

Suite numériques

Exercice 1 :

1. Soit la suite arithmétique (U_n) de raison $r = -2$ et telle que $U_{10} = 25$.

a. Calculer $U_{50} = U_{10} + 40 \times r =$.

b. Calculer $S_{10} = U_1 + U_2 + \dots + U_{10} = \frac{10 \times (U_1 + U_{10})}{2}$

Or $U_{10} = U_1 + 9r \Rightarrow U_1 =$.

$$S_{10} = \frac{10 \times (U_1 + U_{10})}{2} = \frac{10 \times (43 + 25)}{2} = 340$$

2. Soit la suite géométrique (V_n) de raison $q = \frac{1}{2}$ et telle que $V_8 = 3$.

a. Calculer $V_{20} = V_8 \times q^{12} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{3}{32768}$.

b. Calculer $S_9 =$.

$$\text{Or } V_1 = \frac{V_8}{\left(\frac{1}{2}\right)^7} = \frac{3 \times 2^7}{8} = 48$$

$$\text{Donc } S_9 = \frac{\frac{3}{32} - 48}{-\frac{1}{2}} = \frac{1533}{16}$$

Exercice 2 :

Calculer les limites des suites suivantes :

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n =$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n =$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) : \text{ sans limite}$

Exercice 3 :

Calculer les limites des suites suivantes :

$$a. \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 1$$

$$b. \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \cos(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = +\infty$$

Exercice 4 :

Calculer les limites des suites suivantes en utilisant le théorème des croissances comparées.

$$a. \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n} = +\infty$$

$$b. \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - n^3 = +\infty$$

$$c. \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln(n^2+1)} = +\infty$$

Exercice 5 :

Etudier le sens de variation des suites suivantes :

$$a. U_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\text{soit } n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq 0$$

donc (U_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$

$$b. U_n = \frac{n}{n+1} \\ n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq 0$$

La suite définie par $V_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ est croissante et tend vers 0

donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}, 1 + V_n \geq 0$

A partir de $n_0 \in \mathbb{N}$, la suite étudiée est croissante.

$$c. U_n = \frac{n}{n+1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq 0$

Nous pouvons donc calculer le rapport :

Pour

$$n \in \mathbb{N}^*, \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2(n+1)-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2(n+1)} = \frac{2n+2-1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \leq 1$$

Donc la suite (U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 6 :

Vérifions que la proposition est vraie au rang $n=0$. On a $U_0 = 2 < 2$, donc c'est vrai.

Supposons maintenant que la proposition est vraie pour un certain entier $n \geq 0$, c'est-à-dire $U_n < 2$.

Montrons qu'elle est vraie aussi au rang $n+1$, c'est-à-dire $U_{n+1} < 2$. On a :

$$[U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} < \sqrt{2 + 2} = 2.]$$

Ainsi, on a prouvé par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n < 2$.

Exercice 7 :

Vérifions que la proposition est vraie au rang $n=0$. On a $U_0 = 2$ et $3 - 2^0 = 3 - 1 = 2$, donc c'est vrai.

Supposons maintenant que la proposition est vraie pour un certain entier $n \geq 0$, c'est-à-dire

$U_n = 3 - 2^n$. Montrons qu'elle est vraie aussi au rang $n+1$, c'est-à-dire $U_{n+1} = 3 - 2^{n+1}$. On a :

$$U_{n+1} = 2U_n - 3 = 2(3 - 2^n) - 3 = 6 - 2^{n+1} - 3 = 3 - 2^{n+1}.$$

Ainsi, on a prouvé par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3 - 2^n$.

Exercice 8 :

a. On a $S_1 = 1$, $S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$, $S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ et $S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$.

b. On a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 \\ &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n-1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)-1)}{6}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a la formule de récurrence $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

c. On vérifie que $S_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. Supposons que $S_n = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$ pour un certain entier naturel $n \geq 1$. Alors :

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)-1)}{6},$$

ce qui prouve que la formule est vraie au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence, cela prouve que la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 9 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5; \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$$

Exercice 10 :

1.a. On a $V_n = U_n + 6$, donc

$$\left[V_{n+1} = U_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}U_n - 3 + 6 = \frac{1}{2}(U_n + 6) = \frac{1}{2}V_n. \right]$$

Ainsi, la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de terme initial $V_0 = U_0 + 6 = 15$.

