

Sommes, produits et inégalités

I. Sommes et produits : les symboles Σ et Π

Les calculs de prépa font sans cesse intervenir des sommes de termes indexés par un entier. Le symbole $\sum$ permet de les écrire sans points de suspension. Ainsi, les manipulations deviennent sûres et rapides. Ce premier paragraphe fixe les notations, puis les deux techniques de base : le changement d'indice et le télescopage.

1. Notations

Définition :

Soient $m \leq n$ deux entiers et $a_m, \dots, a_n$ des nombres réels ou complexes. On note

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \text{ et } \prod_{k=m}^n a_k = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n.$$

La somme comporte $n - m + 1$ termes. Si $m > n$, on convient que la somme vaut 0 et que le produit vaut 1. Plus généralement, pour un ensemble fini I , on note $\sum_{i \in I} a_i$ et $\prod_{i \in I} a_i$.

L'indice k est **muet** : on peut le remplacer par j ou i sans rien changer. En revanche, n n'est pas muet, car le résultat en dépend. Par conséquent, un indice de sommation ne doit jamais apparaître hors du symbole $\sum$.

Propriété :

Pour tous nombres a_k, b_k et tout scalaire λ :

$$\sum_{k=m}^n (a_k + \lambda b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \lambda \sum_{k=m}^n b_k, \quad \prod_{k=1}^n (\lambda a_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^n a_k.$$

De plus, pour $m \leq p < n$, on a la **relation de Chasles** :

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k.$$

Attention :

Une constante sommée donne un multiple : $\sum_{k=1}^n 5 = 5n$, et non 5 . De même, un facteur constant sort d'un produit avec un exposant : $\prod_{k=1}^n 2k = 2^n n!$. Enfin, le produit d'une somme n'est pas la somme des produits.

2. Changements d'indice et regroupements

Changer d'indice revient à renuméroter les termes. Les deux changements les plus utiles sont le **décalage** $j = k + p$ et le **retournement** $j = n - k$. Il faut chaque fois transformer les bornes en même temps que le terme général.

Propriété :

Pour tout entier p , on a

$$\sum_{k=m}^n a_{k+p} = \sum_{j=m+p}^{n+p} a_j \text{ et } \sum_{k=0}^n a_{n-k} = \sum_{j=0}^n a_j.$$

On peut aussi regrouper les termes selon la parité de l'indice. Par exemple, pour une somme de $2n$ termes, on sépare les indices pairs $k = 2p$ et impairs $k = 2p - 1$:

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{p=1}^n a_{2p} + \sum_{p=1}^n a_{2p-1}.$$

Exemple :

Calculons $S = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$. D'abord, on regroupe les termes deux par deux :

$$S = \sum_{p=1}^n (2p - (2p-1)). \text{ Chaque parenthèse vaut } 1. \text{ Donc } S = n.$$

3. Sommes et produits télescopiques

Théorème :

Pour toute suite (u_k) et tous entiers $m \leq n$:

$$\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m.$$

Si de plus les u_k sont non nuls, alors $\prod_{k=m}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_m}.$

Démonstration :

Par linéarité, puis décalage d'indice $j = k + 1$ dans la première somme :

$$\sum_{k=m}^n u_{k+1} - \sum_{k=m}^n u_k = \sum_{j=m+1}^{n+1} u_j - \sum_{k=m}^n u_k.$$

Les termes d'indices $m+1$ à n se simplifient. Il reste donc $u_{n+1} - u_m$. Le cas du produit se traite de la même façon.

Méthode :

Pour calculer une somme par télescopage, on écrit le terme général sous la forme $u_{k+1} - u_k$.
Pour une fraction rationnelle, on cherche une décomposition du type $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Pour un produit, on cherche un quotient $\frac{u_{k+1}}{u_k}$. Ensuite, on vérifie les deux termes restants sur les bornes.

Exemple :

Pour $n \geq 1$, on a $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

De même, $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = n+1$.

II. Sommes usuelles et somme géométrique

Quelques sommes reviennent dans presque tous les exercices. Il faut les connaître par cœur, avec leurs démonstrations.

1. Sommes des entiers et des carrés

Propriété :

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Démonstration :

Notons $S = \sum_{k=1}^n k$. Le retournement $j = n+1-k$ donne $S = \sum_{k=1}^n (n+1-k)$. En additionnant les deux écritures, on obtient $2S = \sum_{k=1}^n (n+1) = n(n+1)$.

