 4\left(2 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Donc $S_n = 6n - 2 + \frac{4}{2^n}$. Vérification : $S_1 = u_0 + u_1 = 2 + 4 = 6$, et la formule donne $6 - 2 + 2 = 6$.

Corrigé de l'exercice 17 : Récurrences linéaires d'ordre 2 à racines réelles

1. L'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$ a pour racines 2 et 3. Donc $u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$. Les conditions initiales donnent $\lambda + \mu = 1$ et $2\lambda + 3\mu = 4$, d'où

$\mu = 2$ et $\lambda = -1$. Ainsi $u_n = 2 \cdot 3^n - 2^n = 3^n \left(2 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$. Le facteur entre parenthèses tend vers 2. **Donc** $u_n = 2 \cdot 3^n - 2^n \rightarrow +\infty$.

2. L'équation $r^2 - 4r + 4 = 0$ a une racine double $r = 2$. Donc $v_n = (\lambda + \mu n) 2^n$. Ensuite, $v_0 = \lambda = 1$ et $v_1 = 2(1 + \mu) = 4$, d'où $\mu = 1$. Vérification : $v_2 = 4 \times 4 - 4 = 12 = 3 \times 4$. **Donc** $v_n = (n+1) 2^n \rightarrow +\infty$.

3. L'équation $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$ équivaut à $2r^2 - r - 1 = 0$, soit $(r-1)(2r+1) = 0$. Les racines sont 1 et $-\frac{1}{2}$. Donc $w_n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Les conditions $\lambda + \mu = 3$ et $\lambda - \frac{\mu}{2} = 0$ donnent $\mu = 2$ et $\lambda = 1$. Comme $\left| -\frac{1}{2} \right| < 1$, le second terme tend vers 0. **Donc** $w_n = 1 + 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 1$.

Corrigé de l'exercice 18 : Racines complexes et suite périodique

1. L'équation caractéristique est $r^2 - r + 1 = 0$, de discriminant -3 . **Ses racines sont** $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\pi/3}$.

2. D'après le cours, avec $\rho = 1$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$, on a $u_n = \lambda \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$. D'abord, $u_0 = \lambda = 1$. Ensuite, $u_1 = \frac{1}{2} + \mu \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$, donc $\mu = \sqrt{3}$. On factorise par 2 :

$$u_n = 2 \left(\frac{1}{2} \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{n\pi}{3} \right) = 2 \cos \left(\frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right).$$

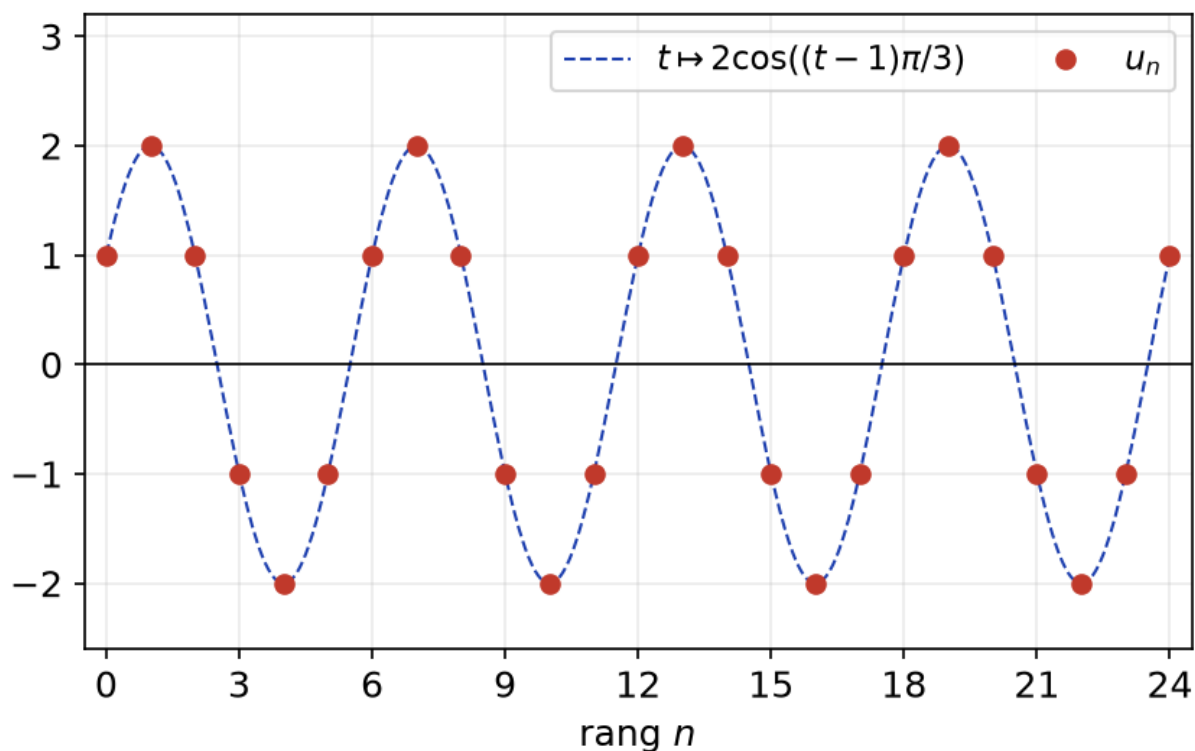
Ainsi $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{3}\right)$.

