

Suites

Exercice 1 :

Résoudre l'équation :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^8} = 0$$

Indication : calculer la somme puis remarquer que si x est solution alors $x < 0$.

Tout d'abord cette somme existe pour $x \neq 0$.

C'est la somme d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{x}$.

$$S = \frac{\frac{1}{x^9} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1}$$

$$S = \frac{\frac{1-x^8}{x^9}}{\frac{1-x}{x}} = 0$$

$$\frac{1-x^8}{x^9} \times \frac{x}{1-x} = 0$$

$$\frac{x(1-x^8)}{x^9(1-x)} = 0$$

$$\frac{1-x^8}{x^8(1-x)} = 0$$

$1-x^8 = 0$ car un dénominateur est non nul.

$$x^8 = 1$$

$$S = \{-1; 1\}$$

Exercice 2 :

Calculer la somme suivante :

$$S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots + 2005^2 - 2006^2.$$

Indication : regrouper les termes par deux.

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 2005^2 + 2006^2 - 2(2^2 + 4^2 + \dots + 2006^2)$$

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 2005^2 + 2006^2 - 2[2^2(1^2 + 2^2 + \dots + 1003^2)]$$

Vous pouvez montrer par récurrence que : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
donc

$$S = \frac{2005 \times (2005+1)(2 \times 2005+1)}{6} - 8 \times \frac{1003 \times (1003+1)(2 \times 1003+1)}{6}$$

$$S = 2688727055 - 2692078747$$

$$S =$$

Exercice 3 :

Calculer les sommes suivantes :

$I_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ somme des premiers entiers naturels impairs.

Notons $U_n = 2n+1$ (c'est une suite arithmétique de raison $r = 2$)

alors $I_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$

$$I_n = \frac{n(U_0 + U_{n-1})}{2} = \frac{n(1 + 2n-1)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

$P_n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ somme des premiers entiers naturels pairs.

Notons $V_n = 2n$ (C'est une suite arithmétique de raison $r = 2$)

alors $P_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$

$$P_n = \frac{n(V_1 + V_n)}{2} = \frac{n(2 + 2n)}{2} = n(n+1)$$

Exercice 4 :

Soit (U_n) la suite définie par :

$$U_n = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 5n .$$

1. Calculer U_0, U_1, U_2, U_3 .

$U_0 = 0^4 - 6 \times 0^3 + 11 \times 0^2 - 5 \times 0 = 0$. La suite (U_n) est-elle arithmétique ?

Il semble que la suite soit arithmétique de raison 1.

Exercice 5 :

On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 2^n - n$.

1. Calculer U_0, U_1, U_2 .

$$U_0 = 2^0 - 0 = 1$$

✖ 2. La suite est-elle arithmétique ? Géométrique ?

calculons les termes suivants par curiosité :

$$U_3 = 2^3 - 3 = 5$$

$$U_4 = 2^4 - 4 = 12$$

$$U_5 = 2^5 - 5 = 27$$

On remarque que cette suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

Exercice 6 :

1. Soit (W_n) la suite définie par $W_n = U_n + V_n$.

Démontrer que (W_n) est une suite géométrique.

$$\begin{aligned} W_n &= U_n + V_n \\ &= \frac{3 \times 2^n - 4n + 3 + 3 \times 2^n + 4n - 3}{2} \\ &= \frac{3 \times 2^n + 3 \times 2^n}{2} \\ &= \frac{2 \times 3 \times 2^n}{2} = 3 \times 2^n \end{aligned}$$

et

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{3 \times 2^{n+1}}{3 \times 2^n} = 2$$

ainsi

$$W_{n+1} = 2W_n$$

donc **la suite (W_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.**

Exercice 7 :

1. Calculer U_2, U_3, U_4 .

$$U_2 = qU_1 = -2 \times 1 =$$

$$U_3 = qU_2 = -2 \times (-2) = 4$$

$$U_4 = qU_3 = -2 \times 4 =$$

2. Calculer U_{20} .

$$U_{20} = U_1 \times q^{19} = (-2)^{19} = -524288$$

3. Calculer la somme $S = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{20}$.

$$S = \frac{U_{21} - U_1}{q - 1} = \frac{(-2)^{20} - 1}{-2 - 1} = -349\,525.$$

Exercice 8 :

1. A l'aide de votre calculatrice, calculer $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_{100}, U_{1000}, U_{100000}$.

Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation de la suite ? Pour une éventuelle limite ?

La suite (U_n) est décroissante vers 0.

2. Démontrer que pour tout n non nul,

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} .$$

Nous avons :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \text{ et utilisons l'identité remarquable } a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

3. En déduire le sens de variation de la suite (U_n) .

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < 1$$

or $U_n > 0$ donc en multipliant l'inégalité par $U_n > 0$, nous obtenons :

$$U_{n+1} < U_n$$

Conclusion : la suite (U_n) est décroissante .

4. En utilisant le résultat de la question 2., montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$U_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Nous avons $\sqrt{n} + \sqrt{n} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{n} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow U_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

5. En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

Nous avons donc :

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$$

donc d'après le théorème des gendarmes , on en conclue que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

Exercice 9 :

La suite (U_n) est arithmétique de raison r .

On sait que $U_{50} = 406$ et $U_{100} = 806$.

1. Calculer la raison r et U_0 .

$$U_{100} = U_{50} + (100 - 50)r$$

$$806 = 406 + 50r$$

$$r = \frac{806 - 406}{50}$$

$$r =$$

Pour le terme

$$406 = U_0 + 50 \times 8$$

$$U_0 = 406 - 50 \times 8 =$$

2. Calculer la somme $S = U_{50} + U_{51} + U_{52} + \dots + U_{100}$.

D'après le cours :

$$\sum_{k=p}^n U_k = (n-p+1) \frac{U_p + U_n}{2}$$

donc :

$$\sum_{k=50}^{100} U_k = (100-50+1) \frac{U_{50} + U_{100}}{2}$$

$$\sum_{k=50}^{100} U_k = 51 \frac{406 + 806}{2}$$

$$\sum_{k=50}^{100} U_k = 30906$$

Conclusion : $S =$

Exercice 10 :

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 998 + 999$$

On additionne deux fois cette somme :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 998 + 999$$

$$999 + 998 + \dots + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

1000+1000+1000+.....+1000 Il y a 999 fois 1000

donc

$$S = \frac{999 \times 1000}{2} = \frac{999000}{2} = 499500$$

Exercice 11 :

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel non nul par la relation : $U_n = 3n - 2$.

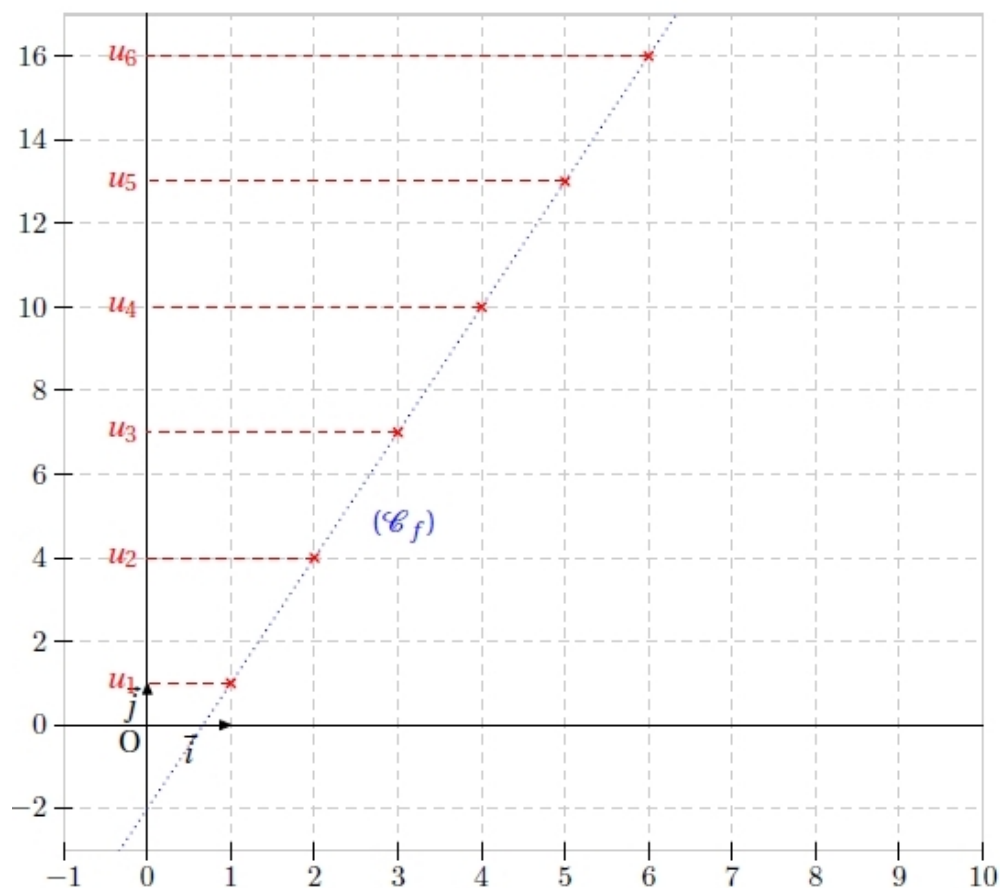
1. Démontrer que la suite (U_n) est arithmétique de raison r que l'on précisera. Préciser son sens de variation.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= 3(n+1) - 2 - 3n + 2 \\ &= 3n + 3 - 2 - 3n + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

