

Suites de fonctions

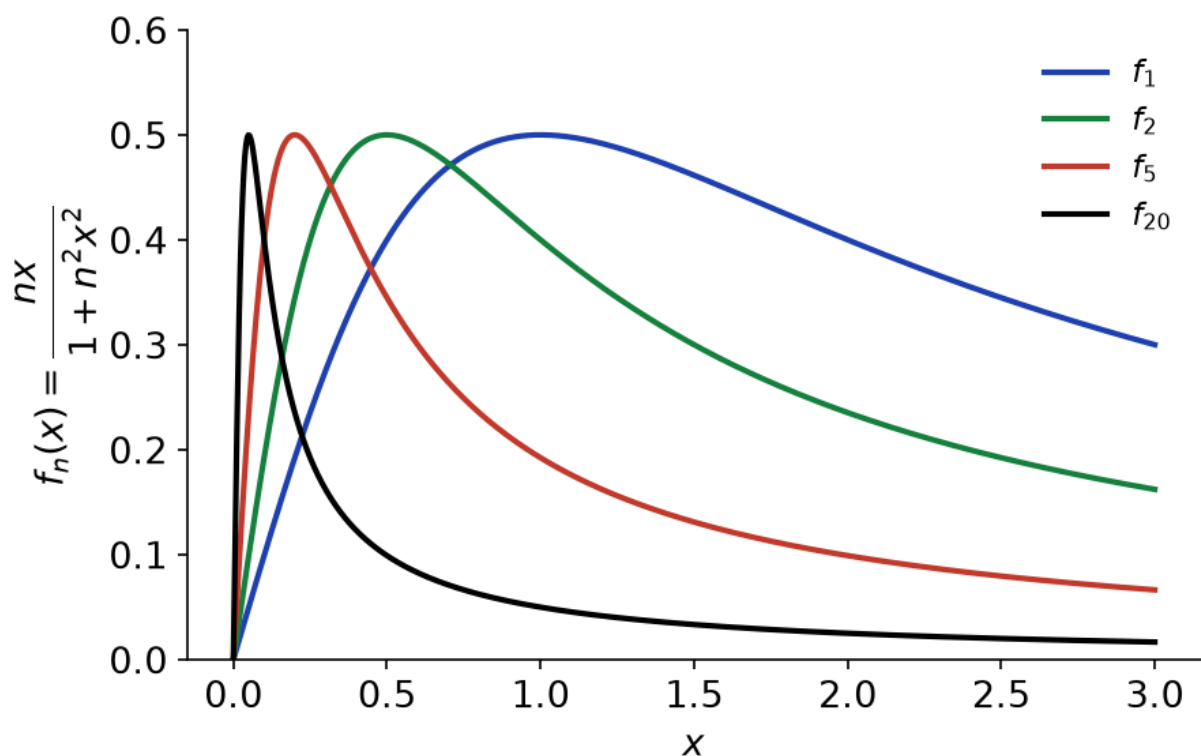
Exercice 1 : Puissances de x sur $[0,1]$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = x^n$.

1. Déterminer la limite simple f de la suite (f_n) sur $[0,1]$.
2. En déduire, sans calcul de norme, que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
3. Retrouver ce résultat à l'aide de la suite de points $x_n = 2^{-1/n}$.
4. Soit $a \in [0,1[$. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,a]$.
5. La convergence est-elle uniforme sur $[0,1[$?

Exercice 2 : Une bosse qui s'écrase

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$. La figure ci-dessous représente quelques-unes de ces fonctions.



1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, +\infty[$.
2. Calculer $f_n(1/n)$. La convergence est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$?
3. Étudier les variations de f_n . Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
4. Calculer $\int_0^1 f_n(x) dx$ et sa limite. Commenter.

Exercice 3 : Calculs de normes infinies

Pour chacune des suites suivantes, déterminer la limite simple, puis calculer $\|f_n - f\|_\infty$ ou justifier qu'elle est infinie. Conclure sur la convergence uniforme.

1. $f_n(x) = x e^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$, pour $n \geq 1$.

2. $g_n(x) = \frac{n x^2}{1 + n x}$ sur $[0, +\infty[$, pour $n \geq 1$.
3. $h_n(x) = \frac{x}{n}$ sur $\mathbb{R}$, pour $n \geq 1$. Étudier aussi la convergence sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Une bosse de hauteur presque constante

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = n x (1 - x)^n$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
2. Étudier les variations de f_n et calculer $|f_n|_\infty$. Déterminer sa limite. Conclure.
3. Calculer $\int_0^1 f_n(x) dx$ et sa limite. Que peut-on en déduire sur le lien entre convergence uniforme et interversion limite-intégrale ?
4. Soit $a \in]0,1]$. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,1]$.

