

Suites et séries de fonctions

Corrigé de l'exercice 1 : Convergence des puissances sur le segment de 0 à 1

1. Pour $0 \leq x < 1$, la suite géométrique (x^n) tend vers 0. Pour $x = 1$, on a $f_n(1) = 1$ pour tout n . **La limite simple est f , nulle sur $[0,1[$ et telle que $f(1) = 1$.**
2. Première méthode : chaque f_n est continue sur $[0,1]$, mais f est discontinue en 1. Or une limite uniforme de fonctions continues est continue. Donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
Seconde méthode : posons $x_n = 2^{-1/n} \in [0,1[$. Alors $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2}$, donc $\sup_{[0,1[} |f_n - f| \geq \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0. Cette seconde méthode s'applique aussi sur $[0,1[$, où la limite est pourtant continue. **La convergence n'est uniforme ni sur $[0,1]$ ni sur $[0,1[$.**
3. Pour $x \in [0, a]$, on a $0 \leq x^n \leq a^n$. Ainsi, $\sup_{[0,a]} |f_n - 0| = a^n$, qui tend vers 0 car $0 < a < 1$. **La convergence est uniforme sur $[0, a]$.**
4. La fonction g_n est positive et dérivable, avec $g'_n(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x)$ pour $n \geq 1$. Elle croît donc sur $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ et décroît ensuite. Par conséquent :
$$|g_n|_{\infty} = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$
Ainsi $|g_n|_{\infty} \rightarrow 0$: (g_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$. Le facteur $1-x$ « écrase » la remontée de x^n près de 1.

Corrigé de l'exercice 2 : Une bosse qui se déplace vers l'origine

1. D'abord, $f_n(0) = 0$. Ensuite, pour $x \neq 0$, on a $f_n(x) \sim \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx}$, qui tend vers 0.

La suite converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

2. On calcule $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. De plus, l'inégalité $2|nx| \leq 1 + n^2x^2$, qui équivaut à $(|nx| - 1)^2 \geq 0$, donne $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2}$. **Donc $|f_n|_\infty = \frac{1}{2}$ et la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.**

3. La dérivée vaut $f'_n(x) = \frac{n(1 - n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)^2}$. Ainsi, f_n est positive et décroissante sur $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$.
Soit $n \geq \frac{1}{a}$, de sorte que $\frac{1}{n} \leq a$. Alors, sur $[a, +\infty[$:

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(a) = \frac{na}{1 + n^2a^2} \leq \frac{na}{n^2a^2} = \frac{1}{na}.$$

Ce majorant ne dépend pas de x et tend vers 0 : la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$. La figure de l'énoncé l'explique : le maximum $\frac{1}{2}$ se déplace vers 0 et finit par sortir de $[a, +\infty[$.

4. Une primitive de f_n est $x \mapsto \frac{1}{2n} \ln(1 + n^2x^2)$. Donc $\int_0^1 f_n = \frac{\ln(1+n^2)}{2n}$. Or

$$\ln(1+n^2) \sim 2\ln n, \text{ d'où } \int_0^1 f_n \sim \frac{\ln n}{n}. \text{ Ainsi } \int_0^1 f_n \rightarrow 0 = \int_0^1 \lim f_n.$$

L'interversion est vraie ici, bien que la convergence ne soit pas uniforme sur $[0,1]$. La convergence uniforme est donc une condition suffisante, mais pas nécessaire.

Corrigé de l'exercice 3 : Convergence uniforme sans convergence des dérivées

1. Pour tout réel x , $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$, avec égalité en $x = \frac{\pi}{2n}$. **Donc $|f_n|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$: la convergence vers 0 est uniforme sur $\mathbb{R}$.**

2. On a $f'_n(x) = \cos(nx)$. Ainsi, $f'_n(0) = 1$ pour tout n , alors que la limite $f = 0$ vérifie $f'(0) = 0$. De plus, $f'_n(\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$, suite divergente. **La suite (f'_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.**

3. Comme $g_n(x) \geq \sqrt{x^2} = |x|$, la différence est positive. En multipliant par la quantité conjuguée :

$$g_n(x) - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{g_n(x) + |x|} = \frac{1/n^2}{g_n(x) + |x|} \leq \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n},$$

car $g_n(x) \geq \frac{1}{n}$. **Donc $0 \leq g_n(x) - |x| \leq \frac{1}{n}$, et $g_n \rightarrow |\cdot|$ uniformément sur $\mathbb{R}$.**

4. Chaque g_n est de classe $\mathcal{C}^1$, car $x^2 + \frac{1}{n^2} > 0$. Pourtant, la limite uniforme $|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0 . **Une limite uniforme de fonctions $\mathcal{C}^1$ n'est pas forcément dérivable : il faut contrôler les dérivées.**

Point de méthode : le théorème de dérivation porte sur la convergence uniforme de (f'_n) , jamais sur celle de (f_n) seule.

Corrigé de l'exercice 4 : Produit de suites uniformément convergentes

1. Pour tout x , $|f_n(x) - x| = \frac{1}{n}$. **Donc $|f_n - \text{id}|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$: convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.**

2. Pour x fixé, $f_n(x)^2 \rightarrow x^2$ par produit de limites. En revanche, $f_n(x)^2 - x^2 = \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$. En $x = n$, cette différence vaut $2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$. **Ainsi (f_n^2) converge simplement vers $x \rightarrow x^2$, mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$.**

3. Pour $|x| \leq A$, on a $|f_n(x)^2 - x^2| \leq \frac{2A}{n} + \frac{1}{n^2}$. **Ce majorant est indépendant de x et tend vers 0 : la convergence est uniforme sur $[-A, A]$.**

4. Écrivons $f_n g_n - fg = f_n(g_n - g) + (f_n - f)g$. D'abord, il existe N tel que $|f_n - f|_\infty \leq 1$ pour $n \geq N$. Donc $|f_n|_\infty \leq |f|_\infty + 1$. Ensuite, pour $n \geq N$ et tout $x \in I$:

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leq (|f|_\infty + 1) |g_n - g|_\infty + |g|_\infty |f_n - f|_\infty.$$

Le majorant tend vers 0, donc $f_n g_n \rightarrow fg$ uniformément sur I . La question 2 montre que l'hypothèse « bornées » ne peut pas être supprimée : $x \rightarrow x$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 5 : Convergence normale de séries trigonométriques