c'est une suite arithmétique de raison 3 et elle est donc croissante puisque $U_{n+1} - U_n > 0$

2. Représenter graphiquement la suite (U_n) .

On se limitera aux cinq ou six premiers termes.



Exercice 12 :

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \dots + 4096.$$

C'est la somme d'une suite géométrique de raison $q = -2$.

$$S = \frac{\text{suivant} - \text{premier}}{q - 1} = \frac{-8192 - 1}{-2 - 1}$$

$$S = \frac{-8193}{-3} = 2731$$

Exercice 13 :

1. A quelle page en est Jean ?

Notons n la page où en est Jean.

Nous avons

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = 351$$

Nous sommes amenés à résoudre l'équation suivante :

$$n(n+1) = 2 \times 351$$

$$n^2 + n - 702 = 0$$

Calculons la valeur du discriminant :

$$\Delta = 1^2 + 4 \times 702 =$$

Le discriminant est strictement positif, il y a donc deux racines réelles distinctes.

$$n_1 = \frac{-1 + \sqrt{2809}}{2} ; n_2 = \frac{-1 - \sqrt{2809}}{2}$$



Conclusion : Jean a lu 26 pages, il en est donc à la 27ème page.

2. Combien de pages comporte ce livre ?

Nous avons $27 + 28 + \dots + n = 469$

$$\frac{(n - 27 + 1)(27 + n)}{2} = 469$$

$$\frac{(n - 26)(27 + n)}{2} = 469$$

$$n^2 + n - 26 \times 27 =$$

$$n^2 + n - 702 = 938$$

$$n^2 + n - 1640 = 0$$

Calculons la valeur du discriminant :

$$\Delta = 1^2 + 4 \times 1640 =$$

Le discriminant est strictement positif, il y a donc deux racines réelles distinctes .

$$n_1 = \frac{-1 + \sqrt{6561}}{2} ; n_2 = \frac{-1 - \sqrt{6561}}{2}$$

$$n_1 = 40 ; n_2 = -41$$

Conclusion : ce livre a 40 pages .

Remarque : on supposera que le livre commence à la page n° 1.

Exercice 14 :

Déterminer un nombre x tel que les trois nombres 25, x et 16 soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison négative.

Nous avons $25q = x$ et $xq = 16$

$$\text{donc } \frac{x}{25} = \frac{16}{x}$$

En utilisant le produit en croix :

$$x^2 = 25 \times 16$$

$$x^2 = 400$$

Il y a deux possibilités :

$$x = \sqrt{400} \text{ ou } x = -\sqrt{400}$$

$$\text{soit } x = 20 \text{ ou } x = -20$$

Or la raison q est négative donc x étant le second des trois termes, il est forcément négatif.

Conclusion : $x = -20$.



Exercice 15 :

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans.

On lui propose deux type de bail :

1er contrat : un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail.

$$U_n = 200 + 5n$$

2ème contrat : un loyer de 200 € pour le premier mois puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

$$V_n = 200 + 200 \times 0,02n = 200 + 4n$$

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis celui du troisième mois.

$$U_1 = 200 + 5 = 205 \quad \text{et} \quad V_1 = 200 + 4 = 204$$

2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, c'est-à-dire du 36ème mois.

$$U_{35} = 200 + 5 \times 35 = \quad \text{et} \quad V_{35} = 200 + 4 \times 35 =$$

3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? Justifier à l'aide de calculs.

