

Sommes, produits et inégalités

Exercice 1 : Manipulation des symboles Σ et Π

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. Écrire à l'aide du symbole $\sum$ ou $\prod$ les expressions $A = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1)$,
 $B = 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)$ et $C = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
2. Calculer A et exprimer B à l'aide d'une factorielle.
3. Calculer $\sum_{k=1}^n (3k - 2)$, $\sum_{k=1}^n 5$, $\prod_{k=1}^n 5$ et $\prod_{k=1}^n 3^k$.
4. Un étudiant affirme que $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)$ pour tous réels a_k, b_k .
 Montrer par un contre-exemple que c'est faux.

Exercice 2 : Sommes et produits télescopiques

Soit n un entier, avec $n \geq 1$ pour les questions 1 et 2, et $n \geq 2$ pour la question 3.

1. Vérifier que $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$, puis calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}$. Vers quelle valeur S_n tend-il quand n tend vers $+\infty$?

2. Calculer $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

3. Calculer $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

4. Vérifier que $k \cdot k! = (k+1)! - k!$, puis calculer $\sum_{k=0}^n k \cdot k!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : Changements d'indice et regroupements

Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Par un changement d'indice, calculer $\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^2$.

2. À l'aide du changement d'indice $j = n - k$, montrer que $\sum_{k=0}^n (2k - n) = 0$.

3. En séparant les indices pairs et impairs, calculer $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$.

4. Calculer la somme des carrés des n premiers entiers impairs, $\sum_{p=1}^n (2p-1)^2$.

Exercice 4 : Sommes usuelles et télescopage

Soit $n \geq 1$ un entier. On rappelle les valeurs de $\sum_{k=1}^n k$ et de $\sum_{k=1}^n k^2$.

1. Calculer $\sum_{k=1}^n k(k+1)$ et donner le résultat sous forme factorisée.

2. Calculer $\sum_{k=1}^n (k-1)(k+1)$ sous forme factorisée.
3. Développer $(k+1)^4 - k^4$. En sommant cette égalité pour k allant de 1 à n , établir que
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Exercice 5 : Somme géométrique et factorisation de $a^n - b^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k}$.
2. Pour x réel, calculer $\sum_{k=0}^n x^{2k}$. On distinguera plusieurs cas.
3. Calculer $\sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k$.
4. Montrer que 7 divise $2^{3n} - 1$ et que 80 divise $3^{4n} - 1$.
5. Factoriser $x^5 - 1$ et $x^5 + 32$ par un polynôme de degré 1.

Exercice 6 : Somme des $k q^k$ par une somme double

Soient q un réel différent de 1 et $n \geq 1$ un entier. On pose $S = \sum_{k=1}^n k q^{k-1}$.

1. En écrivant $k = \sum_{j=1}^k 1$, exprimer S comme une somme double sur les couples (j, k) tels que $1 \leq j \leq k \leq n$.

2. Intervertir les deux sommes et en déduire que $S = \frac{1 - (n+1)q^n + n q^{n+1}}{(1-q)^2}$.
3. En déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^n k 2^k$. Vérifier pour $n = 3$.

Exercice 7 : Sommes doubles rectangulaires

Soient n et p deux entiers non nuls.

1. Calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$.
2. Calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2$ sous forme factorisée.
3. Calculer $\sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^i 3^j$.
4. Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (i-j)$.

Exercice 8 : Sommes triangulaires et minimum

Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i$. On pourra utiliser l'exercice 4.
2. Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j$, puis $\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1$.

3. On pose $M = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$. La figure ci-dessous donne les valeurs de $\min(i, j)$ pour $n = 5$. En séparant les couples tels que $i = j$, $i < j$ et $i > j$, montrer que $M = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. Pour $1 \leq i, j \leq n$, justifier que $\min(i, j)$ est le nombre d'entiers $k \in [[1, n]]$ tels que $k \leq i$ et $k \leq j$. En intervertissant les sommes, retrouver la valeur de M .

		j				
		1	2	3	4	5
i	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	2	2	2
	3	1	2	3	3	3
	4	1	2	3	4	4
	5	1	2	3	4	5

Exercice 9 : Carré d'une somme et produits croisés

Soient $n \geq 1$ un entier et $a_1, \dots, a_n$ des réels.

1. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$.
2. En déduire que $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$. Vérifier pour $n = 3$.
3. Calculer $\sum_{0 \leq i < j \leq n} 2^{i+j}$ sous forme factorisée.

Exercice 10 : Factorielles et coefficients binomiaux

Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Simplifier $\frac{(n+2)!}{n!}$ et $\frac{(2n+2)!}{(2n)!}$.
2. Montrer que $\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n n!$, puis que $\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.
3. Calculer $\binom{7}{3}$, $\binom{10}{8}$ et $\binom{n}{2}$.
4. Démontrer que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$.
5. En appliquant deux fois la formule de Pascal, montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k} + 2 \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}.$$

Exercice 11 : Formule du binôme et coefficient d'un terme

1. Développer $(x+2)^5$ et $(1-x)^4$.

- Déterminer le coefficient de x^3 dans le développement de $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^9$ pour $x \neq 0$. Ce développement contient-il un terme constant ?
- Calculer $(1 + \sqrt{2})^4 + (1 - \sqrt{2})^4$ à l'aide de la formule du binôme, sans développer séparément.

Exercice 12 : Sommes binomiales classiques

Soit $n \geq 2$ un entier. Calculer les sommes suivantes.

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$.
- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$, puis $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}$ et enfin $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.
- $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$. On pourra d'abord montrer que $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$.
- La somme des $\binom{n}{k}$ pour k pair, $0 \leq k \leq n$.

Exercice 13 : Somme des carrés des coefficients binomiaux

Soit $n \geq 1$ un entier. On admet que si deux fonctions polynomiales $x \rightarrow \sum_{m=0}^N c_m x^m$ et $x \rightarrow \sum_{m=0}^N d_m x^m$ sont égales sur $\mathbb{R}$, alors $c_m = d_m$ pour tout m .

- Écrire $(1+x)^n (1+x)^n$ comme un produit de deux sommes, puis comme une somme double. En regroupant les termes selon la valeur $m = i + j$, montrer que le coefficient de x^m vaut $\sum_{i=0}^m \binom{n}{i} \binom{n}{m-i}$.

- En déduire que $\sum_{i=0}^m \binom{n}{i} \binom{n}{m-i} = \binom{2n}{m}$ pour $0 \leq m \leq 2n$.
- En déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, puis vérifier pour $n = 4$.

Exercice 14 : Formule de la crosse de hockey

Soient $p \leq n$ deux entiers naturels.

- À l'aide de la formule de Pascal, montrer que $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$ pour tout entier $k \geq p$.
- En déduire que $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
- Vérifier le résultat pour $p = 2$ et $n = 6$ dans le triangle de Pascal.
- Écrire la formule pour $p = 1$ et $p = 2$, puis en déduire une nouvelle démonstration de la valeur de $\sum_{k=1}^n k^2$.

Exercice 15 : Système 3×3 par la méthode du pivot

Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants, d'inconnues réelles x, y, z .

- $$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Exercice 16 : Système linéaire à paramètre

Soit m un réel. On considère le système (S_m) d'inconnues réelles x, y, z :