Exercice 5 : Sinus oscillants et dérivées

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer f'_n . Étudier la suite $(f'_n(x))$ pour $x = 0$ puis pour $x = \pi$.
3. On suppose que $(\cos(nx))_n$ converge vers un réel ℓ . En utilisant $\cos(2nx) = 2\cos^2(nx) - 1$, montrer que $\ell \in \{1, -1/2\}$. En utilisant $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2 \cos(nx) \cos x$, montrer que $\cos x = 1$.
4. En déduire l'ensemble des réels x pour lesquels $(f'_n(x))$ converge. Quelle hypothèse du

théorème de dérivation manque-t-il ici ?

Exercice 6 : Échec de l'interversion limite-intégrale

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ et sa limite.
3. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$. Retrouver ce fait à l'aide de $f_n(1/n)$.
4. Soit $a \in]0,1]$. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,1]$.

Exercice 7 : Convergence vers l'exponentielle

Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers $x \rightarrow e^x$ sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$.
3. En déduire que, pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 1$, $0 \leq e^x - f_n(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2n}$.
4. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[0, a]$.
5. La convergence est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$? On pourra calculer $f_n(n)$.

6. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx$ de deux façons.

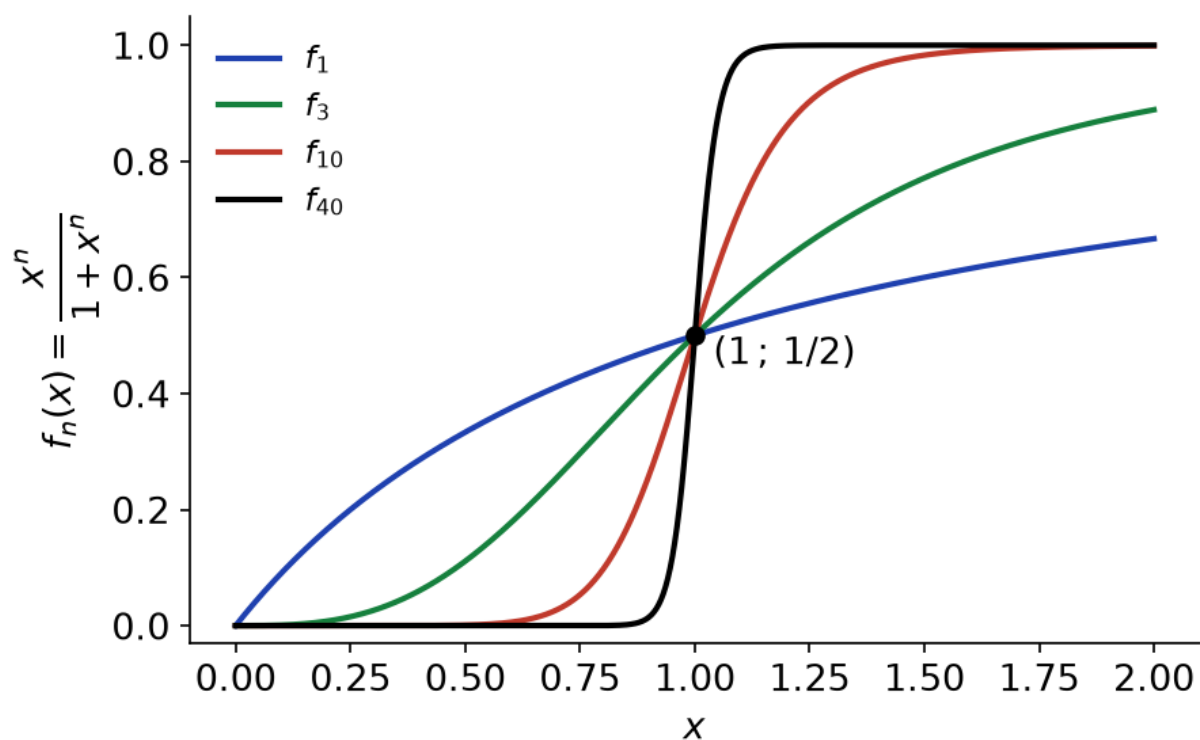
Exercice 8 : Le logarithme comme limite

Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers $\ln$ sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que, pour tout réel t , $|e^t - 1 - t| \leq \frac{t^2}{2} e^{|t|}$.
3. Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$ et $M = \max(|\ln a|, |\ln b|)$. Montrer que $\sup_{[a, b]} |f_n - \ln| \leq \frac{M^2 e^M}{2n}$. Conclure.
4. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $]0, 1]$, à l'aide de $x_n = e^{-n^2}$.
5. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^e n(x^{1/n} - 1) dx$.