3. La fonction cosinus est 2π -périodique, et $\frac{(n+6-1)\pi}{3} = \frac{(n-1)\pi}{3} + 2\pi$. Donc $u_{n+6} = u_n$. On peut aussi le voir directement : $u_{n+3} = u_{n+2} - u_{n+1} = -u_n$, donc $u_{n+6} = u_n$. **Les six premiers termes sont** 1, 2, 1, -1, -2, -1.

4. Les suites extraites (u_{6p}) et (u_{6p+1}) sont constantes, égales à 1 et 2. **La suite** (u_n) **diverge**.

Comme le montre la figure ci-dessous, les termes se placent exactement sur la sinusoïde

$$t \rightarrow 2\cos\left(\frac{(t-1)\pi}{3}\right) \text{ et reviennent tous les six rangs.}$$



Corrigé de l'exercice 19 : Suite de Fibonacci et nombre d'or

1. Les réels φ et ψ sont les racines de $r^2 - r - 1 = 0$, équation caractéristique de la relation. Donc $F_n = \lambda \varphi^n + \mu \psi^n$. Ensuite, $F_0 = \lambda + \mu = 0$ et $F_1 = \lambda \varphi + \mu \psi = 1$. On obtient $\lambda(\varphi - \psi) = 1$, avec $\varphi - \psi = \sqrt{5}$. **Donc** $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, et

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

2. On a $\varphi > 1$, donc $\varphi^n \rightarrow +\infty$. De plus, $-1 < \psi < 0$, car $2 < \sqrt{5} < 3$. Donc $\psi^n \rightarrow 0$. **Par conséquent**, $F_n \rightarrow +\infty$.
3. Pour $n \geq 1$, on a $F_n \geq 1$. On divise numérateur et dénominateur par φ^n :

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi - \psi \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n}{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n}.$$

Comme $\left|\frac{\psi}{\varphi}\right| < 1$, les puissances tendent vers 0. **Donc** $\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \varphi$.

4. On a $\left|F_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{|\psi|^n}{\sqrt{5}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$, car $\sqrt{5} > 2$. L'entier F_n est donc à une distance strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ de $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$. Deux entiers distincts ne peuvent pas vérifier cette propriété simultanément. **Donc** F_n est l'entier le plus proche de $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$.