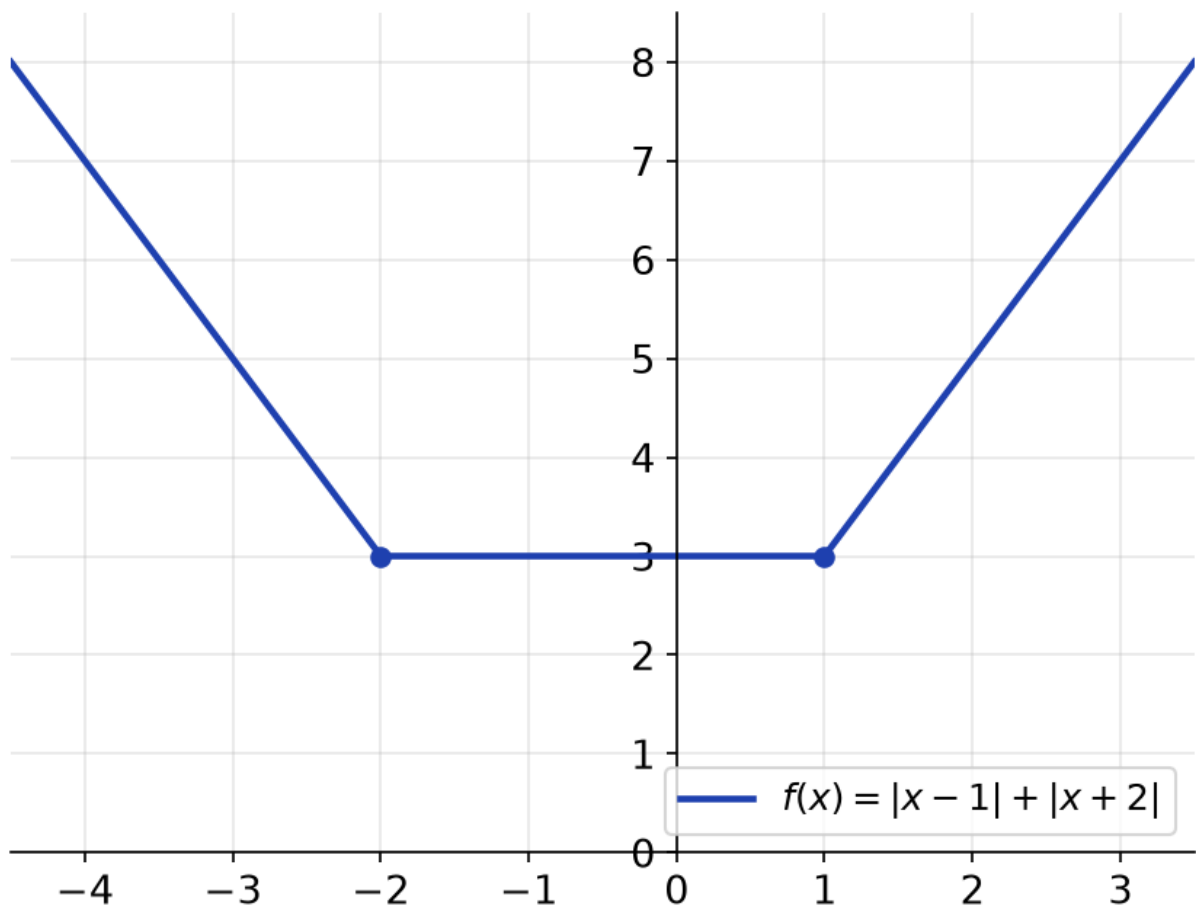
$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1. \end{cases}$$

1. Appliquer la méthode du pivot en prenant la première équation comme pivot.
2. Résoudre (S_m) selon les valeurs de m .

Exercice 17 : Inéquations avec valeurs absolues

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes. Pour la deuxième, la figure donne le graphe de $f : x \rightarrow |x-1| + |x+2|$.

1. $|2x - 3| \leq 5$.
2. $|x - 1| + |x + 2| \leq 5$.
3. $|x - 1| < |x + 3|$.
4. $|x^2 - 4| \leq 3$.

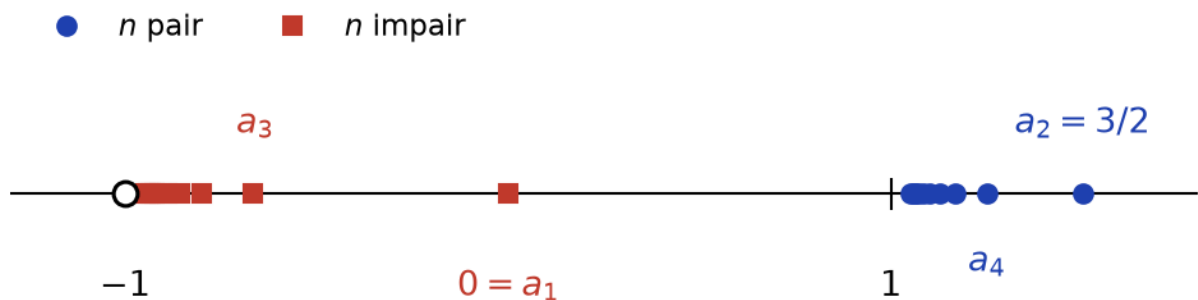


Exercice 18 : Équations et sommes avec partie entière

1. Résoudre l'équation $\lfloor 2x - 1 \rfloor = 3$ d'inconnue réelle x .
2. Montrer que pour tout réel x , $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ vaut 0 si $x \in \mathbb{Z}$ et -1 sinon.
3. Montrer que pour tout réel x , $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.
4. Pour $n \geq 1$, calculer $\sum_{k=1}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$.
5. Résoudre l'équation $\lfloor x^2 \rfloor = 2$.

