

## Suites de fonctions

### Corrigé de l'exercice 1 : Puissances de $x$ sur $[0,1]$

1. Pour  $0 \leq x < 1$ , la suite géométrique  $(x^n)$  tend vers 0. Pour  $x = 1$ , on a  $f_n(1) = 1$ .  
**La limite simple est  $f$ , nulle sur  $[0,1[$  et telle que  $f(1) = 1$ .**
2. Chaque  $f_n$  est continue sur  $[0,1]$ . Si la convergence était uniforme, le théorème de continuité d'une limite uniforme rendrait  $f$  continue. Or  $f$  est discontinue en 1. **Donc la convergence n'est pas uniforme sur  $[0,1]$ .**
3. On a  $x_n = 2^{-1/n} \in [0,1[$ , donc  $f(x_n) = 0$ . De plus,  $f_n(x_n) = (2^{-1/n})^n = \frac{1}{2}$ .  
Ainsi,  $|f_n - f|_\infty \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2}$ . **La norme infinie ne tend pas vers 0 : pas de convergence uniforme.**
4. Sur  $[0,a]$ , la fonction  $x \rightarrow x^n$  est croissante et positive. Par conséquent,  
 $\sup_{[0,a]} |f_n - f| = a^n$ , qui tend vers 0 car  $0 \leq a < 1$ . **La convergence est uniforme sur  $[0,a]$ .**
5. Sur  $[0,1[$ , on a  $\sup_{[0,1[} x^n = 1$ , car  $x^n \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow 1^-$ . **La convergence n'est donc pas uniforme sur  $[0,1[$ , bien qu'elle le soit sur tout segment de  $[0,1[$ .**

### Corrigé de l'exercice 2 : Une bosse qui s'écrase

1. On a  $f_n(0) = 0$ . Pour  $x > 0$ ,  $f_n(x) \sim \frac{nx}{n^2 x^2} = \frac{1}{nx}$ , qui tend vers 0. **La limite simple est la fonction nulle.**

2. On calcule  $f_n(1/n) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ . Donc  $|f_n|_\infty \geq \frac{1}{2}$  pour tout  $n$ . **La convergence n'est pas uniforme sur  $[0, +\infty[$ .**

3. La dérivée vaut :

$$f'_n(x) = \frac{n(1 + n^2 x^2) - nx \cdot 2n^2 x}{(1 + n^2 x^2)^2} = \frac{n(1 - n^2 x^2)}{(1 + n^2 x^2)^2}.$$

Ainsi,  $f_n$  croît sur  $[0, 1/n]$  et décroît sur  $[1/n, +\infty[$ . Soit  $a > 0$ . Pour  $n \geq 1/a$ , on a  $1/n \leq a$ , donc  $f_n$  est décroissante sur  $[a, +\infty[$ . Par conséquent :

$$\sup_{[a, +\infty[} |f_n| = f_n(a) = \frac{na}{1 + n^2 a^2} \leq \frac{na}{n^2 a^2} = \frac{1}{na}.$$

**La convergence est uniforme sur  $[a, +\infty[$  pour tout  $a > 0$ .**

4. Une primitive de  $f_n$  est  $x \rightarrow \frac{1}{2n} \ln(1 + n^2 x^2)$ . Donc  $\int_0^1 f_n = \frac{\ln(1 + n^2)}{2n}$ . Par

croissance comparée, **cette intégrale tend vers**  $0 = \int_0^1 f$ . Ici, l'interversion est vraie alors

que la convergence n'est pas uniforme sur  $[0, 1]$  (puisque  $1/n \in [0, 1]$ ). La convergence uniforme est une condition suffisante, pas nécessaire.

## **Corrigé de l'exercice 3 : Calculs de normes infinies**

---

1. La limite simple est nulle :  $f_n(0) = 0$  et, pour  $x > 0$ ,  $e^{-nx} \rightarrow 0$ . Ensuite,  $f'_n(x) = (1 - nx)e^{-nx}$  : la fonction positive  $f_n$  croît sur  $[0, 1/n]$  puis décroît. Donc  $|f_n|_\infty = f_n(1/n) = \frac{1}{ne}$ . **La convergence est uniforme sur  $[0, +\infty[$ .**

2. Pour  $x = 0$ ,  $g_n(0) = 0$ . Pour  $x > 0$ ,  $g_n(x) = \frac{x}{1 + 1/(nx)} \rightarrow x$ . La limite simple est donc  $x \rightarrow x$ . De plus :

$$x - g_n(x) = \frac{x(1 + nx) - nx^2}{1 + nx} = \frac{x}{1 + nx}.$$

Cette fonction est croissante en  $x$ , puisque sa dérivée vaut  $\frac{1}{(1+nx)^2} > 0$ , et elle tend vers  $\frac{1}{n}$  en  $+\infty$ . Ainsi,  $|g_n - \text{id}|_\infty = \frac{1}{n}$  **et la convergence est uniforme sur**  $[0, +\infty[$ .

3. La limite simple est nulle. Cependant,  $\sup_{\mathbb{R}} |h_n| = +\infty$  : la fonction  $h_n$  n'est pas bornée. **La convergence n'est pas uniforme sur**  $\mathbb{R}$ . En revanche, sur un segment  $[a, b]$ ,  
 $\sup_{[a, b]} |h_n| = \frac{\max(|a|, |b|)}{n} \rightarrow 0$ . **La convergence est donc uniforme sur tout segment.**

**Point de méthode :** une majoration du type  $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ , avec  $\alpha_n$  indépendant de  $x$  et de limite nulle, suffit à conclure ; le calcul exact du supremum n'est pas obligatoire.

## Corrigé de l'exercice 4 : Une bosse de hauteur presque constante

---

1. On a  $f_n(0) = f_n(1) = 0$ . Pour  $x \in ]0, 1[$ , posons  $q = 1 - x \in ]0, 1[$ . Par croissance comparée,  $n q^n \rightarrow 0$ , donc  $f_n(x) \rightarrow 0$ . **La limite simple est nulle.**

2. On dérive :

$$f'_n(x) = n(1-x)^n - n^2 x (1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1}(1 - (n+1)x).$$

Donc  $f_n$  croît sur  $[0, x_n]$  et décroît sur  $[x_n, 1]$ , avec  $x_n = \frac{1}{n+1}$ . Ainsi :

$$|f_n|_\infty = f_n(x_n) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Or  $(n+1)\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \rightarrow -1$ . Donc  $|f_n|_\infty \rightarrow e^{-1} \neq 0$  : **la convergence n'est pas uniforme sur**  $[0, 1]$ .

3. Avec  $u = 1 - x$ , on obtient :

$$\int_0^1 f_n = n \int_0^1 (1-u) u^n du = n \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{n}{(n+1)(n+2)}.$$

**Cette intégrale tend vers**  $0 = \int_0^1 f$ . L'interversion est donc vraie sans convergence uniforme

: la convergence uniforme est suffisante, mais pas nécessaire.