Exercice 9 : Utiliser le théorème de la double limite

Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$. Comme le suggère la figure ci-dessous, toutes les courbes passent par le point $(1, 1/2)$.



1. Déterminer la limite simple f de (f_n) sur $[0, +\infty[$. La convergence est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$?
2. La restriction de f à $[0, 1[$ est continue. À l'aide du théorème de la double limite en 1, montrer que la convergence n'est pourtant pas uniforme sur $[0, 1[$.
3. Retrouver ce résultat avec la suite de points $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.
4. Soit $0 \leq a < 1 < b$. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, a]$ et sur $[b, +\infty[$.

Exercice 10 : Régularisation de la valeur absolue

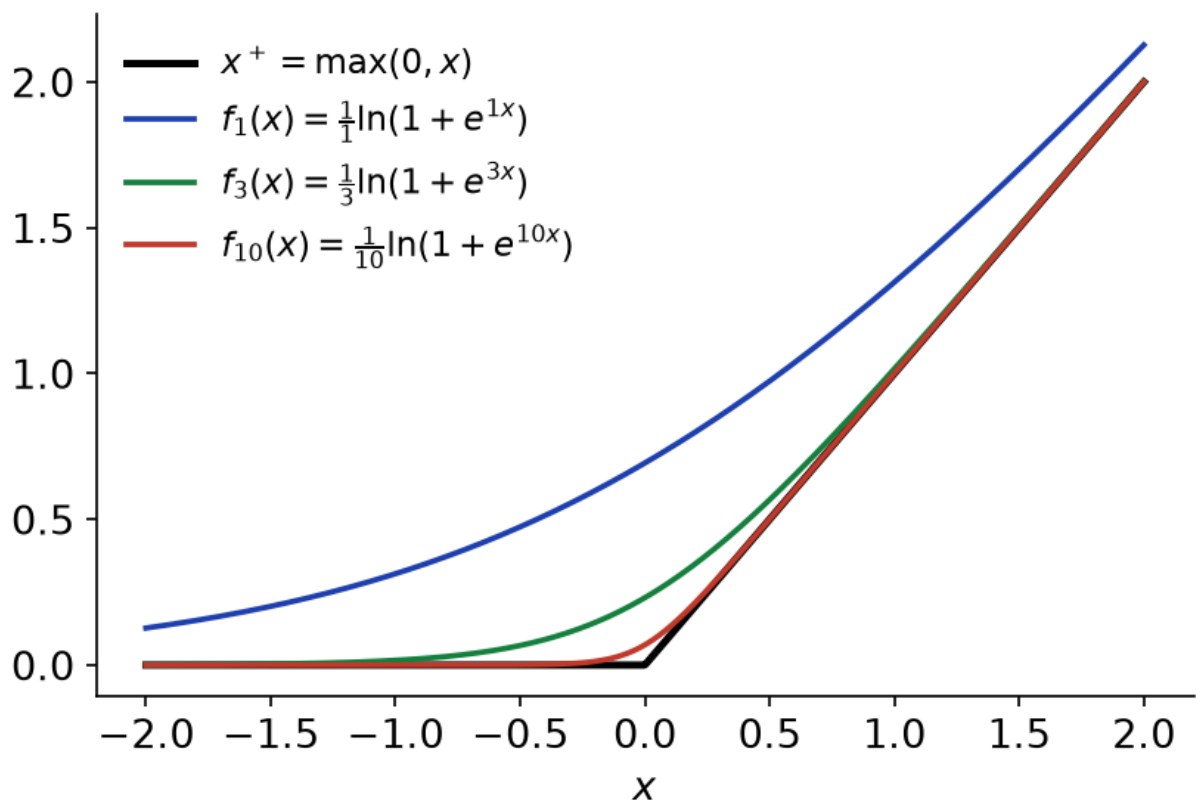
Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$.

1. Montrer que $0 \leq f_n(x) - |x| \leq \frac{1}{n}$ pour tout réel x . En déduire la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.

- Justifier que chaque f_n est de classe C^1 . La limite l'est-elle ? Que retenir ?
- Étudier la convergence simple de (f'_n) sur $\mathbb{R}$. Est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
- Soit $a > 0$. Montrer que (f'_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$. Quel théorème retrouve-t-on ?