1.b. On a :

$$S_n = \sum_{k=0}^n V_k = \sum_{k=0}^n 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 15 \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 15 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 30 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

En utilisant que $V_n = U_n + 6$, on a

$$\left[S'_n = \sum_{k=0}^n U_k = \sum_{k=0}^n (V_k - 6) = S_n - 6(n+1). \right]$$

1.c. Comme $|V_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n |V_0|$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$. Ainsi, d'après la formule pour la somme d'une suite géométrique, on a :

$$\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 30 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 30. \right]$$

De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = 30 - 6 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = -\infty$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$.

2. On a $W_n = \ln V_n = \ln(U_n + 6)$. On calcule :

$$W_{n+1} - W_n = \ln V_{n+1} - \ln V_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{U_n + 6}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}(U_n + 6)\right) = \ln\left(\frac{1}{2}V_n\right).$$

Ainsi, la suite (W_n) est une suite arithmétique de raison $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

On a :

$$\begin{aligned}
S''_n &= \sum_{k=0}^n W_k = \sum_{k=0}^n (\ln(U_k + 6)) \\
&= \sum_{k=0}^n (\ln(V_k) - \ln(2)) = \ln(V_0) - n\ln(2) + \sum_{k=0}^n \ln(V_k) \\
&= \ln(15) - n\ln(2) + \ln(V_0) \cdot \prod_{k=0}^n V_k.
\end{aligned}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n V_k = 0$.

Ainsi, on a :

$$\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} S''_n = \ln(15) - \infty = -\infty. \right]$$

3. On a $P_n = V_0 \cdot V_1 \cdot \dots \cdot V_n = 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n(n+1)/2}$.

En utilisant que $\left(\frac{1}{2}\right)^{n(n+1)/2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$ pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 15 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n(n+1)/2} = 0. \right]$$

Exercice 11 :

1. Soit (u_n) une suite convergente de limite L .

Par définition, cela signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - L| < \epsilon$.

En particulier, pour $\epsilon = 1$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - L| < 1$. Cela signifie que $L - 1 < u_n < L + 1$ dès que $n \geq N$.

Donc la suite (u_n) est bornée.

2. Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.

On montre que (u_n) diverge vers $+\infty$. En effet, pour tout $M > 0$, comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un indice n tel que $u_n > M$.

De plus, comme (u_n) est croissante, pour tout $n' \geq n$, on a $u_{n'} \geq u_n > M$.

Donc la suite (u_n) est M -supérieure à partir d'un certain rang indépendant de M , ce qui signifie que (u_n) tend vers $+\infty$.

3. Supposons qu'une suite (u_n) converge vers deux limites distinctes L et L' .

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, on ait $|u_n - L| < \epsilon/2$ et il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, on ait $|u_n - L'| < \epsilon/2$. Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Alors, pour tout $n \geq N$, on a à la fois :

$$|u_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

et

$$|u_n - L'| < \frac{\epsilon}{2}.$$

En ajoutant ces deux inégalités, on obtient :

$$|L - L'| < \epsilon.$$

Mais ce n'est possible que si $L = L'$, ce qui contredit notre hypothèse de départ. Ainsi, la limite d'une suite est unique.

4. La suite $u_n = (-1)^n n$ n'a pas de limite.

En effet, si elle avait une limite L , alors pour tout $\epsilon > 0$, il existerait un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on aurait $|u_n - L| < \epsilon$.

Mais la suite (u_n) n'est pas convergente par oscillation : si n est pair, $u_n = n$ et pour n impair, $u_n = -n$.

Ainsi, pour tout N , on peut trouver n_1 et n_2 pairs tels que $n_1 > 0$ et $n_2 \geq N$ et $u_{n_1} = n_1 > 0$ et $u_{n_2} = -n_2 < 0$, et donc $|u_{n_1} - u_{n_2}| = n_1 + n_2 \geq 2N > 2\epsilon$ ($\epsilon < N$) ce qui contredit la convergence de (u_n) .

5. Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite convergeant vers 0.

Il existe donc une constante M telle que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, puisque (v_n) converge vers 0, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|v_n| \leq \epsilon/M$.

En combinant ces deux inégalités, on en déduit que :

$$|u_n v_n| \leq M |v_n| \leq M \epsilon / M = \epsilon$$

pour $n \geq N$. Cela signifie que $(u_n v_n)$ converge également vers 0.

6. Soit (u_n) une suite d'entiers relatifs convergeant vers un réel L .

Soit $\epsilon > 0$. Puisque (u_n) converge vers L , il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - L| < \epsilon/2$. Mais ceci implique que pour tout $n \geq N$:

$$|u_n - [L]| \leq |u_n - L| + |L - [L]| < \epsilon,$$

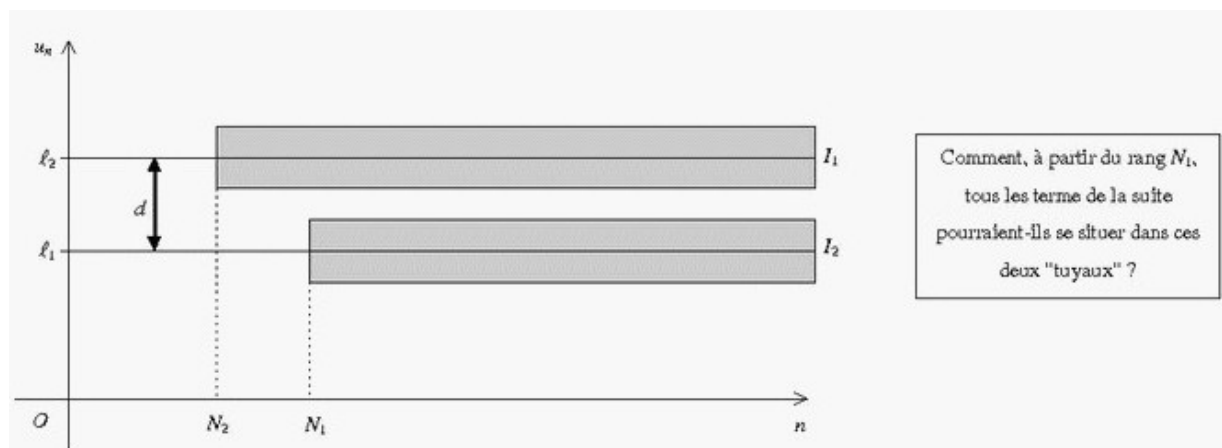
puisque $[L] \leq L < [L] + 1$.

Donc, à partir de l'indice N , tous les termes de la suite sont à une distance strictement inférieure à ϵ d'un entier. Puisque seuls un nombre fini d'entiers se trouvent dans un intervalle d'amplitude 1, cela signifie que la suite (u_n) est stationnaire à partir de l'indice N et donc converge vers l'entier relatif

k égal à cette valeur commune.

7. Soit (u_n) une suite divergente vers $+\infty$.

Pour tout n , on a $u_n \geq u_0$, donc la suite est minorée par u_0 . En effet, si elle ne l'était pas, il existerait un entier n_0 tel que $u_{n_0} < u_0$, ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse de divergence. Ainsi, la suite (u_n) est minorée par u_0 .



Exercice 12 :

1. Pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} + \sqrt{a_n b_n} \\ &= \frac{a_n + b_n + 2\sqrt{a_n b_n}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}{2}. \end{aligned}$$

Or, puisque $a > b > 0$, on a $\boxed{\times}$ pour tout $n \geq 0$.

Ainsi, on en déduit que $(a_n + b_n)/2 < a_{n+1} + b_{n+1} < a_n + b_n$ pour tout $n \geq 0$.

Donc $(a_n + b_n)/2$ est une suite croissante majorée par $a_0 + b_0$, et donc elle converge vers une limite ℓ . Par ailleurs, la suite (a_n) est décroissante, minorée par b_0 et converge donc vers une limite ℓ_a . De même, la suite (b_n) est décroissante, minorée par 0 , et converge donc vers une limite ℓ_b . Nous allons montrer que $\ell_a = \ell_b = \ell$.

Pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$a_{n+1} b_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{4} \leq \frac{(a_0 - b_0)^2}{4}.$$

Ainsi, $(a_n b_n)$ est une suite bornée et converge vers une limite ℓ_{ab} . Mais on a aussi, pour tout

$$n \geq 0,$$

$$\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^2 - a_n b_n = \frac{(a_n-b_n)^2}{4}.$$

Donc, en passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on a $\ell^2 - \ell_{ab} = \ell^2/4$. Cela montre que $\ell_{ab} = 0$, donc on a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell$.

Ainsi, les deux suites convergent vers la même limite.

2. La suite $(\sin n)$ ne converge pas car elle prend des valeurs aussi proches que l'on veut de -1 et 1 en alternance. Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\sin(k\pi/2) = \pm 1$. La suite $(\cos n)$ ne converge pas non plus, car sinon on aurait par la formule trigonométrique $\sin^2 n + \cos^2 n \rightarrow 1$, ce qui est impossible sous l'hypothèse de convergence infinie de $(\sin n)$.

Exercice 13 :

1. Nous allons procéder par récurrence sur n .

Pour $n = 0$, on a $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0x$.

Supposons maintenant que l'inégalité est vraie pour un certain entier naturel n , c'est-à-dire

$(1+x)^n \geq 1+nx$. En multipliant par $1+x$ des deux côtés de l'inégalité, on obtient

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2.$$

Puisque x est positif, on a $nx^2 \geq 0$, donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$, ce qui achève la démonstration par récurrence.

2. Si $a > 1$, alors (u_n) est une suite strictement croissante de réels positifs, donc elle diverge vers $+\infty$. Si $a = 1$, alors (u_n) est constante et converge vers 1. Si $-1 < a < 1$, alors $0 < a < 1$ (puisque $a > -1$) et donc $a^n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Enfin, si $a < -1$, alors (u_n) n'a pas de limite car lorsque n est pair, a^n est positif et lorsque n est impair, a^n est négatif. Donc la suite (u_n) ne peut pas converger vers une limite.

Exercice 14 :

1. Nous allons procéder par récurrence forte. Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1^3 = 1 = 2 \cdot 1^4 - 1^2$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons maintenant que la propriété est vraie pour $n \geq 1$, c'est-à-dire

$$S_n = 2n^4 - n^2.$$

Nous allons montrer que la propriété est alors vraie pour $n+1$. Pour cela, on a

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (2n+1)^3 \\ &= 2n^4 - n^2 + (2n+1)^3 \\ &= 2n^4 + 6n^3 + 7n^2 + 3n + 1 \\ &= 2(n+1)^4 - (n+1)^2, \end{aligned}$$

ce qui montre la propriété pour $n+1$.

Par récurrence forte, la propriété est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

2. On cherche donc le plus petit entier n tel que $S_n = 913\,276$. On sait que

$$S_n = 2n^4 - n^2 = n^2(2n^2 - 1).$$

Il suffit donc de chercher le plus petit entier n tel que $n^2(2n^2 - 1) \geq 913\,276$. On remarque que $25^2(2 \cdot 25^2 - 1) = 937\,500$, donc $n \geq 25$.

On calcule ensuite les valeurs de S_{25} et S_{26} :

$$S_{25} = 2 \cdot 25^4 - 25^2 = 937\,375$$

$$S_{26} = 2 \cdot 26^4 - 26^2 = 970\,984$$

On voit donc que $913\,276$ est bien entre ces deux valeurs, donc la solution cherchée est $n = 25$.

Exercice 15 :

Soient (U_n) une suite croissante et majorée

et (V_n) une suite décroissante et minorée.

Les suites (U_n) et (V_n) ont-elles nécessairement la même limite ?

Il y a aucune raison pour qu'elles aient la même limite.

Si elles avaient la même limite ce serait des suites adjacentes.

$$V_n = \frac{1}{n+1} + 3 \text{ la suite est décroissante et minorée par } 3.$$

$$U_n = -\frac{1}{n} \text{ la suite est croissante et majorée par } 0.$$

or $\lim U_n = 0$ et $\lim V_n = 3$.