4. Soit  $a \in ]0,1]$ . Pour  $n+1 \geq 1/a$ , on a  $x_n \leq a$ , donc  $f_n$  est décroissante sur  $[a,1]$ . Par conséquent,  $\sup_{[a,1]} |f_n| = f_n(a) = n a (1-a)^n$ , qui tend vers 0 (il est nul si  $a = 1$ ). **La convergence est uniforme sur  $[a,1]$ .**

## Corrigé de l'exercice 5 : Sinus oscillants et dérivées

---

- Pour tout réel  $x$ ,  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ , avec égalité en  $x = \frac{\pi}{2n}$ . **Donc  $|f_n|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  : convergence uniforme vers 0 sur  $\mathbb{R}$ .**
- On a  $f'_n(x) = \cos(nx)$ . En  $x = 0$ , la suite vaut constamment 1, donc elle converge. En  $x = \pi$ , elle vaut  $(-1)^n$  : **elle diverge.**
- Supposons  $\cos(nx) \rightarrow \ell$ . La suite  $(\cos(2nx))$  est extraite, donc elle tend aussi vers  $\ell$ . Par ailleurs, elle vaut  $2\cos^2(nx) - 1$ , qui tend vers  $2\ell^2 - 1$ . Par unicité de la limite,  $2\ell^2 - \ell - 1 = 0$ , soit  $(2\ell + 1)(\ell - 1) = 0$ . Ainsi,  $\ell \in \{1, -1/2\}$ ; en particulier  $\ell \neq 0$ . Ensuite, en passant à la limite dans  $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(nx)\cos x$ , on obtient  $2\ell = 2\ell \cos x$ . Comme  $\ell \neq 0$ , **on conclut que  $\cos x = 1$ .**
- D'après la question précédente, la convergence de  $(\cos(nx))$  impose  $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Réciproquement, si  $x = 2k\pi$ , la suite est constante égale à 1. **L'ensemble cherché est  $2\pi\mathbb{Z}$ .** Le théorème de dérivation demande la convergence uniforme sur tout segment de la suite des dérivées. Ici, cette suite ne converge même pas simplement. La convergence uniforme de  $(f_n)$  ne dit donc rien sur les dérivées.

## Corrigé de l'exercice 6 : Échec de l'interversion limite-intégrale

---

- On a  $f_n(0) = 0$ . Pour  $x \in ]0,1]$ , la croissance comparée donne  $n^2 e^{-nx} \rightarrow 0$ , donc

$f_n(x) \rightarrow 0$ . **La limite simple est nulle.**

2. Le changement de variable  $t = nx$  donne :

$$I_n = \int_0^n t e^{-t} dt = \left[ -(t+1)e^{-t} \right]_0^n = 1 - (n+1)e^{-n}.$$

**Donc**  $I_n \rightarrow 1$ .

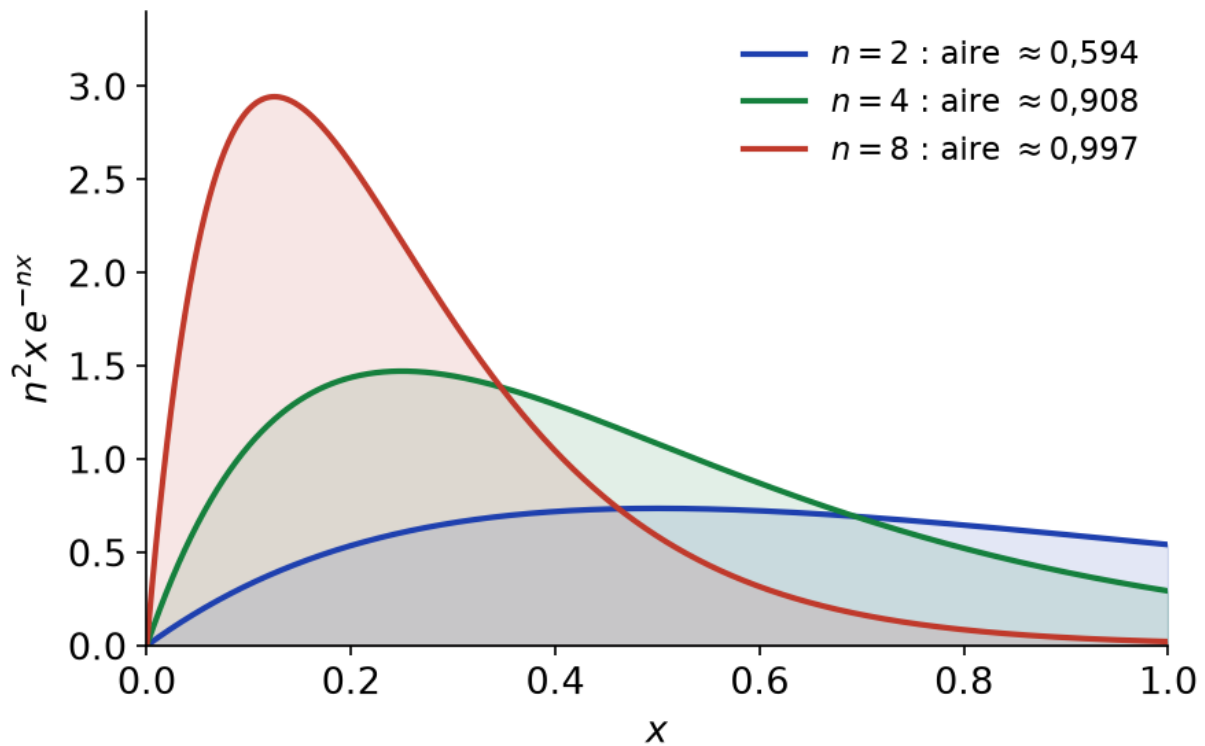
3. Si la convergence était uniforme sur le segment  $[0,1]$ , le théorème d'intégration donnerait

$$I_n \rightarrow \int_0^1 0 = 0. \text{ Or } I_n \rightarrow 1. \text{ **La convergence n'est donc pas uniforme sur } [0,1].**$$

Directement,  $f_n(1/n) = n e^{-1} \rightarrow +\infty$ , donc  $|f_n|_\infty \rightarrow +\infty$ .

4. On a  $f'_n(x) = n^2(1 - nx)e^{-nx}$ . Soit  $a \in ]0,1]$ . Pour  $n \geq 1/a$ ,  $f_n$  est décroissante sur  $[a,1]$ , donc  $\sup_{[a,1]} |f_n| = n^2 a e^{-na}$ . **Ce majorant tend vers 0 : la convergence est uniforme sur  $[a,1]$ .**

La figure ci-dessous montre que l'aire sous la courbe se rapproche de 1 tandis que la masse se concentre près de 0. C'est ce « pic » qui empêche l'interversion.



