Suites et séries de fonctions

Exercice 1 : Convergence des puissances sur le segment de 0 à 1

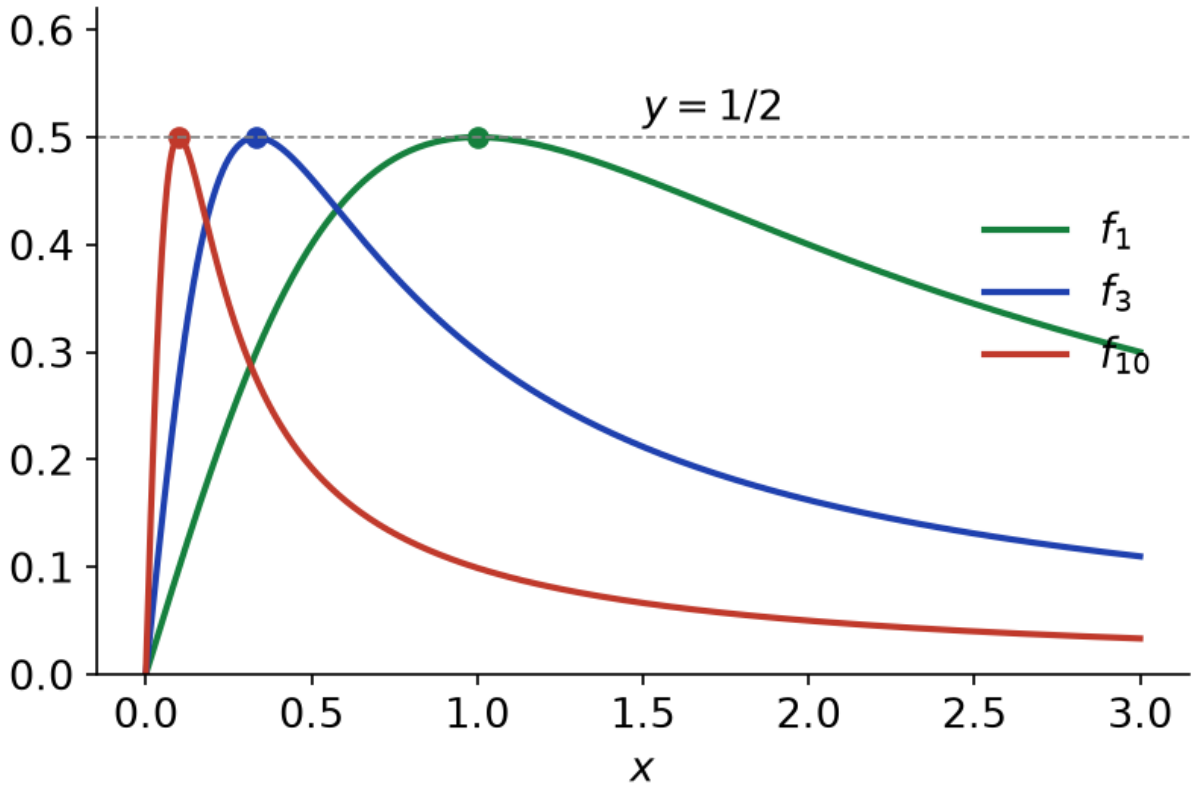
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = x^n$ et $g_n(x) = x^n(1-x)$.

1. Déterminez la limite simple f de (f_n) sur $[0,1]$.
2. La convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$? Sur $[0,1[$? Justifiez de deux façons différentes.
3. Soit $a \in]0,1[$. Montrez que (f_n) converge uniformément sur $[0,a]$.
4. Calculez $|g_n|_\infty$ sur $[0,1]$ et concluez sur la convergence uniforme de (g_n).

Exercice 2 : Une bosse qui se déplace vers l'origine

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. La figure ci-dessous représente quelques-unes de ces fonctions sur $[0,3]$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



1. Montrez que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
2. Calculez $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$, puis $|f_n|_\infty$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. Soit $a > 0$. Montrez que la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$.
4. Calculez $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et sa limite. Commentez.