1. Pour tout x , $\left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. **La série converge donc normalement sur $\mathbb{R}$.** Chaque terme est continu, et la convergence normale entraîne la convergence uniforme. Par conséquent, **S est continue sur $\mathbb{R}$.** Enfin, chaque terme est impair et 2π -périodique, et ces propriétés passent à la somme d'une série simplement convergente. **S est impaire et 2π -périodique.**
2. Posons $w_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^3}$. Chaque w_n est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $w'_n(x) = -\frac{\sin(nx)}{n^2}$. D'une part, $|w_n|_\infty = \frac{1}{n^3}$: la série $\sum w_n$ converge simplement. D'autre part, $|w'_n|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$: la série des dérivées converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de dérivation terme à terme, **T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $T' = -\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2} = -S$.**
3. Pour tout réel x , $0 < \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}$. La série converge donc normalement sur $\mathbb{R}$, et **U est continue sur $\mathbb{R}$.** Ensuite, pour chaque n , $\frac{1}{n^2 + x^2} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. La convergence étant uniforme sur $\mathbb{R}$, le théorème de la double limite s'applique. **Ainsi $U(x) \rightarrow \sum_{n \geq 1} 0 = 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.**

Corrigé de l'exercice 6 : Continuité uniforme et théorème de Heine

1. Posons $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{1}{n}$. Alors $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, mais

$y_n^2 - x_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$. Supposons la fonction uniformément continue, et prenons $\varepsilon = 1$. Le δ associé vérifierait $\frac{1}{n} \leq \delta$ pour n grand, donc $|y_n^2 - x_n^2| \leq 1$: c'est absurde. **La fonction carré n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.**

- Par symétrie, supposons $x \geq y \geq 0$. L'inégalité voulue s'écrit $\sqrt{x} \leq \sqrt{y} + \sqrt{x-y}$. Les deux membres sont positifs. On peut donc comparer leurs carrés : $x \leq y + (x-y) + 2\sqrt{y(x-y)}$, ce qui est vrai. Soit alors $\varepsilon > 0$ et $\delta = \varepsilon^2$. Si $|x - y| \leq \delta$, on obtient $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{\delta} = \varepsilon$. **La racine carrée est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.** Elle n'est cependant pas lipschitzienne, car $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas borné quand $x \rightarrow 0^+$.
- D'après l'inégalité des accroissements finis, $|\sin x - \sin y| \leq \sup |\cos| \cdot |x - y| \leq |x - y|$. **Le sinus est 1-lipschitzien, donc uniformément continu sur $\mathbb{R}$** (prendre $\delta = \varepsilon$).
- Posons, pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$ et $y_n = \frac{1}{2n\pi}$. Ces points sont dans $]0,1]$, et $|x_n - y_n| \rightarrow 0$. Cependant, $\sin \frac{1}{x_n} = 1$ et $\sin \frac{1}{y_n} = 0$. Comme en question 1, aucun δ ne convient pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$. **La fonction n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.** Il n'y a pas de contradiction avec le théorème de Heine : $]0,1]$ n'est pas un segment, et la fonction n'a pas de prolongement continu en 0 .

Corrigé de l'exercice 7 : Limite discontinue de fonctions arctangente

- Si $x > 0$, $nx \rightarrow +\infty$, donc $f_n(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Si $x < 0$, de même $f_n(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$. Enfin $f_n(0) = 0$. **La limite simple vaut $f(x) = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$.**
- Les f_n sont continues, mais f est discontinue en 0 . Or une limite uniforme de fonctions continues est continue. Par conséquent, la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$. Par le calcul, $f_n(\frac{1}{n}) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, tandis que $f(\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{2}$. **Donc $|f_n - f|_\infty \geq \frac{\pi}{4}$: pas de convergence uniforme.**
- Pour $x \geq a > 0$ et $n \geq 1$, on a $nx > 0$. L'identité rappelée donne $\frac{\pi}{2} - \arctan(nx) = \arctan \frac{1}{nx}$. Comme $\arctan$ est croissante et $\frac{1}{nx} \leq \frac{1}{na}$:

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \arctan \frac{1}{na}.$$

Ce majorant ne dépend pas de x et tend vers 0 : la convergence est uniforme sur

$[a, +\infty[$. Par imparité, elle l'est aussi sur $]-\infty, -a]$.

Corrigé de l'exercice 8 : Bosse glissante et interversion limite-intégrale

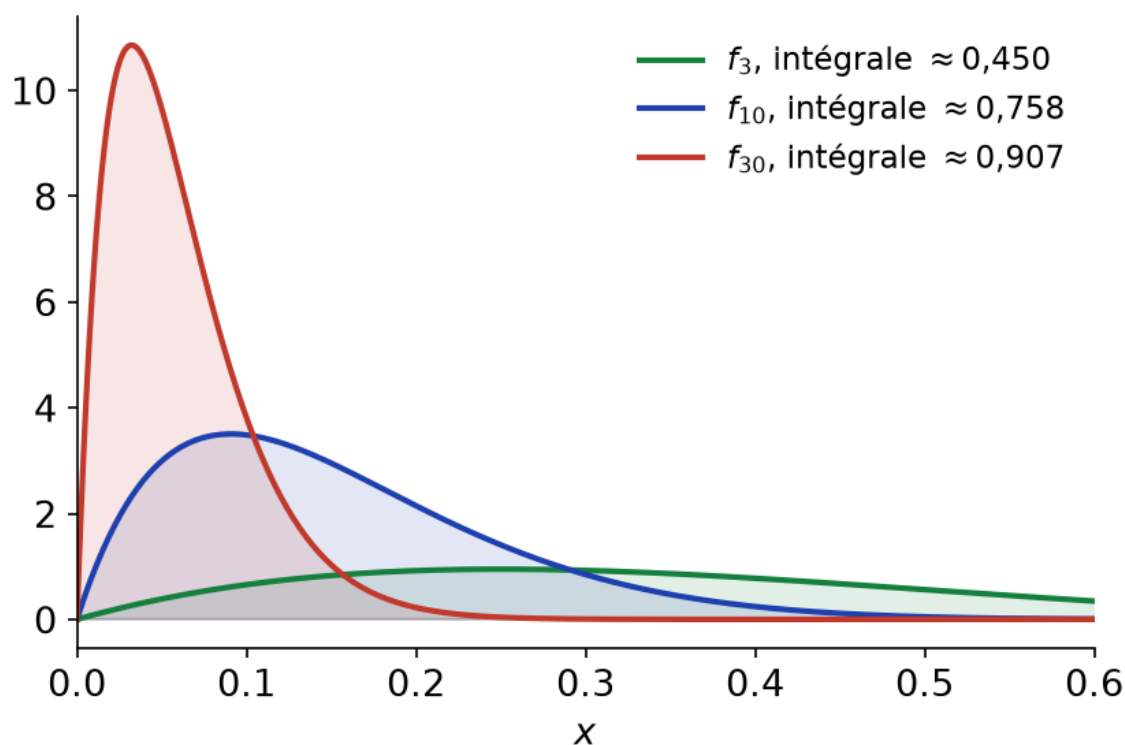
1. En 0 et en 1, f_n et g_n s'annulent. Pour $x \in]0,1[$, posons $q = 1 - x \in]0,1[$. Par croissances comparées, $n^2 q^n \rightarrow 0$, donc $f_n(x) = x n^2 q^n \rightarrow 0$, et de même $g_n(x) \rightarrow 0$. **Les deux suites convergent simplement vers 0 sur $[0,1]$.**