## Corrigé de l'exercice 7 : Convergence vers l'exponentielle

- Pour  $x = 0$ ,  $f_n(0) = 1 = e^0$ . Pour  $x > 0$ ,  $\ln f_n(x) = n \ln(1 + \frac{x}{n}) \sim n \cdot \frac{x}{n} = x$ . Par continuité de l'exponentielle,  $f_n(x) \rightarrow e^x$ .
- Posons  $u(t) = t - \ln(1+t)$  et  $v(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}$  sur  $[0, +\infty[$ . On a  $u'(t) = \frac{t}{1+t} \geq 0$  et  $v'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{t^2}{1+t} \geq 0$ . Comme  $u(0) = v(0) = 0$ , **les deux fonctions sont positives, d'où l'encadrement.**
- Posons  $w = n \ln(1 + \frac{x}{n})$ . Avec  $t = x/n$ , la question 2 donne  $x - \frac{x^2}{2n} \leq w \leq x$ . Ainsi,  $0 \leq x - w \leq \frac{x^2}{2n}$ . Ensuite, en utilisant  $1 - e^{-s} \leq s$  pour  $s \geq 0$  :

$$e^x - f_n(x) = e^x (1 - e^{-(x-w)}) \in \left[ 0, e^x (x - w) \right].$$

**Donc**  $0 \leq e^x - f_n(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2n}$ .

4. Sur  $[0, a]$ , on en déduit  $\sup_{[0, a]} |e^x - f_n(x)| \leq \frac{a^2 e^a}{2n} \rightarrow 0$ . **La convergence est uniforme sur tout segment  $[0, a]$ .**
5. On a  $f_n(n) = 2^n$ , donc  $|\exp - f_n|_\infty \geq e^n - 2^n = e^n(1 - (2/e)^n) \rightarrow +\infty$ . **La convergence n'est pas uniforme sur  $[0, +\infty[$ .**
6. Première méthode : la convergence est uniforme sur le segment  $[0, 1]$ , donc l'intégrale tend vers  $\int_0^1 e^x dx = e - 1$ . Deuxième méthode : un calcul direct donne

$$\int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx = \frac{n}{n+1} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1 \right].$$

Comme  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \rightarrow e$ , **la limite vaut  $e - 1$ .**

## **Corrigé de l'exercice 8 : Le logarithme comme limite**

---

1. On écrit  $x^{1/n} = e^h$  avec  $h = \frac{\ln x}{n} \rightarrow 0$ . Si  $x = 1$ ,  $f_n(1) = 0 = \ln 1$ . Sinon,  $f_n(x) = \ln x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$ , et  $\frac{e^h - 1}{h} \rightarrow 1$ . **Donc  $f_n(x) \rightarrow \ln x$ .**
2. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 donne  $e^t - 1 - t = \int_0^t (t - s) e^s ds$ . Sur l'intervalle d'intégration,  $e^s \leq e^{|t|}$  et  $(t - s)$  garde un signe constant. Par conséquent :

$$|e^t - 1 - t| \leq e^{|t|} \left| \int_0^t (t - s) ds \right| = \frac{t^2}{2} e^{|t|}.$$

**L'inégalité est démontrée.**

3. Soit  $x \in [a, b]$  et  $t = \frac{\ln x}{n}$ . Alors  $|\ln x| \leq M$  et  $f_n(x) - \ln x = n(e^t - 1 - t)$ .

D'après la question 2 :

$$|f_n(x) - \ln x| \leq n \cdot \frac{(\ln x)^2}{2n^2} e^{|\ln x|/n} \leq \frac{M^2 e^M}{2n}.$$

**La convergence est uniforme sur tout segment de  $]0, +\infty[$ .**

4. On a  $f_n(x_n) = n(e^{-n} - 1)$  et  $\ln x_n = -n^2$ . Donc  $f_n(x_n) - \ln x_n = n e^{-n} - n + n^2 \geq n^2 - n$ , qui tend vers  $+\infty$ . **La convergence n'est pas uniforme sur  $]0, 1]$ .**
5. Le segment  $[1, e]$  est inclus dans  $]0, +\infty[$ , donc la convergence y est uniforme et les fonctions sont continues. Par le théorème d'intégration sur un segment :

$$\lim \int_1^e f_n = \int_1^e \ln x \, dx = \left[ x \ln x - x \right]_1^e = 0 - (-1) = 1.$$

**La limite vaut 1.**

## **Corrigé de l'exercice 9 : Utiliser le théorème de la double limite**

1. Si  $0 \leq x < 1$ ,  $x^n \rightarrow 0$  donc  $f_n(x) \rightarrow 0$ . Pour  $x = 1$ ,  $f_n(1) = \frac{1}{2}$ . Enfin, pour  $x > 1$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{1+x^{-n}} \rightarrow 1$ . **La limite simple vaut 0 sur  $[0, 1[$ ,  $\frac{1}{2}$  en 1 et 1 sur  $]1, +\infty[$ .** Elle est discontinue en 1, alors que les  $f_n$  sont continues. **La convergence n'est donc pas uniforme sur  $[0, +\infty[$ .**
2. Le point 1 est adhérent à  $[0, 1[$ . Pour tout  $n$ ,  $f_n(x) \rightarrow \ell_n = \frac{1}{2}$  quand  $x \rightarrow 1^-$ . Supposons la convergence uniforme sur  $[0, 1[$ . Le théorème de la double limite donne alors  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim \ell_n = \frac{1}{2}$ . Or  $f$  est nulle sur  $[0, 1[$ . **Cette contradiction prouve que la convergence n'est pas uniforme sur  $[0, 1[$ .**
3. Pour  $n \geq 2$ ,  $x_n \in [0, 1[$  et  $x_n^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e^{-1}$ . Donc  $f_n(x_n) \rightarrow \frac{e^{-1}}{1+e^{-1}} = \frac{1}{e+1}$ . **Ainsi,  $|f_n - f|_{\infty, [0, 1[} \geq f_n(x_n)$  ne tend pas vers 0.**
4. Sur  $[0, a]$ ,  $0 \leq f_n(x) \leq x^n \leq a^n$ , qui tend vers 0. Sur  $[b, +\infty[$ ,

$0 \leq 1 - f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+b^n}$ , qui tend vers 0. **La convergence est uniforme sur  $[0,a]$  et sur  $[b,+\infty[$ .**

**Point de méthode :** le théorème de la double limite est l'outil adapté quand la limite est continue sur l'intervalle étudié, mais que les  $f_n$  ont un comportement différent au bord.