Exercice 16 :

Indication : utiliser le théorème de comparaison.

On suppose connu le résultat suivant :

La suite (U_n) tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si tout

intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de U_n

à partir d'un certain rang.

Soient (U_n) et (V_n) deux suites telles que :

* U_n est inférieur ou égal à V_n à partir d'un certain rang ;

* U_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démontrer que la suite (V_n) tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 17 :

Soit (U_n) telle que $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \frac{-4}{4+U_n}$.

Soit (V_n) telle que , pour tout entier naturel n , $V_n = \frac{1}{2+U_n}$.

1. Démontrer que la suite (V_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

Indication : calculer $V_{n+1} - V_n$ et montrer que cette différence ne dépend pas de n .

2. Exprimer V_n en fonction de n et en déduire que pour tout entier naturel n ,

$$U_n = \frac{2}{n+1} - 2 .$$

3. Calculer la limite de la suite (U_n) et celle de la suite (V_n) .

Exercice 18 :

Soit (U_n) la suite définie par son premier terme $U_0 = 0$

et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \frac{-4}{4+U_n}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $-2 < U_n \leq 0$.

2. Etudier le sens de variation de la suite (U_n) .

3. Etudier la convergence de la suite (U_n) .

Exercice 19 :

1. On calcule les six premiers termes de la suite :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= u_0 + 2 \cdot 0 - 11 = -11 \\ u_2 &= u_1 + 2 \cdot 1 - 11 = -8 \\ u_3 &= u_2 + 2 \cdot 2 - 11 = -3 \\ u_4 &= u_3 + 2 \cdot 3 - 11 = 1 \\ u_5 &= u_4 + 2 \cdot 4 - 11 = 7 \end{aligned}$$

2. La courbe semble être une parabole.

On peut conjecturer que la fonction représentée par cette courbe est une fonction quadratique de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Par ailleurs, on pourrait conjecturer que la suite (u_n) a pour terme général $u_n = an^2 + bn + c$, où a , b et c sont des constantes à déterminer.

3. Pour démontrer cette conjecture, on va utiliser la méthode des différences finies. On calcule d'abord la première différence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (u_n + 2n - 11) - u_n \\ &= 2n - 11 \end{aligned}$$

On calcule ensuite la deuxième différence :

$$\begin{aligned} (u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1}) &= (2n - 11) - (2(n-1) - 11) \\ &= 2 \end{aligned}$$

On remarque que la deuxième différence est constante et égale à 2.

Cela nous indique que la fonction représentée par la courbe est bien une fonction quadratique. On peut donc écrire $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Par ailleurs, on sait que $u_0 = f(0) = c$, donc $c = 0$. On a également $u_1 = f(1) = a + b$, donc $b = u_1 - a$. Enfin, on sait que $u_2 = f(2) = 4a + 2b$, donc $a = \frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{4}$.

On peut maintenant exprimer le terme général de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned} u_n &= an^2 + bn \\ &= an^2 + (u_1 - a)n \\ &= \frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{4} n^2 + \left(u_1 - \frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{4}\right)n \\ &= \frac{1}{4}(u_2 - 2u_1)n^2 + \frac{1}{2}(u_1 - u_0)n \\ &= \frac{1}{4}(u_2 - 2u_1)n^2 + \frac{1}{2}(-11)n \\ &= \frac{1}{4}(u_2 - 2u_1)n^2 - \frac{11}{2}n \end{aligned}$$

On a donc bien vérifié la conjecture annoncée à la question précédente.

Exercice 20 :

1. On calcule les six premiers termes de la suite :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= u_0 + 2 \cdot 0 - 11 = -11 \\ u_2 &= u_1 + 2 \cdot 1 - 11 = -8 \\ u_3 &= u_2 + 2 \cdot 2 - 11 = -3 \\ u_4 &= u_3 + 2 \cdot 3 - 11 = 1 \\ u_5 &= u_4 + 2 \cdot 4 - 11 = 7 \end{aligned}$$

2. La courbe semble être une parabole. On peut conjecturer que la fonction représentée par cette courbe

est une fonction quadratique de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Par ailleurs, on pourrait conjecturer que la suite (u_n) a pour terme général $u_n = an^2 + bn + c$, où a , b et c sont des constantes à déterminer.