2. Le changement de variable $u = 1 - x$ donne

$$\int_0^1 x(1-x)^n dx = \int_0^1 (1-u)u^n du = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Ainsi $\int_0^1 f_n = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 1$ **et** $\int_0^1 g_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 0$.

3. Si (f_n) convergeait uniformément vers 0 sur le segment $[0,1]$, le théorème d'intégration donnerait $\int_0^1 f_n \rightarrow 0$. Or cette limite vaut 1. **La convergence de (f_n) n'est donc pas uniforme.** La figure ci-dessous montre des bosses de plus en plus hautes et étroites dont l'aire s'approche de 1.



4. On a $g'_n(x) = n(1-x)^{n-1}(1 - (n+1)x)$. Le maximum est atteint en $\frac{1}{n+1}$:

$$|g_n|_{\infty} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \left[n \rightarrow \infty \right] \frac{1}{e}.$$

Ainsi (g_n) ne converge pas uniformément, et pourtant $\int_0^1 g_n \rightarrow 0 = \int_0^1 \lim g_n$. La

convergence uniforme n'est donc pas nécessaire pour intervertir. En revanche, l'exemple de (f_n) prouve qu'on ne peut pas s'en passer sans autre argument.

Corrigé de l'exercice 9 : Limite d'une suite d'intégrales

- Pour $0 \leq x < 1$, $x^n \rightarrow 0$, donc $h_n(x) \rightarrow 1$. En 1 , $h_n(1) = \frac{1}{2}$. La limite, discontinue en 1 , n'est pas une limite uniforme de fonctions continues. **La convergence simple n'est pas uniforme sur $[0,1]$.**

2. On écrit $1 - I_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right) dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$. Pour $x \in [0,1]$, on a

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n. \text{ Par croissance de l'intégrale, } 0 \leq 1 - I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}. \text{ Donc } I_n \rightarrow 1.$$

3. Pour $n \geq 1$, écrivons $\frac{x^n}{1+x^n} = x \cdot \frac{x^{n-1}}{1+x^n}$. Posons $u(x) = x$ et $v(x) = \frac{1}{n} \ln(1+x^n)$, de sorte que $v'(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^n}$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. L'intégration par parties donne :

$$1 - I_n = \left[\frac{x \ln(1+x^n)}{n} \right]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx.$$

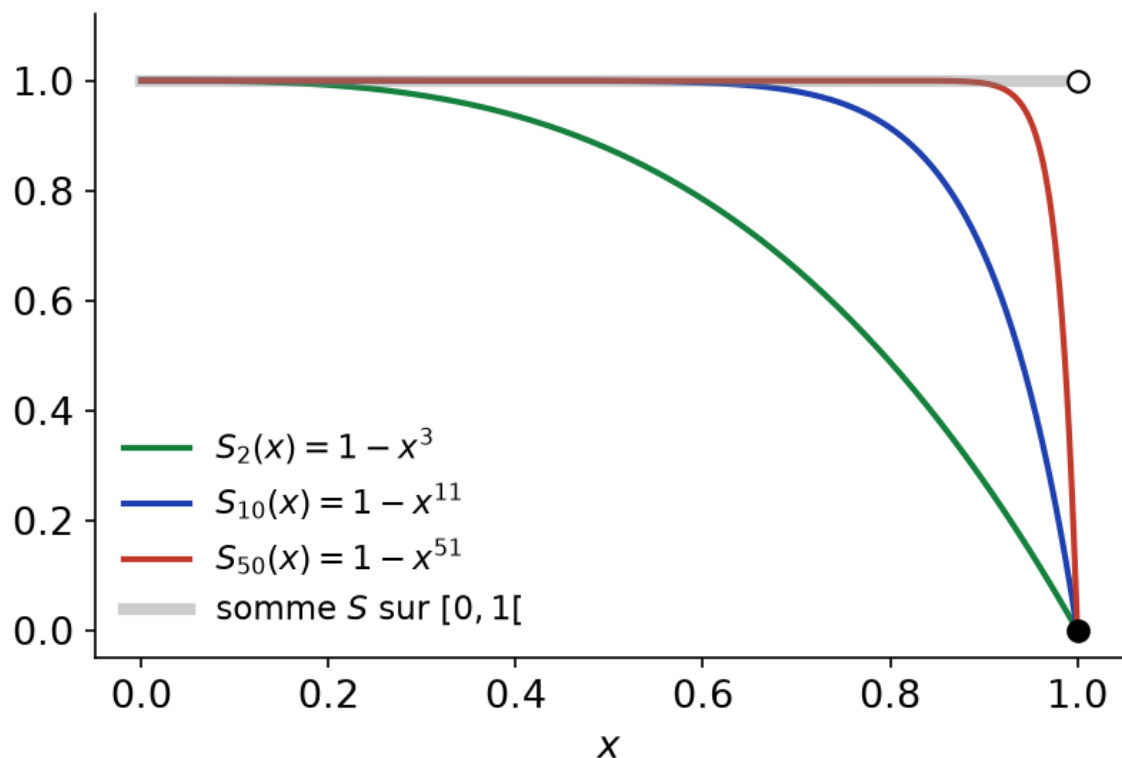
C'est la formule demandée.