## Corrigé de l'exercice 10 : Régularisation de la valeur absolue

1. On a  $f_n(x) \geq \sqrt{x^2} = |x|$ . Ensuite, par la quantité conjuguée :

$$f_n(x) - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{f_n(x) + |x|} = \frac{1/n^2}{f_n(x) + |x|} \leq \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n},$$

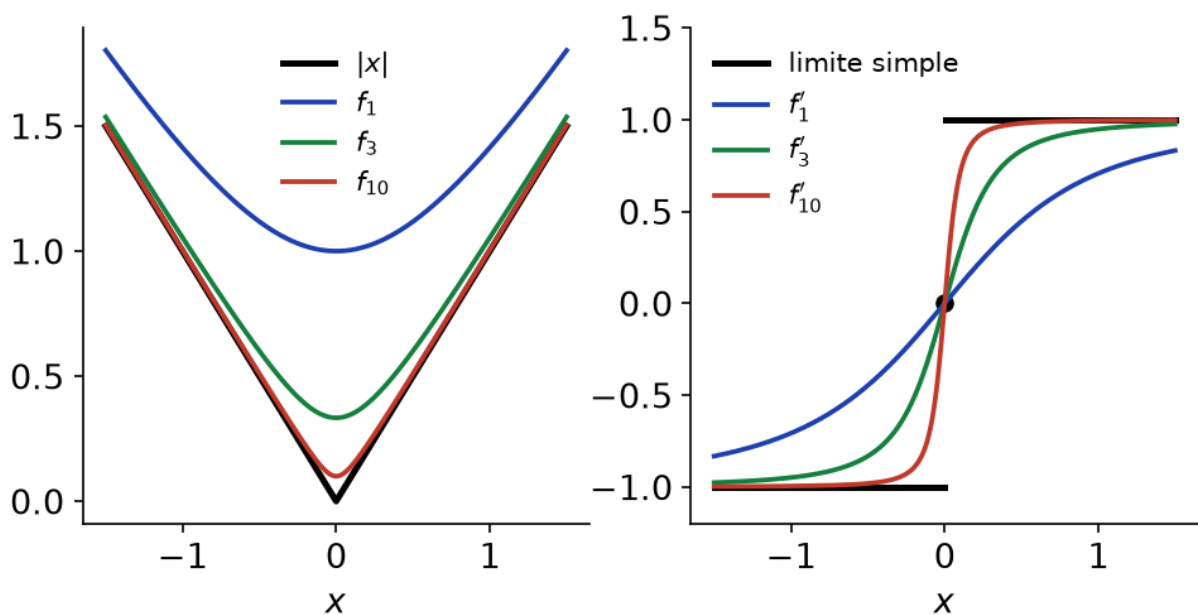
car  $f_n(x) \geq \frac{1}{n}$ . **Donc  $\|f_n - |\cdot|\|_\infty \leq \frac{1}{n}$  : la convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}$ .**

2. La fonction  $x \rightarrow x^2 + \frac{1}{n^2}$  est de classe  $C^1$  et strictement positive, et la racine carrée est  $C^1$  sur  $]0,+\infty[$ . Donc chaque  $f_n$  est de classe  $C^1$ . Cependant, **la limite  $|x|$  n'est pas dérivable en 0**. À retenir : la convergence uniforme ne conserve pas la dérivabilité.

3. On a  $f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n^2}}$ . Ainsi,  $f'_n(0) = 0$ , et pour  $x \neq 0$ ,  $f'_n(x) \rightarrow \frac{x}{|x|}$ . **La limite simple est la fonction signe (nulle en 0)**. Elle est discontinue en 0, alors que les  $f'_n$  sont continues : **la convergence n'est pas uniforme sur  $\mathbb{R}$ .**

4. La fonction  $f'_n$  est croissante, car  $f''_n(x) = \frac{1/n^2}{(x^2 + 1/n^2)^{3/2}} > 0$ . Pour  $x \geq a$ , on a donc  $0 \leq 1 - f'_n(x) \leq 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1/n^2}}$ , et ce majorant tend vers 0. **La convergence de  $(f'_n)$  vers 1 est uniforme sur  $[a,+\infty[$ .** On retrouve le théorème de dérivation : sur  $]0,+\infty[$ , la limite  $x \rightarrow x$  est  $C^1$  de dérivée 1.

La figure ci-dessous illustre les deux phénomènes. À gauche, les  $f_n$  se collent uniformément à  $|x|$ . À droite, les dérivées convergent vers une fonction discontinue.



## Corrigé de l'exercice 11 : Régularisation de la partie positive

1. Si  $x \leq 0$ , alors  $0 < e^{nx} \leq 1$ , donc  $0 < f_n(x) - x^+ = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{nx}) \leq \frac{\ln 2}{n}$ , avec égalité en 0. Si  $x > 0$ , on factorise  $e^{nx}$  :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \ln(e^{nx}(1 + e^{-nx})) = x + \frac{1}{n} \ln(1 + e^{-nx}).$$

Donc  $0 < f_n(x) - x^+ < \frac{\ln 2}{n}$ . **Finalement,  $|f_n - x^+|_\infty = \frac{\ln 2}{n}$ , et la convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}$ .**

2. On a  $f'_n(x) = \frac{e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \frac{1}{1 + e^{-nx}}$ . Cette suite tend vers 0 si  $x < 0$ , vers  $\frac{1}{2}$  si  $x = 0$  et vers 1 si  $x > 0$ . **La limite simple est discontinue en 0, donc la convergence n'est pas uniforme sur  $\mathbb{R}$ .**

3. Pour  $x \geq a$ ,  $0 \leq 1 - f'_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-nx}} \leq e^{-na}$ . Pour  $x \leq -a$ ,  $0 \leq f'_n(x) = \frac{1}{1 + e^{-nx}} \leq \frac{1}{1 + e^{na}} \leq e^{-na}$ . **Dans les deux cas, la convergence est uniforme, avec un majorant  $e^{-na} \rightarrow 0$ .**

4. Sur  $]0, +\infty[$ , les  $f_n$  sont  $C^1$ , convergent simplement, et leurs dérivées convergent uniformément sur tout segment. Le théorème de dérivation montre que  $x^+$  est  $C^1$  de dérivée 1 sur  $]0, +\infty[$ , et de dérivée 0 sur  $] -\infty, 0[$ . **Sur  $\mathbb{R}$ , le théorème ne s'applique pas** : la convergence uniforme des dérivées sur  $[-1, 1]$  rendrait leur limite continue, ce qui est faux.

D'ailleurs,  $x^+$  n'est pas dérivable en 0.

## Corrigé de l'exercice 12 : Dérivées successives d'une limite

---

1. Soit  $n_0$  tel que  $|u_n - u|_\infty \leq 1$  pour  $n \geq n_0$ . Alors  $|u_n|_\infty \leq |u|_\infty + 1$ . Pour  $n \geq n_0$  et  $x \in [0, a]$  :

$$|u_n v_n - uv| \leq |u_n| |v_n - v| + |v| |u_n - u| \leq (|u|_\infty + 1) |v_n - v|_\infty + |v|_\infty |u_n - u|_\infty.$$

**Le majorant tend vers 0 :  $(u_n v_n)$  converge uniformément vers  $uv$ .**

2. Pour tout entier  $m$ , la dérivée de  $(1 + \frac{x}{n})^m$  est  $\frac{m}{n}(1 + \frac{x}{n})^{m-1}$ . Par récurrence sur  $k \leq n$  :

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} (1 + \frac{x}{n})^{n-k} = c_{n,k} (1 + \frac{x}{n})^{n-k}$$