Exercice 3 : Convergence uniforme sans convergence des dérivées

1. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$. Montrez que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.
2. Étudiez la suite $(f_n'(0))$, puis la suite $(f_n'(\pi))$. La suite (f_n') converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?

3. On pose maintenant $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$. Montrez que $0 \leq g_n(x) - |x| \leq \frac{1}{n}$ pour tout réel x.

4. Qu'en déduisez-vous sur la dérivabilité d'une limite uniforme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 4 : Produit de suites uniformément convergentes

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$.

1. Montrez que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $x \to x$.

2. Montrez que (f_n^2) converge simplement sur $\mathbb{R}$, mais pas uniformément.

3. Soit $A > 0$. Montrez que (f_n^2) converge uniformément sur $[-A, A]$.

4. Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions qui convergent uniformément sur I vers des fonctions *bornées* f et g. Montrez que $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg sur I.

Exercice 5 : Convergence normale de séries trigonométriques

1. Montrez que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme. Justifiez que S est continue, impaire et 2π -périodique.

2. Montrez que $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $T' = -S$.

3. Montrez que $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, puis que $U(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

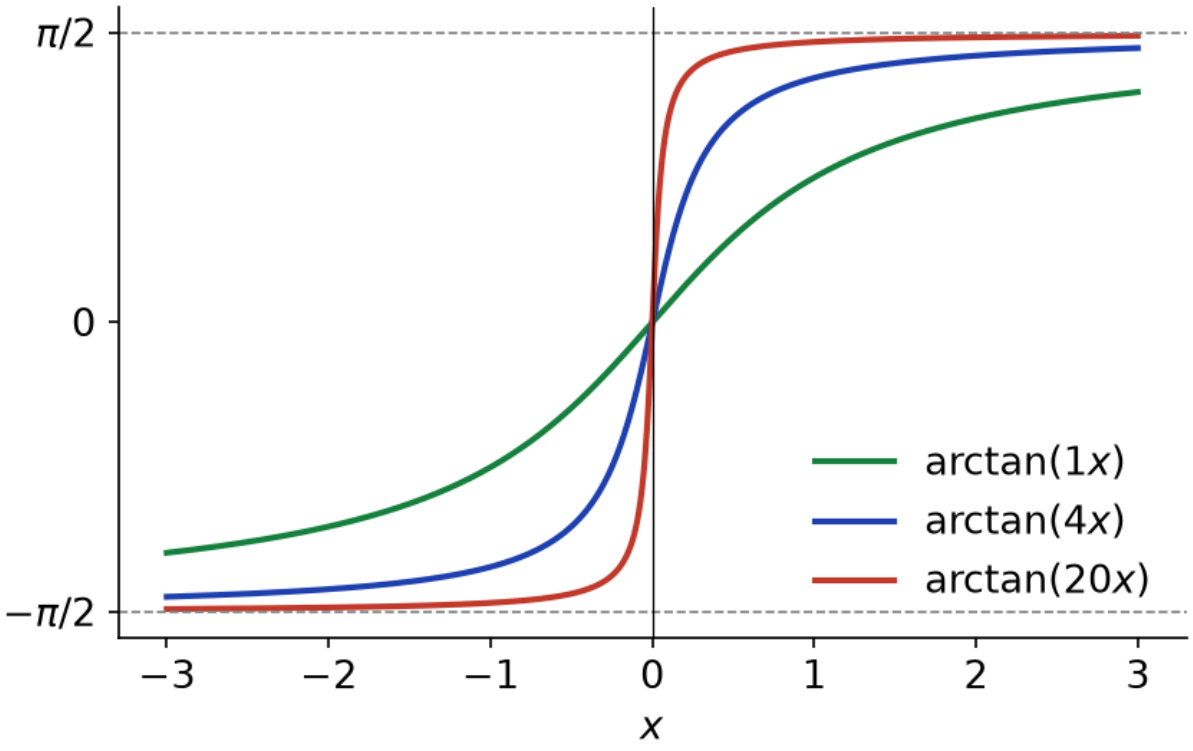
Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 6 : Continuité uniforme et théorème de Heine