4. Pour $y \geq 0$, on sait que $0 \leq \ln(1+y) \leq y$. Ainsi $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \frac{1}{n+1}$, qui tend vers 0. Le dernier terme est donc un $o\left(\frac{1}{n}\right)$. **Finalement**, $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Point de méthode : sans convergence uniforme, une majoration directe de $\left| \int (f_n - f) \right|$ suffit souvent ; ici, l'écart x^n est intégrable et petit en moyenne.

Corrigé de l'exercice 10 : Deux séries de fonctions sur le segment de 0 à 1

1. Pour $x \in [0,1[$, la somme géométrique donne $S_N(x) = (1-x) \sum_{n=0}^N x^n = 1 - x^{N+1}$. En $x = 1$, tous les termes sont nuls, donc $S_N(1) = 0$. **La somme vaut $S(x) = 1$ sur $[0,1[$ et $S(1) = 0$.** Les u_n sont continues, mais S est discontinue en 1. **La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0,1]$.** La figure ci-dessous montre les sommes partielles $1 - x^{N+1}$, qui plongent toujours jusqu'à 0 en $x = 1$.



2. L'étude de l'exercice 1 donne $|u_n|_\infty = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$, formule encore valable pour $n = 0$. Or $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow e^{-1}$. Ainsi $|u_n|_\infty \sim \frac{1}{en}$, **terme général d'une série divergente : pas de convergence normale**. Ce résultat était prévisible, puisque la convergence normale entraînerait la convergence uniforme.

3. Pour $n \geq 1$, $v'_n(x) = x^{n-1}(1-x)(n(1-x) - 2x)$, qui s'annule en $\frac{n}{n+2}$. Donc

$$|v_n|_\infty = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n \frac{4}{(n+2)^2} \leq \frac{4}{(n+2)^2}.$$

La série $\sum \frac{4}{(n+2)^2}$ converge, donc $\sum v_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

4. Pour $x \in [0, 1[$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)^2 = \frac{(1-x)^2}{1-x} = 1-x$. En $x = 1$, la somme est nulle. **La somme vaut $1-x$ sur tout $[0, 1]$: elle est bien continue, comme le prévoit la convergence normale.**

Corrigé de l'exercice 11 : Une série alternée de fonctions

1. Fixons $x \geq 0$. La suite $\left(\frac{1}{n+x}\right)_n \geq 1$ est positive, décroissante et de limite nulle. D'après le critère des séries alternées, $\sum u_n(x)$ converge. De plus, son reste est majoré par la valeur absolue de son premier terme : $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$.
2. Le majorant $\frac{1}{n+1}$ est indépendant de x et tend vers 0. **Donc $|R_n|_\infty \rightarrow 0$: la convergence est uniforme sur $[0, +\infty[$.** Cependant, $|u_n|_\infty = \frac{1}{n}$, atteint en $x = 0$. **La série harmonique diverge, donc la convergence n'est pas normale.**
3. Chaque u_n est continue et la convergence est uniforme : **S est continue sur $[0, +\infty[$.** De plus, $u_n(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Le théorème de la double limite, appliqué sur $[0, +\infty[$, donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$.
4. Chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $u'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ et $|u'_n|_\infty = \frac{1}{n^2}$. La série des dérivées converge normalement, donc uniformément, sur $[0, +\infty[$. Par dérivation terme à terme, S est $\mathcal{C}^1$ et

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(2+x)^2} + \dots$$

Cette série est alternée, avec des termes décroissants en valeur absolue. Sa somme a donc le signe de son premier terme, et elle est même minorée par $\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(2+x)^2} > 0$. **Ainsi $S' > 0$: S est strictement croissante.**

5. On décale l'indice :

$$S(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+x} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m+x} = -\left(S(x) + \frac{1}{1+x}\right).$$

D'où $S(x) + S(x+1) = -\frac{1}{x+1}$. Comme S est croissante, $S(x) \leq S(x+1)$. Ainsi $2S(x) \leq -\frac{1}{x+1}$ et $2S(x+1) \geq -\frac{1}{x+1}$. La seconde inégalité, écrite en $x-1$ pour $x \geq 1$, donne $S(x) \geq -\frac{1}{2x}$. Donc, pour $x \geq 1$:

$$-\frac{1}{2x} \leq S(x) \leq -\frac{1}{2(x+1)}.$$

Les deux bornes sont équivalentes à $-\frac{1}{2x}$. **Par encadrement, $S(x) \sim -\frac{1}{2x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.**

Corrigé de l'exercice 12 : Critère de Cauchy uniforme et prolongement au bord

1. Soit $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme sur $[0,1[$ fournit, par le critère de Cauchy uniforme, un rang N tel que, pour $n, m \geq N$ et $x \in [0,1[$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$. Fixons $n, m \geq N$ et faisons tendre x vers 1. Par continuité de f_n et f_m en 1, on obtient $|f_n(1) - f_m(1)| \leq \varepsilon$. D'une part, la suite $(f_n(1))$ est donc de Cauchy, et elle converge. D'autre part, l'inégalité $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ vaut maintenant sur $[0,1]$ entier. **Le critère de Cauchy uniforme est vérifié sur $[0,1]$: la suite converge uniformément sur $[0,1]$.**

2. Les sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ sont des polynômes, continus sur $[0,1]$. Si la série convergeait uniformément sur $[0,1[$, la question 1 montrerait que $(S_n(1))$ converge. Or $S_n(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$. **La série ne converge donc pas uniformément sur $[0,1[$.**

3. Pour $x \in [0,1[$, posons $D_n(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x^k}{k} = S_{2n}(x) - S_n(x)$. C'est une fonction continue et croissante, de limite $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ en 1. Chacun de ces n termes vaut au moins $\frac{1}{2n}$. Ainsi :

$$\sup_{[0,1[} |S_{2n} - S_n| \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Le critère de Cauchy uniforme échoue pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$: pas de convergence uniforme sur $[0,1[$.

4. Pour $|x| \leq 1$, $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. **La série converge normalement sur $[-1,1]$, et sa somme y est continue.**

Corrigé de l'exercice 13 : Fonctions en escalier et sommes de Riemann

1. Par définition de la partie entière, $\lfloor nx \rfloor \leq nx < \lfloor nx \rfloor + 1$. En divisant par n , on obtient

$0 \leq x - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \frac{1}{n}$. **Donc** $\left| x - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$. Notons aussi que $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \in [0,1]$, si bien que f_n est bien définie.