**La formule est établie.**

3. On écrit  $f_n^{(k)} = c_{n,k} \cdot f_n \cdot w_n$  avec  $w_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^{-k}$ . D'abord,  $c_{n,k} \rightarrow 1$ , car c'est un produit de  $k$  facteurs qui tendent vers 1. Ensuite,  $w_n$  est décroissante, donc

$$0 \leq 1 - w_n(x) \leq 1 - (1 + \frac{a}{n})^{-k} \text{ sur } [0, a], \text{ qui tend vers 0 : } w_n \rightarrow 1 \text{ uniformément.}$$

Enfin,  $f_n \rightarrow \exp$  uniformément sur  $[0, a]$ . En appliquant deux fois la question 1,  $(f_n^{(k)})$  **converge uniformément vers  $\exp$  sur  $[0, a]$ .**

4. Les  $f_n$  sont de classe  $C^\infty$ . Pour tout  $k$ , les suites  $(f_n^{(j)})$ ,  $j \leq k$ , convergent (uniformément) vers  $\exp$  sur  $[0, a]$ . Le théorème de dérivation de classe  $C^k$  montre que **la limite  $\exp$  est de classe  $C^k$  sur  $[0, a]$  avec  $\exp^{(k)} = \exp$ , pour tout  $k$  et tout  $a$ .**

## Corrigé de l'exercice 13 : Composition et convergence uniforme

---

1. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par continuité uniforme de  $g$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $|y - z| \leq \eta$  entraîne  $|g(y) - g(z)| \leq \varepsilon$ . Ensuite, il existe  $N$  tel que  $|f_n - f|_\infty \leq \eta$  pour  $n \geq N$ . Pour

ces  $n$  et tout  $x \in I$ ,  $|g(f_n(x)) - g(f(x))| \leq \varepsilon$ . **Donc**  $g \circ f_n \rightarrow g \circ f$  **uniformément sur**  $I$ .

- On a  $(x + \frac{1}{n})^2 - x^2 = \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$ , qui n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}$ . **La convergence n'est pas uniforme sur**  $\mathbb{R}$ , alors que  $f_n \rightarrow \text{id}$  uniformément. Sur  $[a, b]$ , l'écart est majoré par  $\frac{2\max(|a|, |b|)}{n} + \frac{1}{n^2}$ . **La convergence est donc uniforme sur tout segment.** Ici,  $g$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction sinus est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue. De plus, l'exercice 10 montre que  $\sqrt{x^2 + 1/n^2} \rightarrow |x|$  uniformément sur  $\mathbb{R}$ . **La question 1 donne la convergence uniforme de**  $\sin\sqrt{x^2 + 1/n^2}$  **vers**  $\sin|x|$ .
- La fonction  $f$  est continue sur un segment, donc bornée par un réel  $M$ . Soit  $n_0$  tel que  $|f_n - f|_\infty \leq 1$  pour  $n \geq n_0$ . Alors toutes les valeurs de  $f$  et des  $f_n$ ,  $n \geq n_0$ , sont dans  $K = [-M-1, M+1]$ . D'après le théorème de Heine,  $g$  est uniformément continue sur  $K$ . **On reprend alors l'argument de la question 1 avec**  $g$  **restreinte à**  $K$ .

## Corrigé de l'exercice 14 : Limites d'intégrales sur un segment

- Posons  $k(u) = \frac{u^3}{6} - u + \sin u$ . On a  $k'(u) = \frac{u^2}{2} - 1 + \cos u \geq 0$ , car  $\cos u \geq 1 - \frac{u^2}{2}$ . Comme  $k(0) = 0$ , on obtient  $u - \sin u \leq \frac{u^3}{6}$ . De plus,  $u - \sin u \geq 0$  pour  $u \geq 0$ . Avec  $u = x/n$  :

$$|n \sin \frac{x}{n} - x| \leq n \cdot \frac{x^3}{6n^3} \leq \frac{\pi^3}{6n^2} \text{ sur } [0, \pi].$$

La convergence est uniforme sur le segment  $[0, \pi]$ , donc l'intégrale tend vers  $\int_0^\pi x \, dx = \frac{\pi^2}{2}$ .

Directement,  $\int_0^\pi n \sin \frac{x}{n} \, dx = n^2 (1 - \cos \frac{\pi}{n}) = 2n^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \sim 2n^2 \cdot \frac{\pi^2}{4n^2}$ . **Les deux méthodes donnent**  $\frac{\pi^2}{2}$ .

- Sur  $[0, 1]$ ,  $0 \leq 1 - \frac{n}{n+x} = \frac{x}{n+x} \leq \frac{1}{n}$ . La convergence vers 1 est uniforme. Par conséquent,  $\left| \int_0^1 \frac{n e^x}{n+x} \, dx - \int_0^1 e^x \, dx \right| \leq \frac{e}{n}$ . **La limite vaut**  $e - 1$ .

3. La fonction  $x \rightarrow \frac{1}{1+x^n}$  tend vers 1 sur  $[0,1[$  et vaut  $\frac{1}{2}$  en 1. Comme cette limite est discontinue, **la convergence n'est pas uniforme sur  $[0,1]$** . Néanmoins,  
 $0 \leq 1 - \frac{1}{1+x^n} = \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$ . En intégrant,  $0 \leq 1 - J_n \leq \frac{1}{n+1}$ . **Donc  $J_n \rightarrow 1$ .**

## **Corrigé de l'exercice 15 : Approximation par des fonctions en escalier**

---

1. Soit  $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ . Par croissance du carré sur  $[0,1]$  :

$$0 \leq x^2 - \frac{k^2}{n^2} \leq \frac{(k+1)^2 - k^2}{n^2} = \frac{2k+1}{n^2} \leq \frac{2n-1}{n^2} \leq \frac{2}{n}.$$

En  $x = 1$ , l'écart est nul. **Donc  $|x^2 - \varphi_n|_\infty \leq \frac{2}{n}$ .**

2. On a  $\int_0^1 \varphi_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{k^2}{n^2} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$ . Cette quantité tend vers  $\frac{1}{3}$ .

Par ailleurs,  $\left| \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 \varphi_n \right| \leq \frac{2}{n}$ . **Donc  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ .**

3. Par définition de la partie entière,  $\lfloor nx \rfloor \leq nx < \lfloor nx \rfloor + 1$ . En divisant par  $n$ ,  
 $0 \leq x - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \frac{1}{n}$ . **La convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}$** , et chaque fonction est en escalier sur tout segment.