1. Montrez que la fonction $x \to x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrez que, pour tous $x, y \geq 0$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$. En déduire que la racine carrée est uniformément continue sur $[0, +\infty[$, bien qu'elle ne soit pas lipschitzienne.
3. Montrez que la fonction sinus est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrez que $x \to \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$. Pourquoi ce résultat ne contredit-il pas le théorème de Heine ?

Exercice 7 : Limite discontinue de fonctions arctangente

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \arctan(nx)$. La figure ci-dessous montre ces courbes pour quelques valeurs de n.



1. Déterminez la limite simple f de (f_n) sur $\mathbb{R}$.

2. Sans calcul de norme, justifiez que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$. Retrouvez ce résultat en calculant $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. Soit $a > 0$. En utilisant l'identité $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$ pour $t > 0$, montrez que la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$.

Exercice 8 : Bosse glissante et interversion limite-intégrale

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = n^2 x (1-x)^n$ et $g_n(x) = n x (1-x)^n$.

1. Montrez que (f_n) et (g_n) convergent simplement vers 0 sur $[0,1]$.

2. Calculez $\int_0^1 x(1-x)^n \, dx$. En déduire $\lim \int_0^1 f_n$ et $\lim \int_0^1 g_n$.

3. La convergence de (f_n) est-elle uniforme sur $[0,1]$?

4. Calculez $|g_n|_\infty$ et sa limite. La convergence uniforme est-elle nécessaire pour intervertir limite et intégrale ?

Exercice 9 : Limite d'une suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

1. Déterminez la limite simple de $h_n : x \to \frac{1}{1+x^n}$ sur $[0,1]$. La convergence est-elle uniforme ?

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

2. Montrez que $0 \leq 1 - I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Quelle est la limite de (I_n) ?

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrez que $1 - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.

4. En déduire que $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 10 : Deux séries de fonctions sur le segment de 0 à 1

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $u_n(x) = x^n(1-x)$ et $v_n(x) = x^n(1-x)^2$.

1. Calculez les sommes partielles de $\sum u_n$, puis sa somme S. La série converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

2. Calculez $|u_n|_\infty$ et donnez-en un équivalent. La série $\sum u_n$ converge-t-elle normalement ?

3. Montrez que $\sum v_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

4. Calculez la somme de $\sum v_n$ et vérifiez qu'elle est bien continue sur $[0,1]$.

Exercice 11 : Une série alternée de fonctions

Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrez que $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et que son reste vérifie $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$. On note S sa somme.

2. Montrez que la convergence est uniforme, mais pas normale, sur $[0, +\infty[$.

3. Justifiez que S est continue sur $[0, +\infty[$ et déterminez $\lim_{x \to +\infty} S(x)$.

4. Montrez que S est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

5. Montrez que $S(x) + S(x+1) = -\frac{1}{x+1}$ pour tout $x \geq 0$. En déduire un encadrement de $S(x)$, puis un équivalent de $S(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 12 : Critère de Cauchy uniforme et prolongement au bord

1. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ qui converge uniformément sur $[0,1[$. Montrez, à l'aide du critère de Cauchy uniforme, que la suite $(f_n(1))$ converge et que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1[$.