2. La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$. D'après le théorème de Heine, elle y est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$, et $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta$ entraîne

$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Pour $n \geq \frac{1}{\delta}$ et tout x , la question 1 donne $\left| x - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right| \leq \delta$, donc

$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. **Ainsi** $|f_n - f|_\infty \leq \varepsilon$ **pour** $n \geq \frac{1}{\delta}$: la convergence est

uniforme.

3. Sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$, f_n vaut $f\left(\frac{k}{n}\right)$. La fonction f_n est en escalier, et

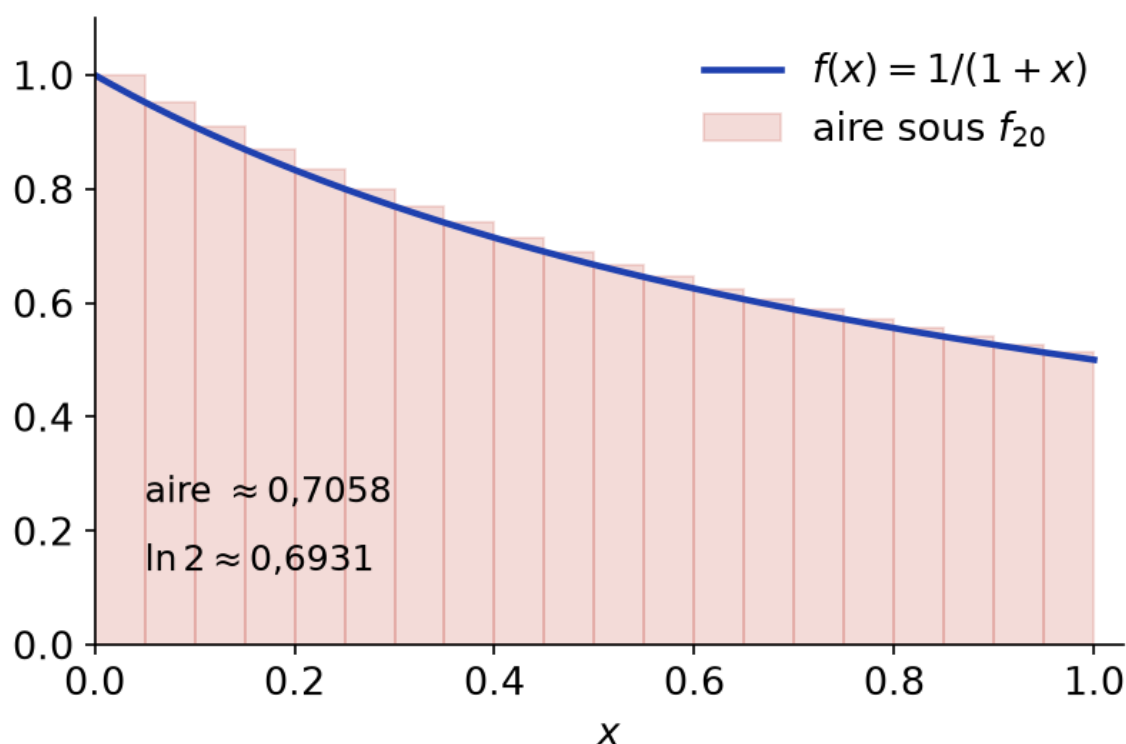
$\int_0^1 f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Ensuite, $\left| \int_0^1 f_n - \int_0^1 f \right| \leq |f_n - f|_\infty \rightarrow 0$. **Donc**

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f.$$

4. On écrit $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + k/n}$, avec $f(x) = \frac{1}{1+x}$ continue sur $[0,1]$. **La limite**

vaut $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$. La figure ci-dessous représente f_{20} : ses marches sont déjà très

proches de la courbe, et l'aire sous l'escalier vaut environ 0,7058, contre $\ln 2 \approx 0,6931$.



Corrigé de l'exercice 14 : La fonction zêta de Riemann

1. C'est une série de Riemann. **Elle converge si et seulement si** $x > 1$: $D =]1, +\infty[$.
2. Soit $a > 1$. Pour $x \geq a$ et $n \geq 1$, $0 < \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$, terme général d'une série convergente. **La convergence est normale sur** $[a, +\infty[$. Chaque terme étant continu, ζ est continue sur $[a, +\infty[$. Tout $x_0 > 1$ appartient à un tel intervalle, par exemple avec $a = \frac{1+x_0}{2}$. **Donc ζ est continue sur D .**
3. Posons $u_n(x) = e^{-x \ln n}$, de classe $\mathcal{C}^1$, avec $u'_n(x) = -\frac{\ln n}{n^x}$. Sur $[a, +\infty[$, $|u'_n(x)| \leq \frac{\ln n}{n^a}$. Posons $b = \frac{1+a}{2} > 1$. Alors $\frac{\ln n}{n^a} = \frac{1}{n^b} \cdot \frac{\ln n}{n^{a-b}}$, et le second facteur tend vers 0 car $a-b > 0$. Ainsi $\frac{\ln n}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^b}\right)$, terme d'une série convergente. La série des dérivées converge donc normalement sur $[a, +\infty[$. **Par dérivation terme à terme, ζ est $\mathcal{C}^1$ sur D , avec $\zeta'(x) = -\sum_{n \geq 2} \frac{\ln n}{n^x} < 0$: ζ est strictement décroissante.**

4. Sur $[2, +\infty[$, la convergence est normale, donc uniforme. De plus, $\frac{1}{1^x} = 1$ et $\frac{1}{n^x} \rightarrow 0$ pour $n \geq 2$ quand $x \rightarrow +\infty$. **Par le théorème de la double limite**, $\zeta(x) \rightarrow 1$.
5. La fonction $t \rightarrow t^{-x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Donc $\frac{1}{n^x} \geq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}$. En sommant, on obtient $\zeta(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}$. **Ainsi** $\zeta(x) \rightarrow +\infty$ **quand** $x \rightarrow 1^+$. Supposons la convergence uniforme sur $]1, 2]$. Il existe alors N tel que $|\zeta(x) - S_N(x)| \leq 1$ sur $]1, 2]$. Or $0 \leq S_N(x) \leq N$, donc $\zeta \leq N + 1$ sur $]1, 2]$, ce qui contredit la minoration. **La convergence n'est pas uniforme sur $]1, 2]$.**

Corrigé de l'exercice 15 : Somme d'une série par dérivation terme à terme

1. Pour $x \geq a$, $0 < u_n(x) \leq \frac{e^{-na}}{n} \leq (e^{-a})^n$. La série géométrique de raison $e^{-a} \in]0, 1[$ converge. **La série converge normalement sur $[a, +\infty[$.**
2. Chaque u_n est $\mathcal{C}^1$ avec $u'_n(x) = -e^{-nx}$. Sur $[a, +\infty[$, $|u'_n(x)| \leq e^{-na}$: la série des dérivées converge normalement. Tout segment de $]0, +\infty[$ est inclus dans un tel intervalle. Par dérivation terme à terme, S est $\mathcal{C}^1$ et, en sommant la série géométrique :

$$S'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = -\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = -\frac{1}{e^x - 1}.$$

Ainsi $S'(x) = -\frac{1}{e^x - 1}$.