4. Posons  $h = \frac{b-a}{n}$  et  $x_k = a + kh$ . On définit  $\psi_n(x) = f(x_k)$  sur  $[x_k, x_{k+1}[$ , pour  $0 \leq k \leq n-1$ , et  $\psi_n(b) = f(b)$ . Pour  $x \in [x_k, x_{k+1}[$ , on a  
 $|f(x) - \psi_n(x)| = |f(x) - f(x_k)| \leq L|x - x_k| \leq Lh$ . **Donc  $|f - \psi_n|_\infty \leq \frac{L(b-a)}{n}$ .**

## **Corrigé de l'exercice 16 : Polynômes de Bernstein**

---

1. La formule du binôme donne  $\sum_k b_{n,k}(x) = (x + 1 - x)^n = 1$ . Ensuite, on utilise

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \text{ pour } k \geq 1 :$$

$$\sum_{k=1}^n k b_{n,k}(x) = nx \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = nx.$$

De même,  $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$  pour  $k \geq 2$ , d'où

$$\sum_k k(k-1) b_{n,k}(x) = n(n-1)x^2.$$

2. On obtient directement  $B_n(1) = 1$  et  $B_n(x) = \frac{1}{n} \cdot nx = x$ . Ensuite,

$$\sum_k k^2 b_{n,k} = n(n-1)x^2 + nx, \text{ d'où :}$$

$$B_n(x^2) = \frac{n(n-1)x^2 + nx}{n^2} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.$$

Le maximum de  $x(1-x)$  sur  $[0,1]$  vaut  $\frac{1}{4}$ , atteint en  $\frac{1}{2}$ . **Donc**

$$\|B_n(x^2) - x^2\|_{\infty} = \frac{1}{4n}.$$

3. On développe le carré et on utilise la question 2 :

$$\sum_k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 b_{n,k} = \left(x^2 + \frac{x(1-x)}{n}\right) - 2x \cdot x + x^2 = \frac{x(1-x)}{n}.$$

**L'identité est établie.**

4. Notons  $A$  l'ensemble des  $k$  tels que  $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$ . Pour  $k \in A$ , on a  $1 \leq \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2$ .  
Les  $b_{n,k}(x)$  étant positifs :

$$\sum_{k \in A} b_{n,k}(x) \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 b_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

**La majoration est démontrée.**

5. D'après le théorème de Heine, il existe  $\delta > 0$  tel que  $|y - z| < \delta$  entraîne

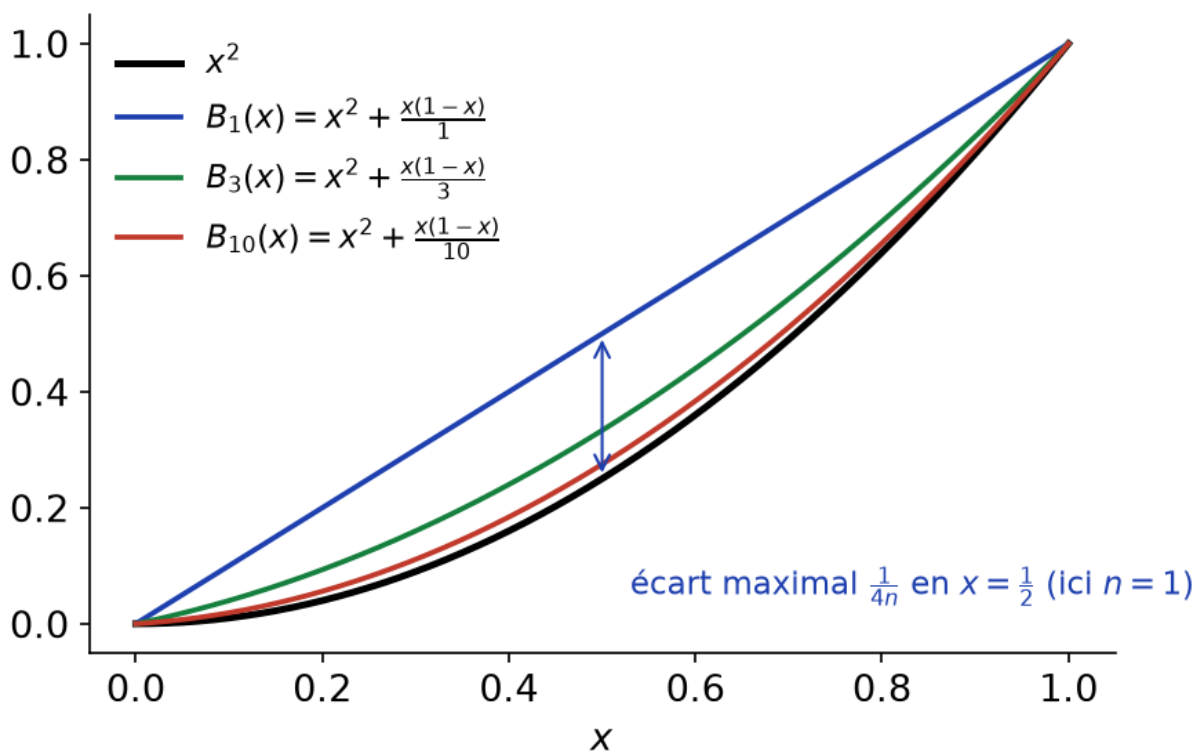
$$|f(y) - f(z)| \leq \varepsilon. \text{ Comme } \sum_k b_{n,k} = 1, \text{ on a}$$

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_k \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) b_{n,k}(x). \text{ Pour } k \notin A, \text{ chaque terme est majoré par } \varepsilon b_{n,k}(x). \text{ Pour } k \in A, \text{ il est majoré par } 2\|f\|_{\infty} b_{n,k}(x). \text{ Donc :}$$

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2|f|_\infty \cdot \frac{1}{4n\delta^2} = \varepsilon + \frac{|f|_\infty}{2n\delta^2}.$$

Pour  $n$  assez grand, le second terme est inférieur à  $\varepsilon$ . Ainsi,  $|B_n(f) - f|_\infty \rightarrow 0$  : c'est le théorème de Weierstrass sur  $[0,1]$ .

La figure ci-dessous représente  $x^2$  et ses polynômes de Bernstein. L'écart  $\frac{x(1-x)}{n}$  est maximal au milieu de l'intervalle et décroît comme  $\frac{1}{n}$ .



## Corrigé de l'exercice 17 : Moments nuls et théorème de Weierstrass

- Par linéarité de l'intégrale,  $\int_0^1 fP = 0$  pour tout polynôme  $P$ . D'après le théorème de Weierstrass, il existe des polynômes  $P_n$  convergeant uniformément vers  $f$  sur  $[0,1]$ . Alors

$|fP_n - f^2|_\infty \leq |f|_\infty |P_n - f|_\infty \rightarrow 0$ . Par le théorème d'intégration sur un segment,  
 $\int_0^1 f^2 = \lim \int_0^1 fP_n = 0$ . La fonction  $f^2$  est continue, positive et d'intégrale nulle. **Donc**  
 $f = 0$ .

2. Posons  $h(x) = x^2 f(x)$ , continue sur  $[0,1]$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$\int_0^1 h(x)x^k dx = \int_0^1 f(x)x^{k+2} dx = 0$ . D'après la question 1,  $h = 0$ , donc  $f(x) = 0$   
 pour  $x \in ]0,1]$ . Par continuité en 0,  $f(0) = 0$ . **Ainsi,  $f$  est nulle.**

3. On calcule  $\int_0^1 g = 2 - 3 + 1 = 0$  et  $\int_0^1 xg(x) dx = \frac{6}{4} - \frac{6}{3} + \frac{1}{2} = 0$ . **La fonction non nulle  $g$  a ses deux premiers moments nuls** : un nombre fini de moments nuls ne suffit pas, et c'est bien l'infinité des conditions qui permet d'utiliser Weierstrass.