Corrigé de l'exercice 20 : Étude de $u(n+1) = \sqrt{2 + u(n)}$

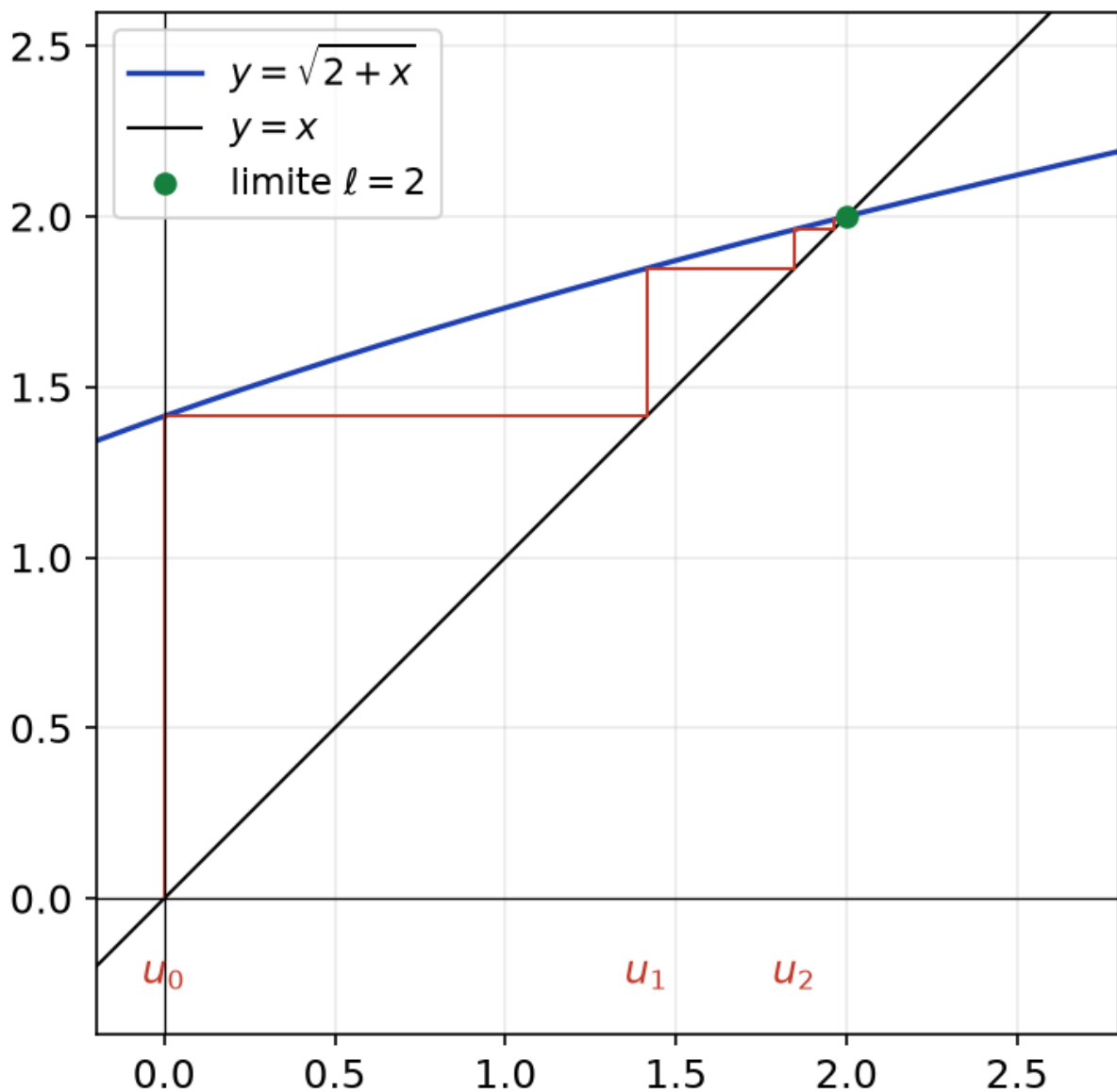
- La fonction f est croissante sur $[-2, +\infty[$. Pour $x \in [0, 2]$, on a donc $f(0) \leq f(x) \leq f(2)$, soit $\sqrt{2} \leq f(x) \leq 2$. Ainsi $f([0, 2]) \subset [0, 2]$. Ensuite, $u_0 = 0 \in [0, 2]$, et si $u_n \in [0, 2]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 2]$. **Par récurrence**, $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout n .
- On a $u_1 = \sqrt{2} \geq u_0 = 0$. Comme f est croissante sur l'intervalle stable $[0, 2]$, la propriété du cours s'applique. **La suite (u_n) est croissante.**
- La suite est croissante et majorée par 2. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers $\ell \in [0, 2]$. La fonction f est continue en ℓ , donc $\ell = \sqrt{2 + \ell}$. Ainsi $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, soit $(\ell - 2)(\ell + 1) = 0$. Or $\ell \geq 0$. **Donc** $u_n \rightarrow 2$.
- On multiplie par la quantité conjuguée :