3. La convergence est uniforme sur $[1, +\infty[$, et $u_n(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. **Par le théorème de la double limite**, $S(x) \rightarrow 0$.
4. Posons $g(x) = -\ln(1 - e^{-x})$ sur $]0, +\infty[$. Alors $g'(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = S'(x)$. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, $S - g$ est donc constante. Or $g(x) \rightarrow -\ln 1 = 0$ et $S(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$: la constante est nulle. **Donc** $S(x) = -\ln(1 - e^{-x})$. En $x = \ln 2$, on a $e^{-nx} = 2^{-n}$. **Ainsi** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$.

Corrigé de l'exercice 16 : Série de l'arctangente et valeur de $\pi/4$

1. Soit $x \in [0,1[$. Pour $t \in [0,x]$, $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$, car $t^2 < 1$. De plus, $|(-1)^n t^{2n}| \leq x^{2n}$, et $\sum x^{2n}$ converge : la série converge normalement sur le segment $[0,x]$. Le théorème d'intégration terme à terme donne alors

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

C'est la formule annoncée, valable sur $[0,1[$.

2. Fixons $x \in]0,1]$. La suite $\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$ est positive, décroissante (produit de deux suites positives décroissantes) et de limite nulle. Le critère des séries alternées s'applique, et le reste vérifie $|R_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$. Cette majoration reste vraie en $x = 0$, où tout est nul. **Donc** $|R_n|_{\infty} \leq \frac{1}{2n+3} \rightarrow 0$: **la convergence est uniforme sur $[0,1]$.**

3. Les v_n sont continues, donc la somme V est continue sur $[0,1]$. Or $V = \arctan$ sur $[0,1[$. En faisant tendre x vers 1, on obtient $V(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x = \arctan 1$.

Ainsi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

4. On a $|v_n|_{\infty} = \frac{1}{2n+1}$, atteint en $x = 1$, et $\sum \frac{1}{2n+1}$ diverge. **La convergence n'est pas normale sur $[0,1]$: ici, seule la convergence uniforme permet de conclure.**

Corrigé de l'exercice 17 : Moments nuls et théorème de Weierstrass

1. Soit $P(x) = \sum_{n=0}^d a_n x^n$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 fP = \sum_{n=0}^d a_n \int_0^1 f(x)x^n dx = 0. \text{ Donc } \int_0^1 fP = 0 \text{ pour tout polynôme } P.$$

2. Une telle suite existe d'après le théorème de Weierstrass. Ensuite, par l'inégalité de la moyenne :

$$\left| \int_0^1 fP_k - \int_0^1 f^2 \right| \leq \int_0^1 |f| |P_k - f| \leq \|f\|_\infty \|P_k - f\|_\infty \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Donc $\int_0^1 fP_k \rightarrow \int_0^1 f^2.$

3. D'après la question 1, $\int_0^1 fP_k = 0$ pour tout k . Donc $\int_0^1 f^2 = 0$. La fonction f^2 est continue et positive, d'intégrale nulle sur $[0,1]$: elle est identiquement nulle. **Ainsi** $f = 0$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Le théorème de Weierstrass fournit un polynôme Q tel que $|f - Q|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Posons $P = Q + (f(0) - Q(0))$, qui est un polynôme avec $P(0) = f(0)$. Alors $|f - P|_\infty \leq |f - Q|_\infty + |f(0) - Q(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. **Le polynôme P convient.**

Corrigé de l'exercice 18 : Limite uniforme de polynômes sur la droite réelle

- Soit $P(x) = a_d x^d + \dots + a_0$ avec $d \geq 1$ et $a_d \neq 0$. Alors $|P(x)| \sim |a_d| |x|^d \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, et P n'est pas bornée. **Par contraposée, un polynôme borné sur $\mathbb{R}$ est de degré au plus 0, donc constant.**
- Appliquons le critère de Cauchy uniforme avec $\varepsilon = 1$. Il existe N tel que $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$ pour tout $n \geq N$ et tout réel x . Le polynôme $P_n - P_N$ est alors borné sur $\mathbb{R}$. **D'après la question 1, $P_n - P_N$ est une constante c_n pour tout $n \geq N$.**
- On a $c_n = P_n(0) - P_N(0)$, qui converge vers $c = f(0) - P_N(0)$ par convergence simple en 0. Pour tout x , en passant à la limite dans $P_n(x) = P_N(x) + c_n$, on obtient $f(x) = P_N(x) + c$. **Donc f est une fonction polynomiale.**
- Pour $x \in [0,1]$, l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et x donne

$$|e^x - Q_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,1]} \exp \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

Donc $|\exp - Q_n|_{\infty} \leq \frac{e}{(n+1)!} \rightarrow 0$: **convergence uniforme sur** $[0,1]$.