## **Corrigé de l'exercice 18 : Approximation simultanée d'une fonction et de sa dérivée**

---

1. La fonction  $f'$  est continue sur  $[a,b]$ . D'après le théorème de Weierstrass, il existe des polynômes  $Q_n$  tels que  $|Q_n - f'|_\infty \rightarrow 0$ . On pose  $P_n(x) = f(a) + \int_a^x Q_n(t) dt$ , qui est un polynôme. Alors  $P'_n = Q_n$  et  $P_n(a) = f(a)$ . De plus,  $f(x) = f(a) + \int_a^x f'$ , donc :

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| \int_a^x (Q_n - f') \right| \leq (b-a) |Q_n - f'|_\infty.$$

**Ainsi,  $P_n \rightarrow f$  et  $P'_n \rightarrow f'$  uniformément sur  $[a,b]$ .**

2. On approche  $f''$  par des polynômes  $R_n$ . On pose

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) R_n(t) dt. \text{ Alors } P''_n = R_n \text{ et}$$

$P'_n(x) = f'(a) + \int_a^x R_n$ . La formule de Taylor avec reste intégral donne les mêmes expressions pour  $f$  et  $f'$  avec  $f''$ . On obtient  $|P'_n - f'|_\infty \leq (b-a)|R_n - f''|_\infty$  et  $|P_n - f|_\infty \leq \frac{(b-a)^2}{2}|R_n - f''|_\infty$ .

3. Supposons que  $(P'_n)$  converge uniformément sur  $[-1,1]$ . Les  $P_n$  sont  $C^1$  et convergent simplement vers  $|x|$ . Le théorème de dérivation rendrait alors  $|x|$  de classe  $C^1$  sur  $[-1,1]$ . **C'est faux en 0, donc  $(P'_n)$  ne converge pas uniformément.**

## **Corrigé de l'exercice 19 : Limites uniformes de polynômes sur $\mathbb{R}$**

- Si  $P$  est de degré  $d \geq 1$ , de coefficient dominant  $a_d \neq 0$ , alors  $|P(x)| \sim |a_d||x|^d \rightarrow +\infty$  en  $+\infty$ . **Un polynôme borné sur  $\mathbb{R}$  est donc constant.**
- Soit  $N$  tel que  $|P_n - f|_\infty \leq \frac{1}{2}$  pour  $n \geq N$ . Pour  $n \geq N$ , l'inégalité triangulaire donne  $|P_n - P_N|_\infty \leq 1$ . Le polynôme  $P_n - P_N$  est donc borné, donc constant, égal à  $c_n = P_n(0) - P_N(0)$ . Comme  $P_n(0) \rightarrow f(0)$ , la suite  $(c_n)$  converge vers  $c = f(0) - P_N(0)$ . En passant à la limite simple dans  $P_n = P_N + c_n$ , on obtient  $f = P_N + c$ , **qui est polynomiale.**
- La fonction  $\exp$  n'est pas polynomiale : sinon, ses dérivées successives s'annuleraient à partir d'un certain rang, alors que  $\exp^{(k)} = \exp$  ne s'annule pas. **D'après la question 2,  $\exp$  n'est pas limite uniforme de polynômes sur  $\mathbb{R}$ .**
- L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre  $n$ , appliquée entre 0 et  $x \in [-a, a]$ , donne  $|e^x - T_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[-a, a]} \exp \leq \frac{a^{n+1}e^a}{(n+1)!}$ . Ce majorant tend vers 0, car  $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$ . **Sur tout segment,  $\exp$  est limite uniforme de polynômes**, en accord avec le théorème de Weierstrass. C'est donc bien le caractère non borné de  $\mathbb{R}$  qui empêche la convergence uniforme.

## **Corrigé de l'exercice 20 : Méthode de Picard pour**

## **l'exponentielle**

---

1. La formule est vraie pour  $n = 0$ . Si elle l'est au rang  $n$ , alors

$$f_{n+1}(x) = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}. \text{ La récurrence est établie.}$$

2. Pour  $x \in [0, a]$ , la série  $\sum \frac{x^k}{k!}$  converge d'après la règle de d'Alembert. On note  $F(x)$  sa somme. Ensuite, pour tout  $x \in [0, a]$  :

$$0 \leq F(x) - f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}.$$

Ce majorant est le reste d'une série convergente, donc il tend vers 0. **La convergence est uniforme sur  $[0, a]$ .**

3. Les  $f_n$  sont continues, donc  $F$  est continue comme limite uniforme. Pour  $x \in [0, a]$ , on a  $\left| \int_0^x f_n - \int_0^x F \right| \leq a |f_n - F|_{\infty} \rightarrow 0$ . En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient  $F(x) = 1 + \int_0^x F(t) dt$ .

4. La fonction  $F$  étant continue,  $x \rightarrow \int_0^x F$  est de classe  $C^1$  de dérivée  $F$ . Donc  $F$  est  $C^1$ ,  $F' = F$  et  $F(0) = 1$ . Alors  $(F e^{-x})' = (F' - F)e^{-x} = 0$ , donc  $F e^{-x}$  est constante, égale à 1. **Ainsi,  $F = \exp$  sur  $[0, a]$ .**

5. Pour  $n \geq 1$ ,  $f_n$  est  $C^1$  et  $f'_n = f_{n-1}$ . La suite  $(f_n)$  converge simplement vers  $F$  et  $(f'_n) = (f_{n-1})$  converge uniformément vers  $F$  sur  $[0, a]$ . **Le théorème de dérivation donne directement  $F$  de classe  $C^1$  et  $F' = F$ .**

## **Corrigé de l'exercice 21 : Problème : approximation**

## polynomiale de la racine carrée

---

1. On a  $p_1(x) = 0 + \frac{1}{2}(x - 0) = \frac{x}{2}$ . Ensuite,  $p_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{4}\right)$ . **Donc**  
 $p_1(x) = \frac{x}{2}$  **et**  $p_2(x) = x - \frac{x^2}{8}$ .
2. Comme  $x = s^2$ , on a  $e_{n+1} = s - p_n - \frac{1}{2}(s^2 - p_n^2) = (s - p_n)\left(1 - \frac{s + p_n}{2}\right)$ , en notant  $p_n = p_n(x)$ . Montrons par récurrence que  $0 \leq p_n \leq s$ . C'est vrai pour  $n = 0$ . Si c'est vrai au rang  $n$ , alors  $0 \leq s + p_n \leq 2s \leq 2$ , donc le facteur  $1 - \frac{s + p_n}{2}$  est dans  $[0,1]$ . Par conséquent,  $0 \leq e_{n+1} \leq e_n$ , c'est-à-dire  $p_n \leq p_{n+1} \leq s$ . **Ainsi,**  
 $0 \leq p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$  **pour tout**  $n$ .
3. Comme  $p_n \geq 0$ , le facteur vérifie  $1 - \frac{s + p_n}{2} \leq 1 - \frac{s}{2}$ . Donc  $0 \leq e_{n+1} \leq e_n\left(1 - \frac{s}{2}\right)$ . Avec  $e_0 = s$ , une récurrence immédiate donne  $0 \leq e_n \leq s\left(1 - \frac{s}{2}\right)^n$ .