$$u_{n+1} - 2 = \sqrt{2 + u_n} - 2 = \frac{u_n - 2}{\sqrt{2 + u_n} + 2}.$$

Comme $u_n \geq 0$, le dénominateur est supérieur à $2 + \sqrt{2} \geq 2$. Donc

$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$. Par récurrence, $|u_n - 2| \leq \frac{|u_0 - 2|}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Enfin, $\frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-6}$ équivaut à $2^{n-1} \geq 10^6$. Or $2^{19} = 524\,288$ et $2^{20} = 1\,048\,576$. **La majoration garantit** $|u_n - 2| \leq 10^{-6}$ pour tout $n \geq 21$. Ce rang est suffisant, mais pas forcément optimal.

La figure ci-dessous représente la construction en toile d'araignée. Les marches montent vers le point $(2, 2)$, ce qui confirme la croissance et la limite trouvées.



Corrigé de l'exercice 21 : Fonction décroissante et fraction continue

1. La fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Pour $x \in I$, on a donc

$f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$, soit $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{2}{3}$. Ainsi $f(I) \subset I$. Ensuite, on calcule les premiers termes. **On obtient** $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{2}{3}$ **et** $u_3 = \frac{3}{5}$.

2. L'équation $\ell = \frac{1}{1+\ell}$ équivaut à $\ell^2 + \ell - 1 = 0$. Ses racines sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Seule la racine positive appartient à I , car $\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq 1$ équivaut à $2 \leq \sqrt{5} \leq 3$. **Donc**
 $\ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3. Pour $x, y \in I$, on calcule :

$$f(x) - f(y) = \frac{(1+y) - (1+x)}{(1+x)(1+y)} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)}.$$

Or $(1+x)(1+y) \geq \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$. **Donc** $|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{9}|x - y|$.

4. Les termes u_n et le point fixe ℓ appartiennent à I . Donc

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{4}{9}|u_n - \ell|. \text{ Par récurrence,}$$

$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - \ell|. \text{ Comme } 0 < \frac{4}{9} < 1, \text{ le majorant tend vers } 0. \text{ **Donc**}$$