Vocabulaire : un bail est un contrat de location.

Le deuxième est le plus avantageux de 35 euros.



Exercice 16 :

1. ABC est un triangle rectangle.

Son plus petit côté est 1 et les longueurs de ses côtés sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Déterminer ces longueurs.

$$(2n+1)^2 = 1^2 + (n+1)^2$$

$$4n^2 + 4n + 1 = 1 + n^2 + 2n + 1$$

$$4n^2 + 4n + 1 = n^2 + 2n + 2$$

$$4n^2 + 4n + 1 - n^2 - 2n - 2 = 0$$



Calculons la valeur du discriminant :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16$$

Le discriminant est strictement positif donc il existe deux racines réelles distinctes.

$$n_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; n_2 =$$

Donc

$$n+1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad 2n+1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

Conclusion : les trois nombres consécutifs sont $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$.

2. ABC est un triangle rectangle.

Son plus petit côté est 1 et les longueurs de ses côtés sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Déterminer ces longueurs.

$$(q^2)^2 = (q)^2 + 1^2$$

$$q^4 = q^2 + 1$$

$$q^4 - q^2 - 1 = 0$$

Calculons la valeur du discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{donc} \quad q_2 \quad \text{ne convient pas car la raison serait négative.}$$

Ainsi

$$q_1^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 5 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Conclusion : les trois nombres sont ✗.

Exercice 17 :

On considère la suite (U_n) définie par récurrence par :

$$\{ U_0 =$$

1. Calculer U_2, U_3, U_4 .

$$U_2 = 6U_1 - 5U_0 = 6 \times 2 - 5 \times 1 =$$

$$U_3 = 6U_2 - 5U_1 = 6 \times 7 - 5 \times 2 =$$

$$U_4 = 6U_3 - 5U_2 = 6 \times 32 - 5 \times 7 =$$

2. Résoudre l'équation du second degré suivante : $x^2 = 6x - 5$.

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Calculons la valeur du discriminant :

$$\Delta = 36 - 20 = 16 = 4^2$$

$\Delta > 0$, il y a donc deux racines réelles distinctes.

3. Déterminer deux réels A et B tels que : $U_n = A \times 5^n + B$.

$$\{ U_0 =$$

$$\{ 1 =$$

$$\{ 1 =$$

Effectuons la soustraction de la deuxième ligne et de la première.

$$\{ 1 =$$

$$\{ 1 =$$

$$\{ B =$$

Conclusion : $U_n = \frac{5^n}{4} + \frac{3}{4}$

Remarque : il faudrait montrer cette égalité par récurrence...

4. En déduire U_{10} .

$$U_{10} = \frac{5^{10}}{4} + \frac{3}{4}$$



Exercice 18 :

Déterminer la limite de la suite (U_n) définie par :

 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n}{n} = 5 \quad \text{car les fonctions cos et sin sont bornées par -1 et 1.}$$

Exercice 19 :

On considère la suite (U_n) définie par récurrence par :

$$\{ U_0 =$$

1. Calculer U_1, U_2, U_3 .

$$U_1 = \frac{1}{1+U_0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$U_2 = \frac{1}{1+U_1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$U_3 = \frac{1}{1+U_2} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

2. Démontrer par récurrence que $0 \leq U_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit la propriété de récurrence :

P(n) : " pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 1$ "

Initialisation :

$$0 \leq U_0 \leq 1 \quad \text{car } U_0 = 1.$$

Hérédité :

supposons qu'il existe n tel que $P(n)$ soit vraie.

Nous avons donc

$$0 \leq U_n \leq 1$$

$$0+1 \leq U_n+1 \leq 1+1$$

$$1 \leq U_n+1 \leq 2$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{U_n+1} \leq 1 \quad \text{car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}^+.$$

$$\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$$

donc

$$0 \leq U_{n+1} \leq 1$$

ainsi la propriété reste vraie au rang $n+1$

Conclusion :

$$\begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1). \end{cases}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 1$$

Exercice 20 :

Calculer la valeur exacte des nombres suivants :