Exercice 11 : Régularisation de la partie positive

On note $x^+ = \max(0, x)$. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{nx})$. La figure ci-dessous compare ces fonctions à leur limite.



- Montrer que $\|f_n - x^+\|_\infty = \frac{\ln 2}{n}$. On distinguera $x \leq 0$ et $x > 0$.
- Calculer f'_n et étudier la convergence simple de (f'_n) sur $\mathbb{R}$. Est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

3. Montrer que (f'_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$ et sur $]-\infty, -a]$ pour tout $a > 0$.
4. Que donne le théorème de dérivation sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$? Peut-il s'appliquer sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12 : Dérivées successives d'une limite

On reprend $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ sur $[0, a]$, avec $a > 0$, et l'on admet le résultat de l'exercice 7 : (f_n) converge uniformément vers $\exp$ sur $[0, a]$.

1. Soit (u_n) et (v_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément sur $[0, a]$ vers des fonctions bornées u et v . Montrer que $(u_n v_n)$ converge uniformément vers uv .
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour $n \geq k$, $f_n^{(k)}(x) = c_{n,k} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-k}$ avec
$$c_{n,k} = \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$
3. Montrer que $(f_n^{(k)})$ converge uniformément vers $\exp$ sur $[0, a]$.
4. Quelle conclusion le théorème de dérivation de classe C^k permet-il d'obtenir ?

Exercice 13 : Composition et convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers f sur I .

1. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$ sur I .
2. On prend $I = \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ et $g(x) = x^2$. Étudier la convergence uniforme de $(g \circ f_n)$ sur $\mathbb{R}$, puis sur tout segment.
3. Montrer que $x \rightarrow \sin \sqrt{x^2 + 1/n^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $x \rightarrow \sin|x|$.

4. On suppose ici $I = [a, b]$, les f_n et f continues, et g seulement continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $(g \circ f_n)$ converge encore uniformément vers $g \circ f$.

Exercice 14 : Limites d'intégrales sur un segment

- Montrer que $|\sin u - u| \leq \frac{u^3}{6}$ pour $u \geq 0$. En déduire que $x \rightarrow n \sin(x/n)$ converge uniformément vers $x \rightarrow x$ sur $[0, \pi]$, puis déterminer $\lim \int_0^\pi n \sin\left(\frac{x}{n}\right) dx$. Vérifier par un calcul direct.
- Montrer que $x \rightarrow \frac{n}{n+x}$ converge uniformément vers 1 sur $[0, 1]$. En déduire $\lim \int_0^1 \frac{n e^x}{n+x} dx$.
- On pose $J_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$. La suite de fonctions intégrées converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$? Montrer néanmoins que $|J_n - 1| \leq \frac{1}{n+1}$ et conclure.

Exercice 15 : Approximation par des fonctions en escalier

- Soit $n \geq 1$. On définit φ_n sur $[0, 1]$ par $\varphi_n(x) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$ si $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$, pour $0 \leq k \leq n-1$, et $\varphi_n(1) = 1$. Montrer que $0 \leq x^2 - \varphi_n(x) \leq \frac{2}{n}$ pour tout $x \in [0, 1]$.
- Calculer $\int_0^1 \varphi_n$ et retrouver la valeur de $\int_0^1 x^2 dx$ par passage à la limite.
- Montrer que la fonction en escalier $x \rightarrow \left\lfloor \frac{nx}{n} \right\rfloor$ converge uniformément vers $x \rightarrow x$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $L > 0$ et f une fonction L -lipschitzienne sur $[a, b]$. Construire explicitement une

fonction en escalier ψ_n telle que $|f - \psi_n|_\infty \leq \frac{L(b-a)}{n}$.

Exercice 16 : Polynômes de Bernstein

Pour f continue sur $[0,1]$ et $n \geq 1$, on pose $b_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ et $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{n,k}(x)$.

- Montrer que $\sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) = 1$, $\sum_{k=0}^n k b_{n,k}(x) = nx$ et $\sum_{k=0}^n k(k-1) b_{n,k}(x) = n(n-1)x^2$.
- En déduire $B_n(f)$ pour $f(x) = 1$, $f(x) = x$ et $f(x) = x^2$. Calculer $|B_n(f) - f|_\infty$ pour $f(x) = x^2$.
- Montrer que $\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 b_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$.
- Soit $\delta > 0$. Montrer que la somme des $b_{n,k}(x)$ étendue aux k tels que $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$ est majorée par $\frac{1}{4n\delta^2}$.
- Soit f continue sur $[0,1]$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant la continuité uniforme de f , montrer que $|B_n(f) - f|_\infty \leq \varepsilon + \frac{|f|_\infty}{2n\delta^2}$ pour un δ convenable. En déduire le théorème de Weierstrass sur $[0,1]$.