$$u_n \rightarrow \ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

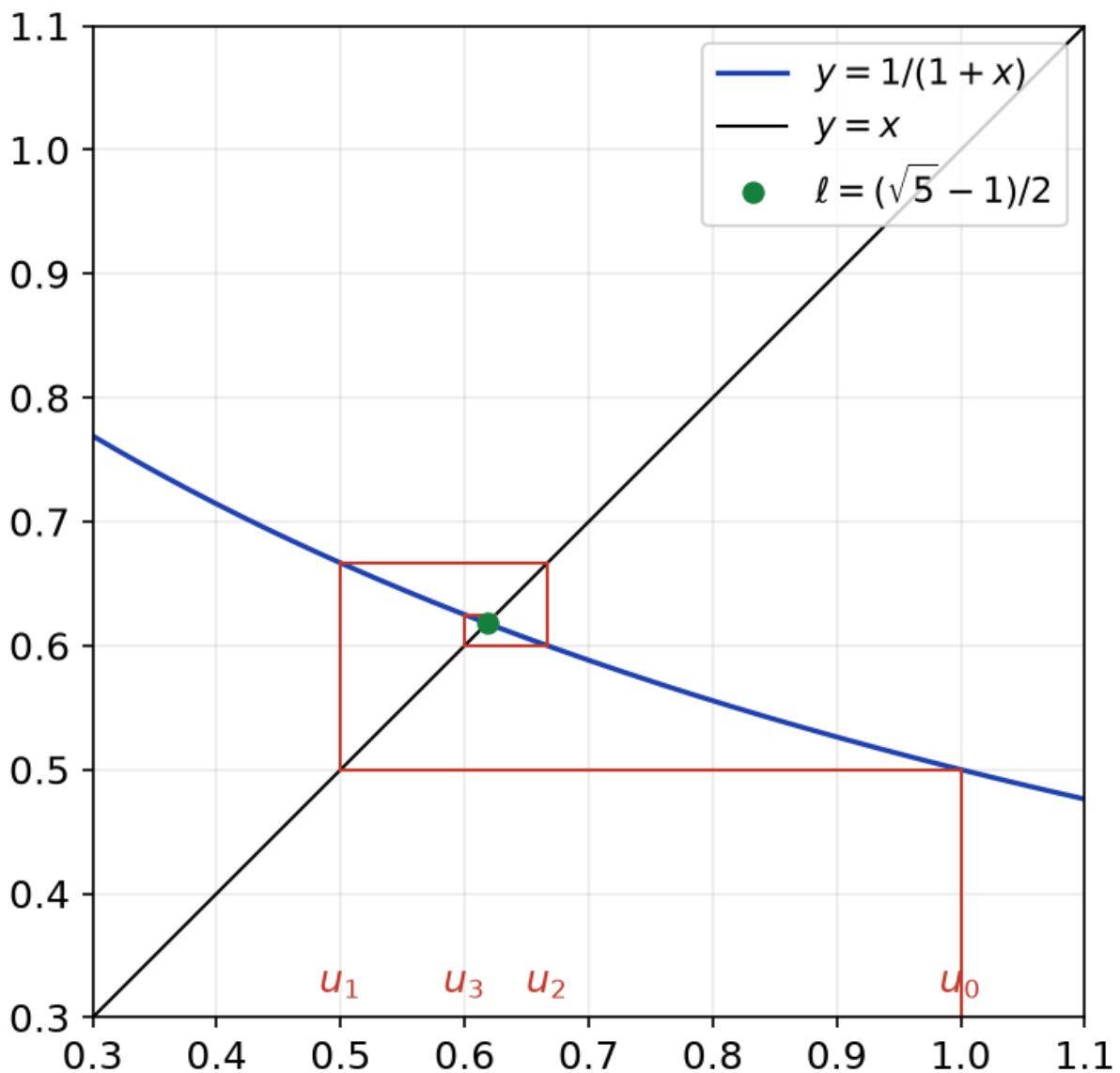
5. Au rang 0, on a $\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{1} = 1 = u_0$. Supposons $u_n = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+2} + F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+3}}.$$

Par conséquent, $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{\ell} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}$. **On retrouve**

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

La figure ci-dessous montre une toile d'araignée en forme de spirale, typique d'une fonction décroissante. Les termes de rang pair et de rang impair se placent de part et d'autre de ℓ .