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{38}}$$

c'est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $U_0 = 1$

$$A = U_0 + U_1 + \dots + U_{38}$$

$$A = \frac{\text{suivant} - \text{premier}}{\text{raison} - 1} = \frac{\frac{1}{2^{39}} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$A = \frac{\frac{1}{2^{39}} - 1}{-\frac{1}{2}}$$

$$A = -2\left(\frac{1}{2^{39}} - 1\right)$$

$$A = -\frac{1}{2^{38}} + 2$$

$$A =$$

$$B = 3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 99$$

C'est la somme d'une suite arithmétique de raison 3 avec $U_1 = 3$

$$B = U_1 + U_2 + \dots + U_{33}$$

$$B = \frac{33(U_1 + U_{33})}{2}$$

$$B = \frac{33(3 + 99)}{2}$$

$$B =$$

Exercice 21 :

Indication : revenir à la définition d'une suite arithmétique.

On considère $u(n)$ une suite arithmétique de raison r .

1°) Justifier que $u(3) = u(2) + r$ et que $u(4) = u(3) + r$

En déduire que $u(4) = u(2) + 2r$.

2°) Montrer que $u(8) = u(5) + 3r$.

3°) Quelle relation peut-on écrire entre $u(7)$, $u(2)$ et r ? Justifier.

4°) On suppose dans cette question que $u(0) = 4$ et $r = 2$.

Calculer $u(5)$.

Donner sans démonstration la valeur de $u(100)$

Exercice 22 :

On définit une suite (u_n) par : $u_n = 17\,243 - 8n$ pour tout entier n .

On a par exemple, en remplaçant n par 10 : $u_{10} = 17\,243 - 8 \times 10 = 17\,163$

1°) Calculer **$u_0 = 17243$; $u_1 = 17235$; $u_{1990} = 1323$; $u_{1991} = 1315$; $u_{1992} = 1307$** .

2°) Calculer $u_1 - u_0 = -8$; $u_{1991} - u_{1990} = -8$; $u_{1992} - u_{1991} = -8$

3°) En remplaçant n par $n+1$ dans l'expression de u_n montrer que pour tout entier n : $u_{n+1} = 17\,235 - 8n$

En déduire que, pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n = -8$

4°) En utilisant la relation $u_{n+1} - u_n = -8$, c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n - 8$ compléter le tableau suivant.

La suite (u_n) est-elle une suite décroissante ?

n	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
u_n	1 323										

5°) Représenter graphiquement la suite (u_n) lorsque n varie de 1990 à 2000.

Exercice 23 :

On donne, dans le tableau suivant, le nombre d'inscrits sur la liste électorale d'une petite commune pour les années de 1990 à 2000.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Nombre d'inscrits	1323	1313	1304	1297	1288	1289	1281	1271	1258	1248	1243

1°) On note P_n le nombre d'inscrits sur la liste électorale pour l'année n.

Donner la valeur de **$P_{1992}=1304$ et $P_{1998}=1258$**

2°) Calculer $P_{1994} - P_{1993}$. Que représente ce nombre ?

Calculer $P_{1995} - P_{1994}$. Que représente ce nombre ?

3°) Peut-on dire que la suite des nombres P_n est une suite décroissante lorsque n varie de 1990 à 2000 ?

4°) Représenter graphiquement la suite (P_n) .

Exercice 24 :

Indication :

Nécessaire au calcul :

Le montant, qu'on notera m .

Le taux d'intérêt, qu'on notera i .

Le nombre de périodes, qu'on notera n .

Formule du calcul des intérêts composés :

$$m * (1+i)^n$$

On dispose d'un capital de $C_0 = 1500$ €.

Le 1er janvier 2000, on place ce capital sur un compte à intérêts composés de 3 % par an.

1. Calculer le capital C_1 obtenu au bout d'un an.

2. Calculer le capital C_7 obtenu au bout de 7 ans.

De quel pourcentage a augmenté le capital pendant ces 7 années ?

3. Combien d'années faut-il laisser cet argent sur le compte afin d'avoir un capital d'au moins 2 000 € ?

Exercice 25 :

Indication : une réduction de 1,14% correspond à un coefficient multiplicateur

$$k = 1 - \frac{1,14}{100} = 1 - 0,0114 = 0,9886$$

Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14 qui est un élément radioactif.

Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère.