Exercice 19 : Majorants, minorants, maximum et minimum

On pose $A = \left\{ \begin{array}{l} (-1)^n + \frac{1}{n} \\ n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\}$. La figure place les éléments obtenus pour $n \leq 20$.



1. Calculer les éléments de A obtenus pour $n = 1, \dots, 6$.
2. Montrer que A est majoré et qu'il admet un maximum, que l'on précisera.
3. Montrer que A est minoré par -1 , mais qu'il n'admet pas de minimum.
4. Montrer que tout minorant m de A vérifie $m \leq -1$. On pourra utiliser la partie entière.
5. Soit $B = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x^2 - 3x + 2 < 0 \end{array} \right\}$. Déterminer B , ses majorants et ses minorants. B a-t-il un maximum, un minimum ?

Exercice 20 : Encadrer une somme et un produit

1. Soient $x \in [1, 2]$ et $y \in [-3, -1]$. Encadrer $x + y$, $x - y$, xy et $\frac{x}{y}$.

- Montrer que $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$ pour tout entier $n \geq 1$.
- Pour $1 \leq k \leq n$, vérifier que $k(n+1-k) - n = (k-1)(n-k)$. En écrivant $(n!)^2$ comme un produit, en déduire que $(n!)^2 \geq n^n$.
- Pour $n \geq 1$, on pose $P_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$ et $Q_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$. Montrer que $P_n \leq Q_n$, calculer $P_n Q_n$ et en déduire que $P_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Exercice 21 : Inégalité triangulaire et encadrements

- Montrer que pour tous réels x, y, z , $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.
- Montrer que pour tous réels x, y , $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.
- Soit x un réel tel que $|x - 2| \leq \frac{1}{2}$. Montrer que $|x^2 - 4| \leq \frac{9}{4}$ et que $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{6}$.
- Montrer par récurrence que pour tous réels $a_1, \dots, a_n$, $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$. En déduire que $\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{2^k} \right| < 1$.

Exercice 22 : Problème : sommes des puissances d'entiers

Pour $p \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$, on pose $S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p$. En particulier, $S_0(n) = n$.

- À l'aide de la formule du binôme et d'un télescopage, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} S_j(n) = (n+1)^{p+1} - 1.$$

2. Retrouver ainsi $S_1(n)$, puis $S_2(n)$.

3. Calculer $S_3(n)$ par la même relation et vérifier que $S_3(n) = S_1(n)^2$.

4. Montrer par récurrence forte sur p qu'il existe des rationnels $c_0, \dots, c_p$, indépendants de n , tels que pour tout $n \geq 1$:

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \sum_{i=0}^p c_i n^i.$$

5. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que pour tout entier $k \geq 1$, $\int_{k-1}^k t^p dt \leq k^p \leq \int_k^{k+1} t^p dt$. En déduire l'encadrement

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} \leq S_p(n) \leq \frac{(n+1)^{p+1} - 1}{p+1},$$

puis la limite de $\frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 23 : Problème : inégalité de Cauchy-Schwarz discrète

Soient $n \geq 1$ et des réels $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. On pose $A = \sum_{k=1}^n a_k^2$, $B = \sum_{k=1}^n b_k^2$ et $C = \sum_{k=1}^n a_k b_k$.

1. On pose $D = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$. En développant, montrer que $D = 2(AB - C^2)$.

2. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz $C^2 \leq AB$, et caractériser le cas d'égalité à l'aide des produits $a_i b_j$ et $a_j b_i$.

3. Vérifier directement l'inégalité $\left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n k^2$ à l'aide des sommes usuelles, puis l'obtenir par Cauchy-Schwarz.

4. Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2$.
5. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \frac{2n}{n+1}$.
6. Montrer enfin que $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [sommes, produits et inégalités, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Logique, ensembles, applications et relations](#)
- Chapitre précédent : [Logique, ensembles, applications et relations](#)
- Chapitre suivant : [Trigonométrie et fonctions circulaires](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)