5. Si $\exp$ était limite uniforme de polynômes sur $\mathbb{R}$, ce serait un polynôme d'après la question 3. Or un polynôme de degré d a une dérivée $(d+1)$ -ième nulle, alors que toutes les dérivées de $\exp$ valent $\exp > 0$. **La réponse est donc non : le théorème de Weierstrass exige un segment.**

Corrigé de l'exercice 19 : Approximation explicite de la valeur absolue par des polynômes

1. On calcule $P_1(t) = 0 + \frac{1}{2}(t - 0) = \frac{t}{2}$. Ensuite, $P_2(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\left(t - \frac{t^2}{4}\right)$. **Ainsi**
 $P_1(t) = \frac{t}{2}$ **et** $P_2(t) = t - \frac{t^2}{8}$. Par récurrence immédiate, chaque P_n est un polynôme.
2. Montrons par récurrence la propriété $0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}$ pour tout $t \in [0,1]$. Elle est vraie pour $P_0 = 0$. Supposons-la vraie au rang n . D'abord, $t - P_n(t)^2 \geq 0$, donc
 $P_{n+1}(t) \geq P_n(t) \geq 0$. Ensuite, en factorisant $t - P_n^2 = (\sqrt{t} - P_n)(\sqrt{t} + P_n)$:

$$\sqrt{t} - P_{n+1}(t) = (\sqrt{t} - P_n(t)) \left(1 - \frac{\sqrt{t} + P_n(t)}{2}\right).$$

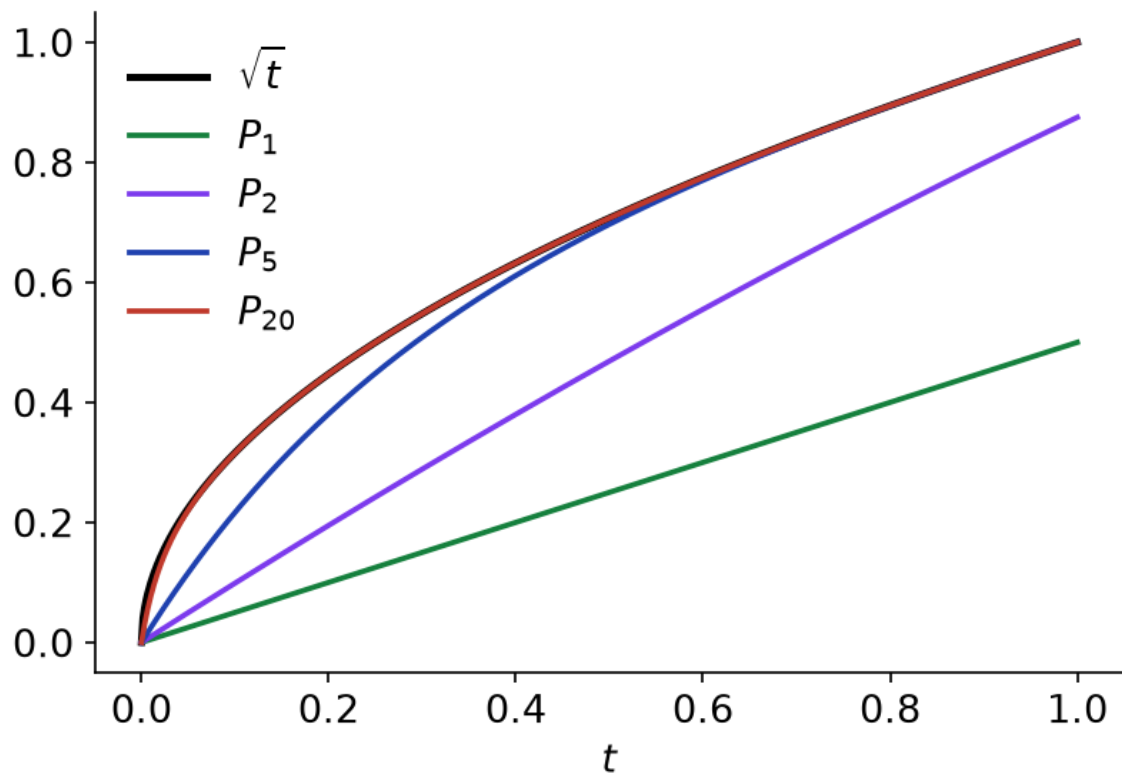
Or $\sqrt{t} + P_n(t) \leq 2\sqrt{t} \leq 2$, donc le second facteur est positif. **On obtient**
 $0 \leq P_n(t) \leq P_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$.

3. Comme $P_n(t) \geq 0$, le second facteur est au plus $1 - \frac{\sqrt{t}}{2}$. Ainsi
 $\sqrt{t} - P_{n+1}(t) \leq \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right)(\sqrt{t} - P_n(t))$. Par récurrence, à partir de $\sqrt{t} - P_0(t) = \sqrt{t}$:
 $0 \leq \sqrt{t} - P_n(t) \leq \sqrt{t} \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right)^n$.

4. Pour $n \geq 1$, $\varphi'_n(u) = \left(1 - \frac{u}{2}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{(n+1)u}{2}\right)$. La fonction φ_n croît donc jusqu'à
 $u_n = \frac{2}{n+1} \in]0,1]$, puis décroît. Son maximum vaut

$$\varphi_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq \frac{2}{n+1}.$$

Pour $n = 0$, $\varphi_0(u) = u \leq 1 \leq 2$. En appliquant ceci à $u = \sqrt{t} \in [0,1]$:
 $\sup_{[0,1]} |\sqrt{t} - P_n(t)| \leq \frac{2}{n+1}$. La figure ci-dessous montre la montée des P_n vers $\sqrt{t}$, plus lente près de 0, là où la racine a une tangente verticale.



5. Pour $x \in [-1,1]$, $x^2 \in [0,1]$ et $\sqrt{x^2} = |x|$. Posons $R_n(x) = P_n(x^2)$, polynôme en x . Alors $\sup_{[-1,1]} |x - R_n(x)| \leq \frac{2}{n+1}$: (R_n) converge uniformément vers $|\cdot|$ sur $[-1,1]$.

Point de méthode : cette construction explicite est le point de départ de la preuve du théorème de Stone-Weierstrass, qui généralise le théorème de Weierstrass.

Corrigé de l'exercice 20 : Problème, étude d'une fonction définie par une série

Partie A.

- Si $x \leq 0$, alors $u_n(x) \geq 1$: le terme général ne tend pas vers 0, et la série diverge grossièrement. Si $x > 0$, posons $v = \sqrt{n}$. Par croissances comparées, $n^2 u_n(x) = v^4 e^{-xv} \rightarrow 0$, donc $u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. **La série converge si et seulement si $x > 0$.**
- Pour $x \geq a > 0$, $0 < u_n(x) \leq e^{-a\sqrt{n}}$, terme d'une série convergente d'après la question 1. **La convergence est normale sur $[a, +\infty[$.** Les u_n sont continues, et tout $x_0 > 0$ est dans $\left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$. **Donc S est continue sur $]0, +\infty[$.**
- On a $u'_n(x) = -\sqrt{n} e^{-x\sqrt{n}}$. Sur $[a, +\infty[$, $|u'_n(x)| \leq \sqrt{n} e^{-a\sqrt{n}}$. De plus, $n^2 \sqrt{n} e^{-a\sqrt{n}} = v^5 e^{-av} \rightarrow 0$, d'où un majorant sommable. La série des dérivées converge donc normalement sur $[a, +\infty[$. **Ainsi S est $\mathcal{C}^1$, avec**

$$S'(x) = -\sum_{n \geq 1} \sqrt{n} e^{-x\sqrt{n}} < 0 : S \text{ est strictement décroissante.}$$

Partie B.