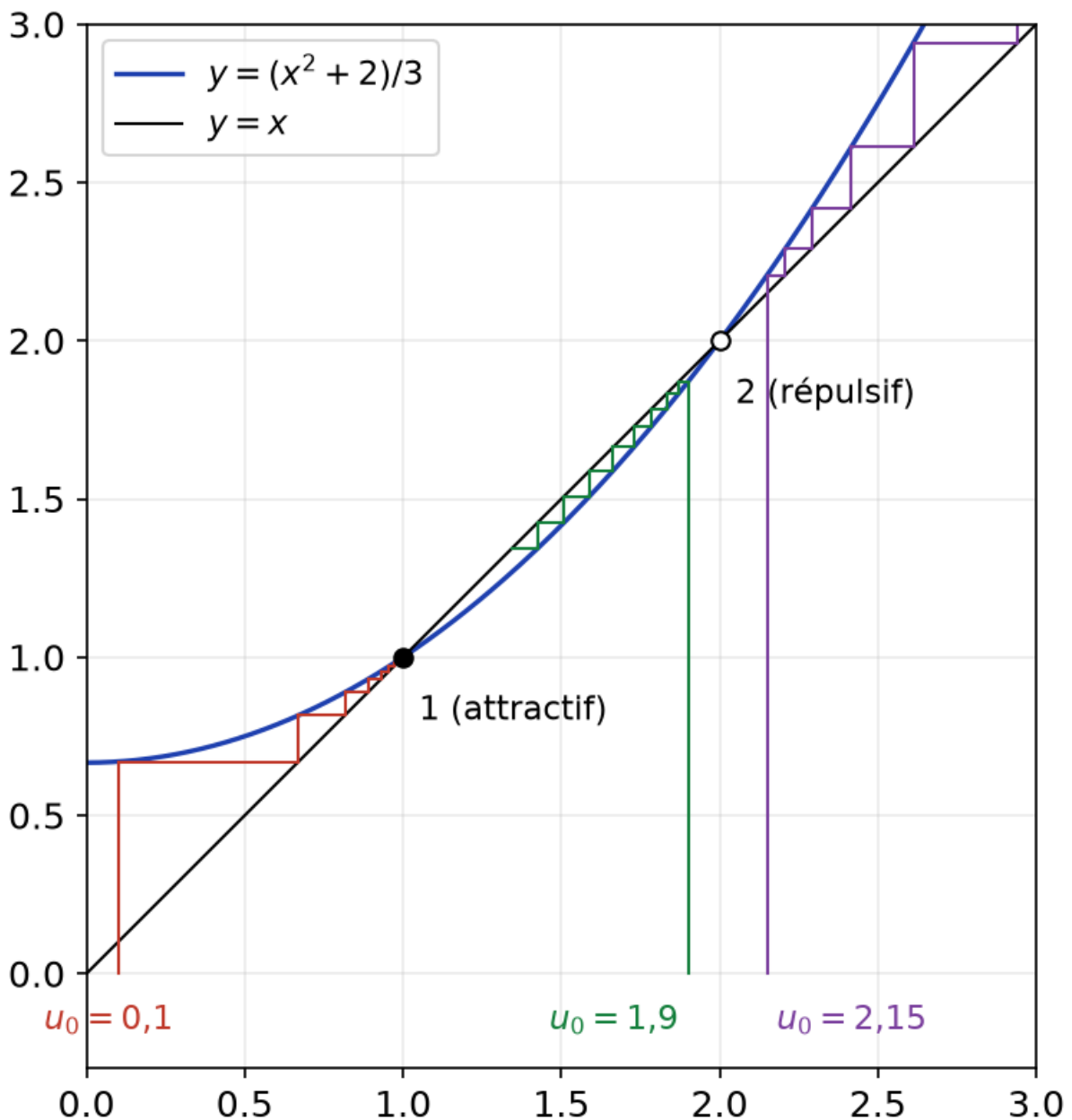


Corrigé de l'exercice 22 : Problème : discussion selon la valeur initiale

- On calcule $f(x) - x = \frac{x^2 - 3x + 2}{3} = \frac{(x-1)(x-2)}{3}$. **Les points fixes sont 1 et 2.**
De plus, $f(x) - x > 0$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]2, +\infty[$, et $f(x) - x < 0$ sur $]1, 2[$.
- On a $u_1 = \frac{a^2 + 2}{3} = \frac{|a|^2 + 2}{3} = f(|a|)$. Considérons la suite (u'_n) de premier terme $|a|$. Elle a le même terme de rang 1, donc elle coïncide avec (u_n) à partir du rang 1. **Les deux suites ont le même comportement : on suppose désormais $a \geq 0$.**