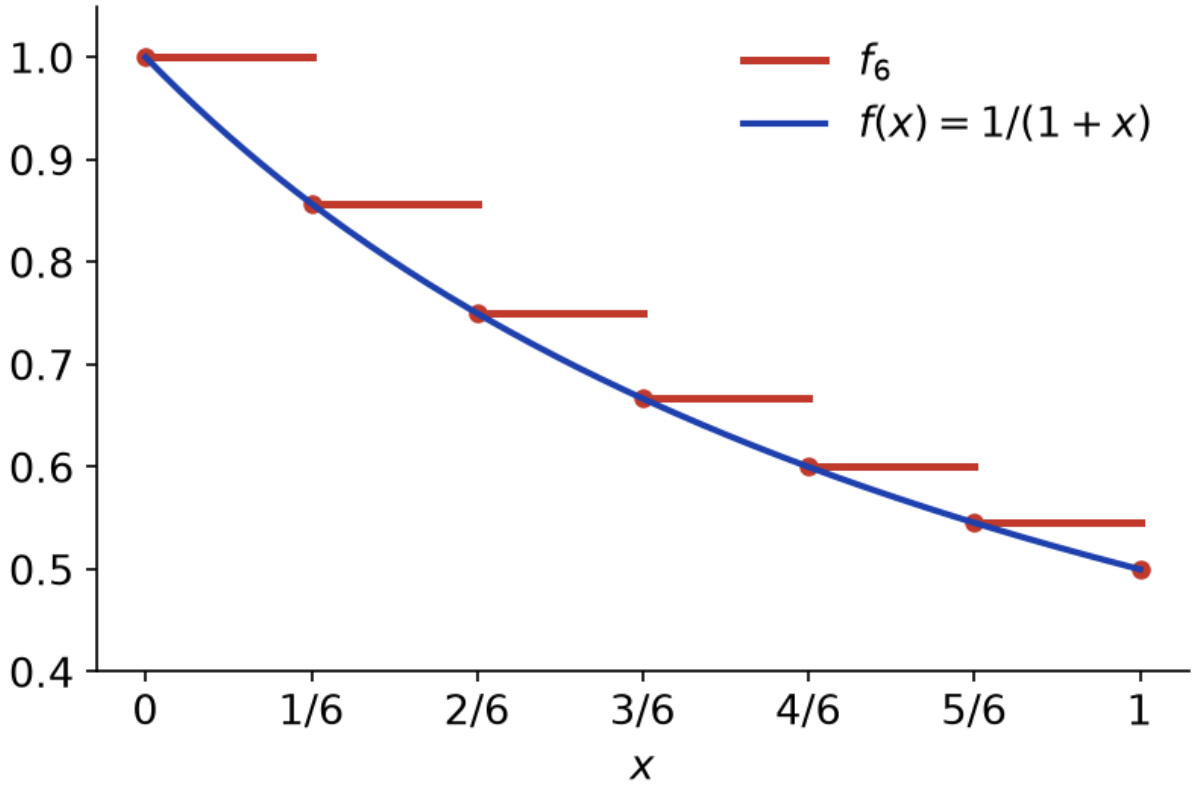
3. Retrouvez ce résultat directement : minorez $\sup_{x \in [0,1[} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x^k}{k}$ et concluez avec le critère de Cauchy uniforme.

4. Montrez en revanche que $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge normalement sur $[-1,1]$.

Exercice 13 : Fonctions en escalier et sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)$. La figure ci-dessous représente f_6 pour $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



1. Montrez que $\left| x - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $x \in [0,1]$.
2. À l'aide du théorème de Heine, montrez que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. Calculez $\int_0^1 f_n$ et en déduire que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f$.
4. Application : déterminez $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$.

Exercice 14 : La fonction zêta de Riemann

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$.

1. Déterminez l'ensemble D des réels x pour lesquels la série converge. On note $\zeta(x)$ sa somme.
2. Montrez que la série converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$. En déduire que ζ est continue sur D.
3. Montrez que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D, et qu'elle y est strictement décroissante.
4. Déterminez $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x)$.
5. Montrez que $\zeta(x) \geq \frac{1}{x-1}$ pour $x > 1$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $]1,2]$.

Exercice 15 : Somme d'une série par dérivation terme à terme

Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$.