- En multipliant par e^x , $e^x S(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-x(\sqrt{n}-1)} = 1 + \sum_{n \geq 2} e^{-x(\sqrt{n}-1)}$. Pour $n \geq 2$ et $x \geq 1$, on a $\sqrt{n}-1 > 0$, donc $e^{-x(\sqrt{n}-1)} \leq e^{1-\sqrt{n}} = e \cdot e^{-\sqrt{n}}$. **Ce majorant est sommable (partie A) : la convergence est normale sur $[1, +\infty[$.**
- Pour $n \geq 2$, $e^{-x(\sqrt{n}-1)} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Le théorème de la double limite donne $e^x S(x) \rightarrow 1 + 0 = 1$. **Donc $S(x) \sim e^{-x}$ quand $x \rightarrow +\infty$: le premier terme l'emporte.**

Partie C.

- La fonction $\varphi : t \rightarrow e^{-x\sqrt{t}}$ est positive, continue et décroissante sur $[0, +\infty[$. Pour $n \geq 1$, on a donc $\int_n^{n+1} \varphi \leq \varphi(n) \leq \int_{n-1}^n \varphi$. Les intégrales généralisées de φ convergent

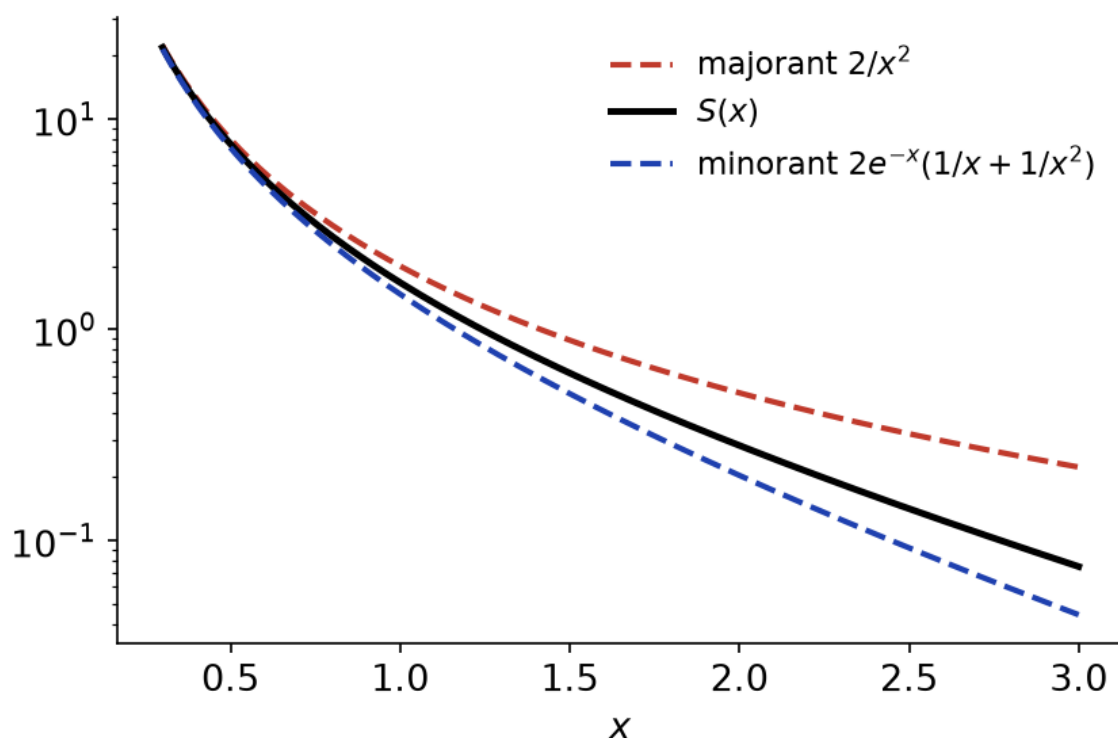
(question suivante). En sommant pour $n \geq 1$: $\int_1^{+\infty} \varphi \leq S(x) \leq \int_0^{+\infty} \varphi$.

2. Le changement de variable $t = u^2$, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant, donne $dt = 2u du$. Une primitive de $2u e^{-xu}$ est $-2e^{-xu}\left(\frac{u}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$. On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} 2u e^{-xu} du = \frac{2}{x^2}, \quad \int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = 2e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right).$$

Les deux intégrales valent $\frac{2}{x^2}$ et $2e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$.

3. En multipliant l'encadrement par $\frac{x^2}{2}$, on obtient $e^{-x}(x+1) \leq \frac{x^2}{2}S(x) \leq 1$. Quand $x \rightarrow 0^+$, le minortant tend vers 1. **Par encadrement, $S(x) \sim \frac{2}{x^2}$ quand $x \rightarrow 0^+$.** La figure ci-dessous, en échelle logarithmique, montre S coincée entre ses deux bornes, qui se rejoignent près de 0.



4. Première méthode : chaque $u_n(x)$ tend vers 1 quand $x \rightarrow 0^+$. Si la convergence était uniforme sur $]0, +\infty[$, le théorème de la double limite imposerait la convergence de $\sum 1$, ce qui est absurde. Seconde méthode : les sommes partielles vérifient $0 \leq S_N \leq N$. Une convergence uniforme donnerait N tel que $|S - S_N| \leq 1$, donc $S \leq N + 1$. Or $S(x) \sim \frac{2}{x^2}$ n'est pas bornée près de 0. **La convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$.**

Point de méthode : pour trouver un équivalent d'une somme $\sum f(n)$ avec f monotone, encadrez-la par des intégrales de f .

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [suites et séries de fonctions, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur suites et séries de fonctions](#)
- À maîtriser avant : [Séries à termes quelconques](#)
- Chapitre précédent : [Variables aléatoires discrètes](#)
- Chapitre suivant : [Séries entières](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)