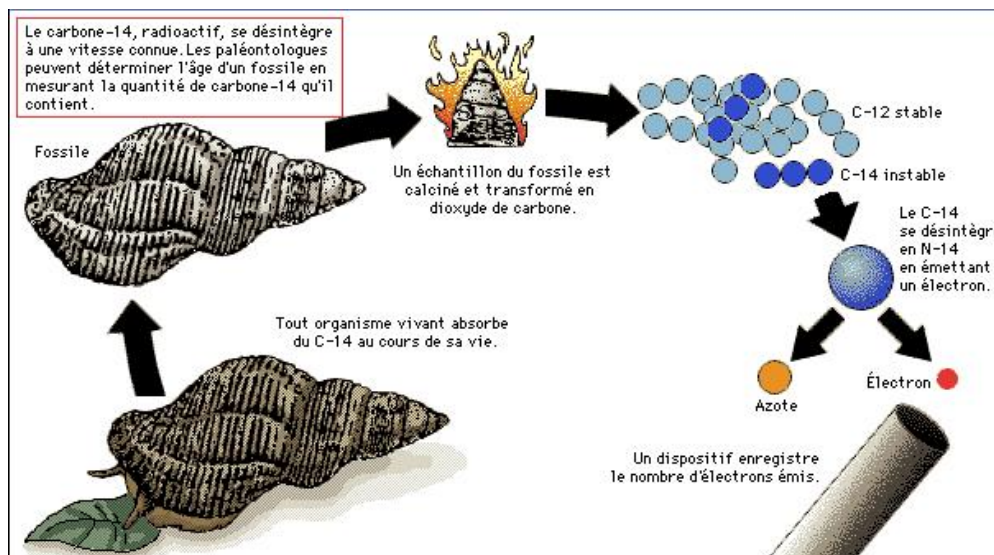
Cette proportion décroît après la mort du tissu de 1,14 % en 100 ans.

1. Déterminer les pourcentages de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de 1 000 ans, 2 000 ans et 10 000 ans.

2. Exprimer le pourcentage de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de $k \times 10^3$ années.

3. Un fossile ne contient plus que 10 % de ce qu'il devait contenir en carbone 14.

Donner une estimation de son âge.



Exercice 26 :

En quelle année était-ce ?

Nous obtenons une suite géométrique de raison $q = 2$.

$$U_1 = 2 \quad U_2 = 4 \quad U_3 = 8$$

$$U_n = U_1 \times q^{n-1} = 1\,000\,000\,000$$

$$2 \times 2^{n-1} = 1\,000\,000\,000$$

$$2^n = 10^9$$



$$n = \frac{\ln(10^9)}{\ln 2} = 29,9$$

Conclusion : Le trentième mois.

Rémunération dans une entreprise, exercices corrigés de mathématiques en première S sur les suites numériques.

Exercice 27 :

1°) Dans le cas de la rémunération de type 1, on note $u(0)$ le salaire mensuel initial, et $u(n)$ le salaire mensuel après n années. Donner les valeurs de $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$.

2°) Dans le cas de la rémunération de type 2, on note $v(0)$ le salaire mensuel initial, et $v(n)$ le salaire mensuel après n années. Donner les valeurs de $v(0)$, $v(1)$, $v(2)$.

3°) Donner une expression générale de $u(n)$ et $v(n)$ en fonction de n . Calculer $u(5)$ et $v(5)$; $u(8)$ et $v(8)$.

4°) Le nouvel employé compte rester 10 ans dans l'entreprise. Quelle est la rémunération la plus avantageuse ?

Exercice 28 :

Indication : utiliser le coefficient multiplicateur pour une réduction de 12 % qui est

$$k = 1 - \frac{12}{100} = 1 - 0,12 = 0,88$$

Un village avait 3123 habitants en 1995. Le nombre d'habitants diminue de 12% tous les ans.

On note $P(n)$ le nombre d'habitants du village pour l'année n .

1°) Donner les valeurs de $P(1995)$ et $P(1996)$. (on arrondira à l'entier le plus proche)

2°) Justifier que la suite $P(n)$ est une suite géométrique et donner sa raison.

Exercice 29 :

Indication : utiliser le coefficient multiplicateur pour une réduction de 12 % qui est

$$k = 1 - \frac{12}{100} = 1 - 0,12 = 0,88$$

Un village avait 3123 habitants en 1995. Le nombre d'habitants diminue de 12% tous les ans.

On note $P(n)$ le nombre d'habitants du village pour l'année n .