3. Pour démontrer cette conjecture, on va utiliser la méthode des différences finies. On calcule d'abord la première différence :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= (u_n + 2n - 11) - u_n \\&= 2n - 11\end{aligned}$$

On calcule ensuite la deuxième différence :

$$(u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1}) = (2n - 11) - (2(n-1) - 11) = 2$$

On remarque que la deuxième différence est constante et égale à 2.

Cela nous indique que la fonction représentée par la courbe est bien une fonction quadratique. On peut donc écrire $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Par ailleurs, on sait que $u_0 = f(0) = c$, donc $c = 0$. On a également $u_1 = f(1) = a + b$, donc $b = u_1 - a$. Enfin, on sait que $u_2 = f(2) = 4a + 2b$, donc $a = \frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{4}$.

On peut maintenant exprimer le terme général de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned}u_n &= an^2 + bn \\&= an^2 + (u_1 - a)n \\&= \frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{4} n^2 + \left(u_1 - \frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{4}\right)n \\&= \frac{1}{4}(u_2 - 2u_1)n^2 + \frac{1}{2}(u_1 - u_0)n \\&= \frac{1}{4}(u_2 - 2u_1)n^2 + \frac{1}{2}(-11)n \\&= \frac{1}{4}(u_2 - 2u_1)n^2 - \frac{11}{2}n\end{aligned}$$

On a donc bien vérifié la conjecture annoncée à la question précédente.

Exercice 21 :

Nous allons prouver par récurrence que $u_n = 2^n$ pour tout entier $n \geq 0$.

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a respectivement $u_0 = 1 = 2^0$ et $u_1 = 2 = 2^1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Supposons maintenant que la propriété est vraie pour n et $n+1$, c'est-à-dire que $u_n = 2^n$ et

$$u_{n+1} = 2^{n+1}.$$

On va montrer que la propriété est alors vraie pour $n+2$, c'est-à-dire que $u_{n+2} = 2^{n+2}$.

En utilisant la relation de récurrence, on a

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n = 2^{n+2},$$

ce qui montre la propriété pour $n+2$.

Par récurrence, la propriété est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$, c'est-à-dire que pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_n = 2^n$.

Exercice 22 :

1. On calcule les quatre premiers termes de la suite :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{(-1)^0}{1} = 1, \quad S_2 = \frac{(-1)^0}{1} + \frac{(-1)^1}{2} = \frac{1}{2}, \quad S_3 = \frac{(-1)^0}{1} + \frac{(-1)^1}{2} + \frac{(-1)^2}{3} = \frac{5}{6}, \\ S_4 &= \frac{(-1)^0}{1} + \frac{(-1)^1}{2} + \frac{(-1)^2}{3} + \frac{(-1)^3}{4} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. D'après leur définition, on a $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

On veut montrer que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et que $v_n - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Pour montrer que (u_n) est croissante, on considère $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \frac{(-1)^0}{1} + \frac{(-1)^1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{2n-1}}{n} + \frac{(-1)^{2n}}{n+1} - \left(\frac{(-1)^0}{1} + \frac{(-1)^1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{2n-1}}{n} \right) \\ &= \frac{(-1)^{2n}}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite croissante.

De même, pour montrer que (v_n) est décroissante, on considère $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^0}{1} + \frac{(-1)^1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{2n}}{n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{n+2} - \left(\frac{(-1)^0}{1} + \frac{(-1)^1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{2n-1}}{n} \right) \\
&= \frac{(-1)^{2n+1}}{n+2} \\
&= -\frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite décroissante.

Enfin, pour montrer que $v_n - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on a

$$v_n - u_n = S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1},$$

et donc

$$|v_n - u_n| = \frac{1}{2n+1}.$$

La suite $(|v_n - u_n|)$ tend donc vers 0 quand n tend vers l'infini, ce qui montre que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

En conclusion, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers une même limite, qui est $\ln 2$.