1. Montrez que $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
2. Montrez que la somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculez $S'(x)$ sous forme simple.
3. Déterminez $\lim_{x \to +\infty} S(x)$.
4. En déduire que $S(x) = -\ln(1 - e^{-x})$ pour tout $x > 0$, puis calculez $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 2^n}$.

Exercice 16 : Série de l'arctangente et valeur de π/4

1. Soit $x \in [0,1[$. En intégrant terme à terme une série géométrique sur $[0,x]$, montrez que $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1}$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

2. On pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $x \in [0,1]$. Montrez que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

3. En déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

4. La série $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,1]$?

Exercice 17 : Moments nuls et théorème de Weierstrass

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles.

1. On suppose que $\int_0^1 f(x)\, x^n \, dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrez que $\int_0^1 f\, P = 0$ pour tout polynôme P.

2. Soit (P_k) une suite de polynômes qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Montrez que $\int_0^1 f\, P_k \to \int_0^1 f^2$.

3. En déduire que f est la fonction nulle.

4. Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $P(0) = f(0)$ et $|f - P|_\infty \leq \varepsilon$ sur $[0,1]$.

Exercice 18 : Limite uniforme de polynômes sur la droite réelle

1. Montrez qu'une fonction polynomiale bornée sur $\mathbb{R}$ est constante.

2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrez qu'il existe un rang N tel que $P_n - P_N$ soit constante pour tout $n \geq N$.

3. En déduire que f est une fonction polynomiale.

4. Montrez que les polynômes $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ convergent uniformément vers $\exp$ sur $[0,1]$, avec $|\exp - Q_n|_\infty \leq \frac{e}{(n+1)!}$.

5. La fonction exponentielle est-elle limite uniforme de polynômes sur $\mathbb{R}$?

Exercice 19 : Approximation explicite de la valeur absolue par des polynômes

On définit une suite de fonctions polynomiales sur $[0,1]$ par $P_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - P_n(t)^2\right).$$

1. Calculez P_1 et P_2.

2. Montrez par récurrence que, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq P_n(t) \leq P_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$. On pourra factoriser $\sqrt{t} - P_{n+1}(t)$.

3. Montrez que $0 \leq \sqrt{t} - P_n(t) \leq \sqrt{t}\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right)^n$.

4. Étudiez $\varphi_n(u) = u\left(1 - \frac{u}{2}\right)^n$ sur $[0,1]$ et en déduire que $|\cdot - P_n|_\infty \leq \frac{2}{n+1}$ sur $[0,1]$.

5. En déduire une suite explicite de polynômes qui converge uniformément vers $x \to |x|$ sur $[-1,1]$.

Exercice 20 : Problème, étude d'une fonction définie par une série

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$, et l'on étudie $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

Partie A : domaine et régularité.

1. Montrez que la série converge si et seulement si $x > 0$. On pourra comparer $u_n(x)$ à $\frac{1}{n^2}$.
2. Montrez que la série converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. En déduire que S est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrez que S est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Partie B : comportement en l'infini.

1. Montrez que $e^x\, S(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-x(\sqrt{n}-1)}$, puis que cette série converge normalement sur $[1, +\infty[$.
2. En déduire que $S(x) \sim e^{-x}$ quand $x \to +\infty$.

Partie C : comportement en 0.

1. Soit $x > 0$. Justifiez l'encadrement $\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq S(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
2. À l'aide du changement de variable $t = u^2$, calculez ces deux intégrales.
3. En déduire que $S(x) \sim \frac{2}{x^2}$ quand $x \to 0^+$.
4. La série converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$? Justifiez de deux façons.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : suites et séries de fonctions, cours de maths en L2
- À maîtriser avant : Séries à termes quelconques
- Chapitre précédent : Variables aléatoires discrètes
- Chapitre suivant : Séries entières
- Tester vos connaissances : QCM de maths en L2 par chapitre
- Le sommaire : tous les chapitres de maths de L2 et la licence de maths de L1 à L3

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.