1°) Donner les valeurs de $P(1995)$ et $P(1996)$. (on arrondira à l'entier le plus proche)

2°) Justifier que la suite $P(n)$ est une suite géométrique et donner sa raison.

3°) Calculer $P(2001)$. (on arrondira à l'entier le plus proche)

4°) En quelle année le nombre d'habitants aura-t-il diminué des deux tiers par rapport à 1995 ?

5°) Représenter graphiquement la suite $P(n)$ pour n variant de 1995 à 2005.

Exercice 30 :

Un capital de 12 618 euros est placé le 01/01/2000 avec un taux d'intérêt annuel de 6,3%.

Tous les ans les intérêts sont cumulés au capital.

On note $C(0)$ le capital correspondant au 1^{er} janvier de l'année 2000. On a donc $C(0) = 12\,618$.

On note, pour tout entier n , $C(n)$ le capital correspondant au 1^{er} janvier de l'année 2000+ n .

1°) Calculer $C(1)$, $C(2)$, $C(3)$. (on arrondira les résultats au centime d'euro près)

2°) Démontrer que pour tout entier n on a $C(n+1) = C(n) \times 1,063$.

3°) Compléter le tableau suivant (on arrondira les résultats au centime d'euro près)

Rang n de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---------------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Capital $C(n)$	12 618										
----------------	-----------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

4°) Représenter graphiquement la suite $C(n)$.

Exercice 31 :

Soit une suite (U_n) arithmétique et de raison $r = 8$ et telle que $U_{100} = 650$.

Calculer la valeur du premier terme U_0 .

Nous avons

$$U_{100} = U_0 + 100r$$

$$650 = U_0 + 100 \times 8$$

$$650 = U_0 + 800$$

$$U_0 = 650 - 800 = -150$$

Exercice 32 :

On considère la suite (U_n) définie par $\{U_0 = \frac{1}{2}\}$.

1. Calculer U_1, U_2, U_3 .

$$U_1 = U_0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$U_2 = U_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$U_3 = U_2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

2. Justifier que la suite (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

Nous avons $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}$ (par définition)

Donc c'est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$.

3. Que vaut U_{100} ?

$$U_{100} = U_0 + 100r = 0 + 100 \times \frac{1}{2} = 50$$

Exercice 33 :

On considère la suite (U_n) définie par $\boxed{\times}$.

1. Calculer U_0, U_1, U_2 .

$$U_0 = (0+1)^2 - 0^2 = 1$$

$$U_1 = (1+1)^2 - 1^2 = 3$$

$$U_2 = (2+1)^2 - 2^2 = 5$$

2. La suite (U_n) est-elle arithmétique ? Si oui, préciser la raison.

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

$$U_{n+1} - U_n = 2(n+1) + 1 - 2n - 1 = 2n + 2 + 1 - 2n - 1 = 2$$

Conclusion : c'est une suite arithmétique de raison $r = 2$.

3. Que vaut U_{99} ?

$$U_{99} = U_0 + 99r = 1 + 99 \times 2 =$$

4. Calculer la somme $S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 195 + 197 + 199$.

en fait :

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{99} = \frac{100(U_0 + U_{99})}{2}$$

$S =$

Exercice 34 :

On considère (U_n) définie par $U_n = 5 - 2n$.

1. Calculer U_0, U_1, U_2 .

$$U_0 = 5 - 2 \times 0 =$$

$$U_1 = 5 - 2 \times 1 =$$

$$U_2 = 5 - 2 \times 2 =$$

2. Démontrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = 5 - 2(n+1) - 5 + 2n$$

$$U_{n+1} - U_n = 5 - 2n - 2 - 5 + 2n = -2$$

Conclusion : la suite (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$.

3. Que vaut U_{100} ?

$$U_{100} = U_0 + 100r = 5 + 100 \times (-2) = 5 - 200 = -195.$$

Calculer $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{100}$.

$$S = \frac{101(U_0 + U_{100})}{2} = \frac{101(5 - 195)}{2} = -9595.$$

Exercice 35 :

1/ a) Le pied de triodule occupe, au début de 1801, une surface de 1 m^2 .

À la fin de l'année 1801, il a occupé une surface supplémentaire de 1 m^2 , donc il occupe maintenant une surface totale de 2 m^2 .

b) En 1802, le pied de triodule ne produit pas de nouvelle graine, donc il ne s'étend pas au-delà de sa surface actuelle de 2 m^2 .

c) À la fin de l'année 1802, le pied de triodule occupe toujours une surface de 2 m^2 , comme il ne produit pas de nouvelle graine.