3. La fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$. Or $f(0) = \frac{2}{3}$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$. Donc $f([0, 1]) = [\frac{2}{3}, 1]$ et $f([1, 2]) = [1, 2]$. De plus, $f(x) \geq 2$ pour $x \geq 2$. **Les trois intervalles sont stables par f .**
4. Si $0 \leq a < 1$, tous les termes sont dans $[0, 1]$. Sur cet intervalle, $f(x) - x \geq 0$, donc $u_{n+1} \geq u_n$. La suite est croissante et majorée par 1. Elle converge donc vers un réel $\ell \in [0, 1]$, qui est un point fixe, par continuité de f . **Le seul point fixe dans $[0, 1]$ est 1 : la suite converge vers 1.**
5. Si $1 < a < 2$, les termes restent dans $[1, 2]$, où $f(x) - x \leq 0$. La suite est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers un point fixe ℓ . Or $\ell \leq u_0 = a < 2$. **Donc la suite converge vers 1.**
6. Si $a > 2$, les termes restent dans $[2, +\infty[$, où $f(x) - x \geq 0$. La suite est donc croissante. Supposons-la majorée. Elle convergerait alors vers un point fixe $\ell \geq u_0 = a > 2$, ce qui est impossible. Elle n'est donc pas majorée. **Par le théorème de la limite monotone,**
 $u_n \rightarrow +\infty$.
7. Il reste les cas $a = 1$ et $a = 2$: la suite est alors constante. Avec le 2, on obtient le bilan. **Si $|a| < 2$, la suite converge vers 1 ; si $|a| = 2$, elle est constante égale à 2 à partir du rang 1 ; si $|a| > 2$, elle tend vers $+\infty$.**
8. On calcule $f(x) - 1 = \frac{x^2 - 1}{3} = \frac{(x-1)(x+1)}{3}$. Pour $x \in [0, 1]$, on a $0 < \frac{x+1}{3} \leq \frac{2}{3}$. Comme $u_n \in [0, 1]$, on obtient $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{2}{3}|u_n - 1|$. Par récurrence, et puisque $|a - 1| \leq 1$: $|u_n - 1| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |a - 1| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

La figure ci-dessous réunit trois valeurs initiales. Partant de 0,1 ou de 1,9, les marches convergent vers le point fixe attractif 1. En revanche, partant de 2,15, elles s'éloignent de 2 et partent vers $+\infty$.



Point de méthode : le signe de $f(x) - x$ donne à lui seul la monotonie sur chaque intervalle stable ; c'est souvent plus rapide que le sens de variation de f .

Corrigé de l'exercice 23 : Problème : moyenne arithmético-géométrique

1. Au rang 0, on a $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$. Si $a_n > 0$ et $b_n > 0$, alors $a_n b_n > 0$, donc

$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ est défini et strictement positif. De même, $a_{n+1} > 0$. **Par récurrence, les deux suites sont bien définies et strictement positives.**

2. On développe le carré :

$$\frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 = \frac{a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n}{2} = a_{n+1} - b_{n+1}.$$

Cette quantité est positive. Donc $b_{n+1} \leq a_{n+1}$ pour tout n , et $b_0 < a_0$ par hypothèse. **Ainsi $b_n \leq a_n$ pour tout n .**

3. D'une part, $a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leq 0$. D'autre part, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n$, car $a_n \geq b_n$ et la racine est croissante. **La suite (a_n) est décroissante et (b_n) est croissante.**