### Questions 4 à 6

---

4. Pour  $n \geq 1$ , on dérive :

$$\varphi'_n(s) = \left(1 - \frac{s}{2}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{s}{2} - \frac{ns}{2}\right) = \left(1 - \frac{s}{2}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{(n+1)s}{2}\right).$$

Le maximum sur  $[0,1]$  est atteint en  $s_n = \frac{2}{n+1} \in ]0,1]$ . Il vaut

$$\varphi_n(s_n) = \frac{2}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq \frac{2}{n+1}. \text{ Pour } n = 0, \text{ l'inégalité } e_0 = s \leq 2 \text{ est aussi vraie.}$$

**Donc**  $\sup_{[0,1]} |\sqrt{x} - p_n(x)| \leq \frac{2}{n+1}$  : **la convergence est uniforme.**

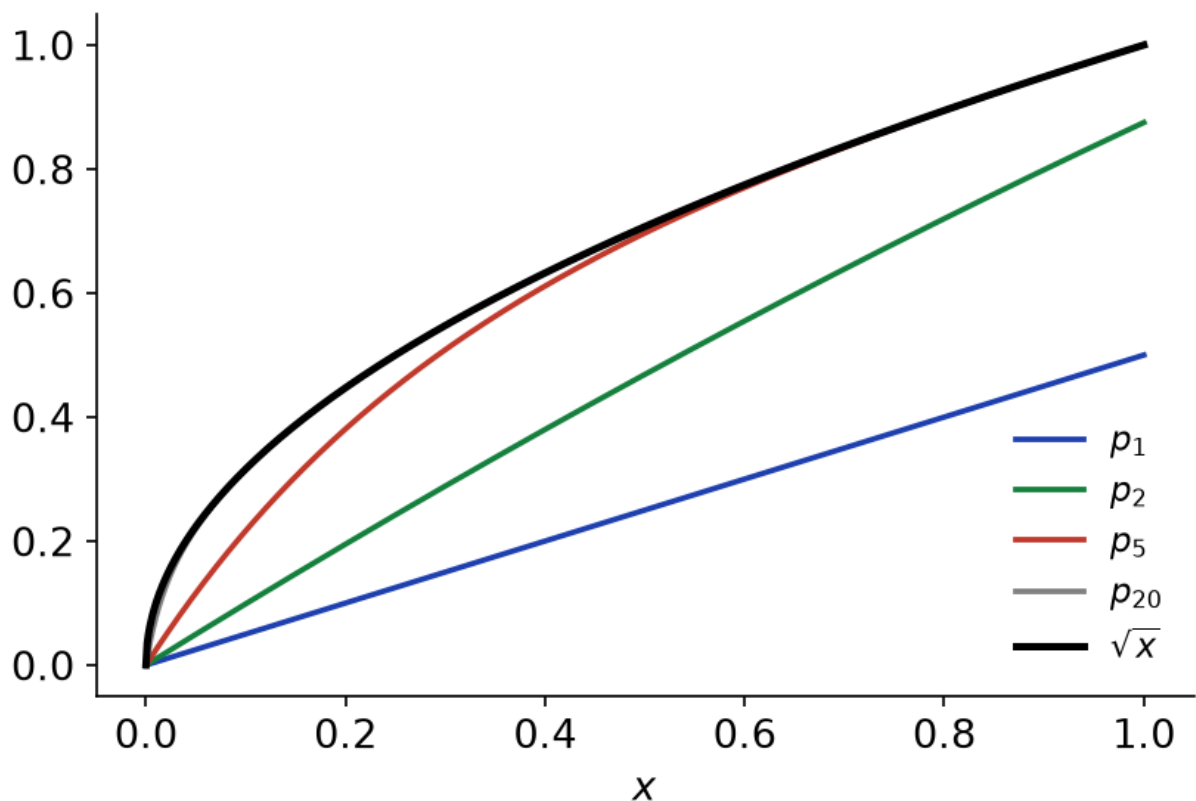
5. Pour  $x \in [-1,1]$ ,  $x^2 \in [0,1]$  et  $\sqrt{x^2} = |x|$ . Donc  $\left||x| - Q_n(x)\right| \leq \frac{2}{n+1}$ . Comme  $p_n$  est un polynôme,  $Q_n$  aussi. **Les  $Q_n$  convergent uniformément vers  $|x|$  sur  $[-1,1]$ .**

6. Pour  $x, c \in [-1,1]$ , on a  $y = \frac{x-c}{2} \in [-1,1]$  et  $|x-c| = 2|y|$ . Les polynômes  $x \rightarrow 2Q_n\left(\frac{x-c}{2}\right)$  vérifient donc  $\left||x-c| - 2Q_n\left(\frac{x-c}{2}\right)\right| \leq \frac{4}{n+1}$ . **La fonction  $|x-c|$  est limite uniforme de polynômes sur  $[-1,1]$ .**

## Question 7

7. Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après le théorème de Heine,  $f$  est uniformément continue. On choisit une subdivision de pas  $h$  assez petit pour que  $|f(y) - f(z)| \leq \varepsilon$  dès que  $|y - z| \leq h$ . Soit  $g$  la fonction affine par morceaux qui interpole  $f$  aux points de la subdivision. Sur chaque morceau  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $g(x)$  est entre  $f(x_k)$  et  $f(x_{k+1})$ , donc  $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ . Ensuite, on écrit  $g(x) = \alpha x + \beta + \sum_{i=1}^m \lambda_i |x - c_i|$  et on remplace chaque  $|x - c_i|$  par un polynôme à moins de  $\frac{\varepsilon}{1 + \sum_{i=1}^m |\lambda_i|}$  près. On obtient un polynôme  $P$  avec  $|g - P|_\infty \leq \varepsilon$ .  
**Finalement,  $|f - P|_\infty \leq 2\varepsilon$  : c'est le théorème de Weierstrass sur  $[-1,1]$ .**

La figure ci-dessous montre la montée des polynômes  $p_n$  vers  $\sqrt{x}$ . La convergence est lente près de 0, là où la racine carrée a une tangente verticale ; c'est là que se situe le maximum de l'écart, en  $x = s_n^2$ .



**Point de méthode :** ce problème fournit une démonstration complète et constructive du théorème de Weierstrass. On passe par trois étapes : la racine carrée, puis la valeur absolue, puis les fonctions affines par morceaux.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

## **Pour aller plus loin en maths spé**

---

- Le cours : [suites de fonctions, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur suites de fonctions](#)
- À maîtriser avant : [Normes, espaces vectoriels normés et suites](#)
- Chapitre précédent : [Séries numériques et vectorielles](#)
- Chapitre suivant : [Séries de fonctions](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)