2/ En utilisant un tableur avec les instructions donnés, on peut obtenir :

| Année | Surface occupée (en m^2) |

|-----|-----|

1801 2
1802 2
1803 3
1804 4
... ...
2000 199

3/ a) On a $A_0 = 1$ (la surface occupée à la fin de l'année 1800 est 1, car c'est la surface initiale occupée par la première graine de triodule).

En 1801, on a $A_1 = 1+2 = 3$, car le premier pied de triodule va occuper une surface de 2m^2 et produire une nouvelle graine qui germera à la fin de l'année.

En 1802, on a $A_2 = 1+2+2 = 5$, car le premier pied de triodule occupe toujours une surface de 2m^2 , et les deux autres pieds vont chacun occuper une surface de 2m^2 à la fin de l'année.

b) À la fin de l'année $1800+n$, le premier pied de triodule aura occupé une surface de $n\text{m}^2$.

c) On peut facilement vérifier que $A_n = 1+2+3+\dots+n$, car chaque graine de triodule produite correspond à une nouvelle surface de 1m^2 , et le nombre de graines produites est égal au nombre d'années écoulées depuis l'arrivée de la première graine en 1800.

d) Au bout de 20 ans (soit en 1820), on aura $A_{20} = 1+2+3+\dots+20 = 210\text{m}^2$.

e) On cherche la plus petite valeur de n telle que $A_n > 500$. On a :

$$A_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Il faut donc résoudre l'équation $\frac{n(n+1)}{2} > 500$.

En développant cette inéquation, on obtient :

$$n^2 + n - 1000 > 0$$

Les solutions de cette équation sont :

$$n_1 = \frac{-1+\sqrt{4001}}{2} \approx 31.62$$

$$n_2 = \frac{-1-\sqrt{4001}}{2} \approx -32.62$$

Comme n doit être un entier positif, on a $\boxed{\times}$.

Ainsi, la surface totale des pieds de triodule dépassera 500m^2 en 1832 (soit à la fin de l'année 32, avec une surface occupée de $A_{32} = 1+2+3+\dots+32 = 528\text{m}^2$).

Exercice 36 :

Etudier la nature des suites ci-dessous :

a) pour tout entier naturel n , $U_n = \frac{3}{4^n}$.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{3}{4^{n+1}}}{\frac{3}{4^n}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3}{4^{n+1}} \times \frac{4^n}{3}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{4^n}{4^{n+1}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{4} < 1$ donc la suite (U_n) est décroissante .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$$

b) pour tout entier naturel n , $V_n = 0,1 - 0,02n$.

$$V_{n+1} - V_n = (0,1 - 0,02(n+1)) - (0,1 - 0,02n)$$

$$V_{n+1} - V_n = 0,1 - 0,02n - 0,02 - 0,1 + 0,02n$$

$$V_{n+1} - V_n = -0,02$$

$$V_{n+1} - V_n < 0$$

$$V_{n+1} < V_n$$

donc (V_n) est décroissant et $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = -\infty$.

Exercice 37 :

On note (U_n) la suite définie par : $\{U_0 =$

1. Calculer $U_3, U_4, U_5, \dots$

$$U_2 = U_1 - U_0 = 3 - 1 = 2$$

$$U_3 = U_2 - U_1 = 2 - 3 = -1$$

$$U_4 = U_3 - U_2 = -1 - 2 = -3$$

$$U_5 = U_4 - U_3 = -3 + 1 = -2$$

2. Exprimer U_{n+3} en fonction de U_n .

$$U_{n+3} = U_{n+2} - U_{n+1} = U_{n+1} - U_n - U_{n+1} = -U_n$$

3. Exprimer U_{n+6} en fonction de U_n .

$$U_{n+6} = -U_{n+3} = U_n$$

4. En déduire l'expression de U_{n+3k} , $k \in \mathbb{N}$, en fonction de U_n

(On ne démontrera pas l'égalité trouvée).

$$U_{n+3k} = (-1)^k U_n$$

5. Calculer U_{2005} .

$$2005 = 3 \times 668 + 1$$

$$U_{2005} = (-1)^{668} U_1 = U_1 = 3$$