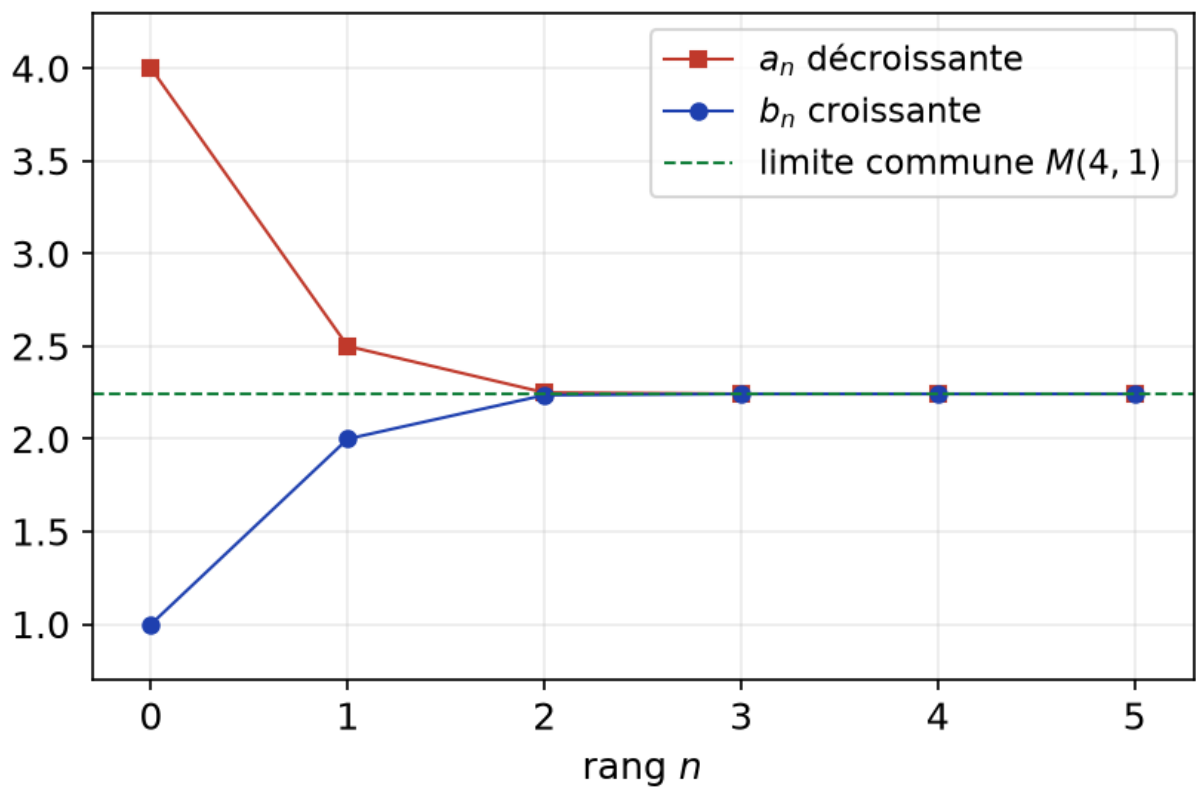
4. Posons $x = \sqrt{a_n}$ et $y = \sqrt{b_n}$, avec $x \geq y \geq 0$. Alors $0 \leq x - y \leq x + y$, donc $(x - y)^2 \leq (x - y)(x + y) = a_n - b_n$. Avec le 2, on obtient $0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a_n - b_n}{2}$. **Par récurrence, $0 \leq a_n - b_n \leq \frac{a_0 - b_0}{2^n}$.**

5. Le majorant $\frac{a_0 - b_0}{2^n}$ tend vers 0. Par les gendarmes, $a_n - b_n \rightarrow 0$. Avec le 3, **les suites sont adjacentes : elles convergent vers une même limite $M(a_0, b_0)$, avec $b_n \leq M(a_0, b_0) \leq a_n$.**

6. On calcule $a_1 = \frac{5}{2}$ et $b_1 = \sqrt{4} = 2$, puis $a_2 = \frac{9}{4}$ et $b_2 = \sqrt{5}$. D'après le 5, on a $b_2 \leq M(4, 1) \leq a_2$. **Donc $\sqrt{5} \leq M(4, 1) \leq \frac{9}{4}$, soit $2,236 \leq M(4, 1) \leq 2,25$.**

7. Notons (a'_n) et (b'_n) les suites associées à λa_0 et λb_0 . Par récurrence, $a'_n = \lambda a_n$ et $b'_n = \lambda b_n$. En effet, $\frac{\lambda a_n + \lambda b_n}{2} = \lambda a_{n+1}$, et $\sqrt{\lambda a_n \cdot \lambda b_n} = \lambda \sqrt{a_n b_n}$ car $\lambda > 0$. En passant à la limite, $M(\lambda a_0, \lambda b_0) = \lambda M(a_0, b_0)$.

La figure ci-dessous montre la convergence très rapide des deux suites pour $a_0 = 4$ et $b_0 = 1$. Dès le rang 3, elles sont presque confondues avec leur limite commune.



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [suites numériques, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur suites numériques](#)
- À maîtriser avant : [Nombres réels et borne supérieure](#), [Entiers naturels, récurrence et dénombrement](#)
- Chapitre précédent : [Nombres réels et borne supérieure](#)
- Chapitre suivant : [Limites et continuité des fonctions](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)

- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)