Exercice 17 : Moments nuls et théorème de Weierstrass

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.

1. On suppose que $\int_0^1 f(x) x^k dx = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que f est nulle.
2. On suppose seulement que $\int_0^1 f(x) x^k dx = 0$ pour tout $k \geq 2$. Montrer que f est encore nulle.
3. Vérifier que $g(x) = 6x^2 - 6x + 1$ vérifie $\int_0^1 g = \int_0^1 x g(x) dx = 0$. Que montre cet exemple ?

Exercice 18 : Approximation simultanée d'une fonction et de sa dérivée

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$.

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) telle que (P_n) converge uniformément vers f et (P'_n) converge uniformément vers f' sur $[a, b]$, avec de plus $P_n(a) = f(a)$.
2. Généraliser à une fonction de classe C^2 : approcher simultanément f , f' et f'' .
3. Soit $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$ et (P_n) une suite de polynômes convergeant uniformément vers f . Montrer que (P'_n) ne peut pas converger uniformément sur $[-1, 1]$.

Exercice 19 : Limites uniformes de polynômes sur $\mathbb{R}$

1. Montrer qu'une fonction polynomiale bornée sur $\mathbb{R}$ est constante.
2. Soit (P_n) une suite de polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f . Montrer qu'il existe N tel que $P_n - P_N$ soit constant pour $n \geq N$. En déduire que f est polynomiale.
3. En déduire que $\exp$ n'est pas limite uniforme de polynômes sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $a > 0$ et $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. Montrer que $\sup_{[-a,a]} |e^x - T_n(x)| \leq \frac{a^{n+1} e^a}{(n+1)!}$ et conclure.

Exercice 20 : Méthode de Picard pour l'exponentielle

Soit $a > 0$. On définit une suite de fonctions sur $[0, a]$ par $f_0 = 1$ et, pour tout n ,

$$f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t) dt.$$

1. Montrer par récurrence que $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.
2. Justifier que (f_n) converge simplement sur $[0, a]$ vers une fonction F , puis que $|F - f_n|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$. En déduire la convergence uniforme.
3. Montrer que F est continue et que $F(x) = 1 + \int_0^x F(t) dt$ pour tout $x \in [0, a]$.
4. En déduire que F est de classe C^1 , que $F' = F$ et $F(0) = 1$, puis identifier F .
5. Retrouver la dérivabilité de F directement à l'aide du théorème de dérivation des suites de fonctions.

Exercice 21 : Problème : approximation polynomiale de la racine carrée

On définit une suite de polynômes sur $[0, 1]$ par $p_0 = 0$ et

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n(x)^2). \text{ On fixe } x \in [0, 1], \text{ on note } s = \sqrt{x} \text{ et } e_n = s - p_n(x).$$

1. Calculer p_1 et p_2 .
2. Montrer que $e_{n+1} = e_n \left(1 - \frac{s + p_n(x)}{2}\right)$. En déduire par récurrence que $0 \leq p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$.
3. Montrer que $0 \leq e_n \leq s \left(1 - \frac{s}{2}\right)^n$.
4. Étudier $\varphi_n(s) = s \left(1 - \frac{s}{2}\right)^n$ sur $[0,1]$ et en déduire que $\|s - p_n\|_\infty \leq \frac{2}{n+1}$ sur $[0,1]$.
5. En déduire que $Q_n(x) = p_n(x^2)$ définit une suite de polynômes convergeant uniformément vers $x \rightarrow |x|$ sur $[-1,1]$.
6. Soit $c \in [-1,1]$. Montrer que $x \rightarrow |x - c|$ est limite uniforme de polynômes sur $[-1,1]$.
7. On admet que toute fonction continue affine par morceaux g sur $[-1,1]$ s'écrit $g(x) = \alpha x + \beta + \sum_{i=1}^m \lambda_i |x - c_i|$ avec $c_i \in [-1,1]$. Soit f continue sur $[-1,1]$. En approchant f par une fonction affine par morceaux, démontrer le théorème de Weierstrass sur $[-1,1]$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [suites de fonctions, cours de maths spé](#)

- À maîtriser avant : [Normes, espaces vectoriels normés et suites](#)
- Chapitre précédent : [Séries numériques et vectorielles](#)
- Chapitre suivant : [Séries de fonctions](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)