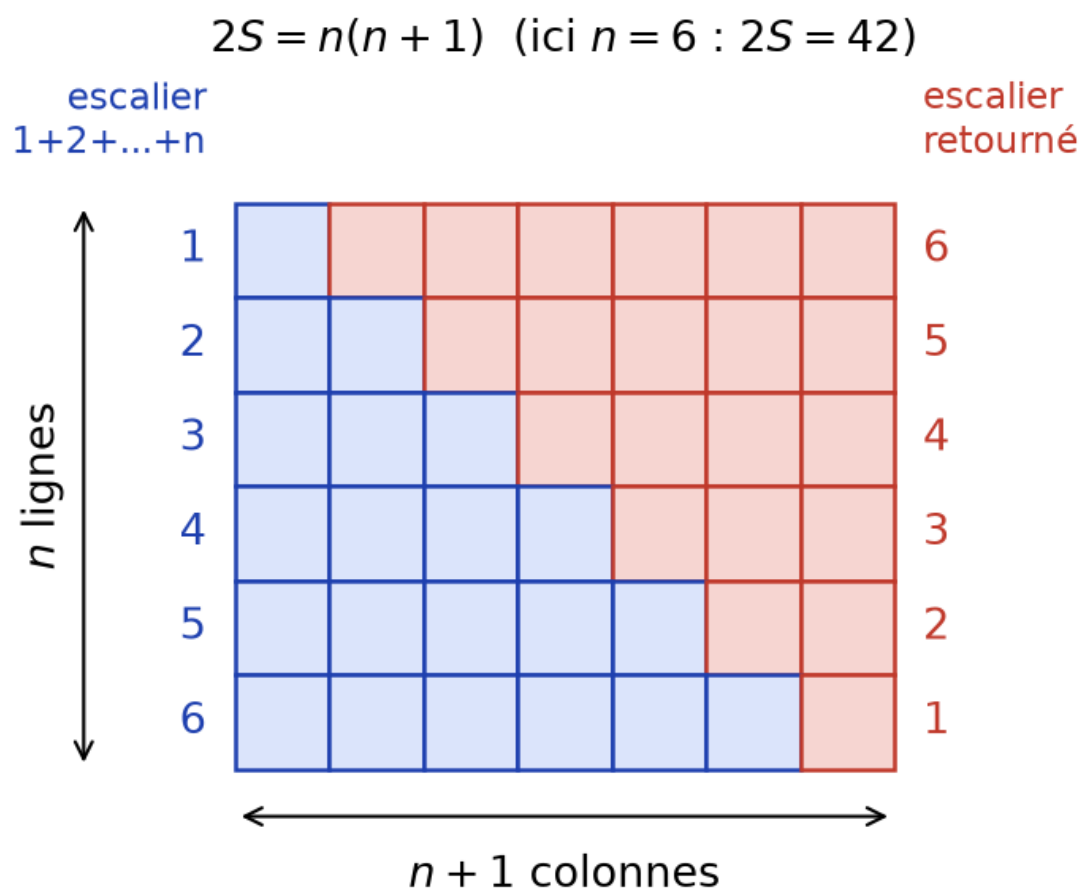
Pour les carrés, on télescope : $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. En sommant de 1 à n , il vient

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n.$$

Ainsi, $3 \sum k^2 = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{2}$, ce qui donne la formule. La

somme des cubes s'obtient de même avec $(k+1)^4 - k^4$.

La figure ci-dessous illustre l'argument du retournement. Deux escaliers de $1 + 2 + \dots + n$ carreaux s'emboîtent en un rectangle de n lignes et $n+1$ colonnes.



2. Somme géométrique

Théorème :

Soit q un réel ou un complexe et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1, \\ n + 1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

Démonstration :

Notons $S = \sum_{k=0}^n q^k$. Alors $(1 - q)S = \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1}) = 1 - q^{n+1}$ par télescopage.
Si $q \neq 1$, on divise par $1 - q$. Le cas $q = 1$ est immédiat.

Remarque :

Pour une somme géométrique qui ne commence pas à 0, on retient : premier terme fois $\frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$. Par exemple, $\sum_{k=2}^n 3^k = 9 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 9}{2}$.

3. Factorisation de $a^n - b^n$

Proposition :

Pour tous nombres a, b et tout entier $n \geq 1$:

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}).$$

Démonstration :

On développe : $(a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$. En posant $u_k = a^k b^{n-k}$, c'est la somme télescopique $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = a^n - b^n$.

Exemple :

On a $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. De plus, si n est impair, on remplace b par $-b$:
 $a^n + b^n = (a + b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} a^k b^{n-1-k}$. Par exemple,
 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Enfin, cette factorisation montre que $a - b$ divise $a^n - b^n$ dans $\mathbb{Z}$: ainsi $7 = 8 - 1$ divise $8^n - 1$.

III. Sommes doubles

Une somme double porte sur des couples d'indices (i, j) . On la calcule en sommant d'abord selon un indice, puis selon l'autre. Tout l'enjeu est de choisir le bon ordre.

1. Sommes rectangulaires

Théorème :

Pour une famille $(a_{i,j})$ indexée par $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on peut intervertir librement :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right).$$

En particulier, le **produit de deux sommes** est une somme double :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{j=1}^p b_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_i b_j.$$

Autrement dit, on range les $a_{i,j}$ dans un tableau et on somme ligne par ligne ou colonne par colonne. Le total est le même, puisque la somme est finie.

Exemple :

Calculons $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j)$. Par linéarité, c'est $\sum_{i,j} i + \sum_{i,j} j$. Or $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i = n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$, et la seconde somme vaut autant par symétrie. Donc le total vaut $n^2(n+1)$.

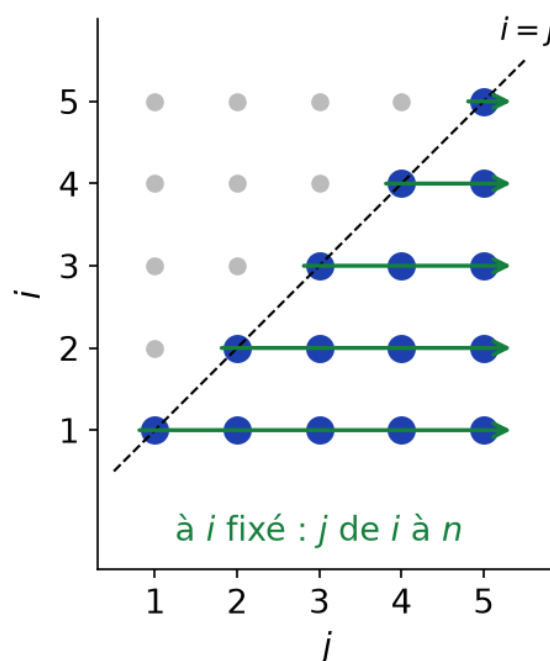
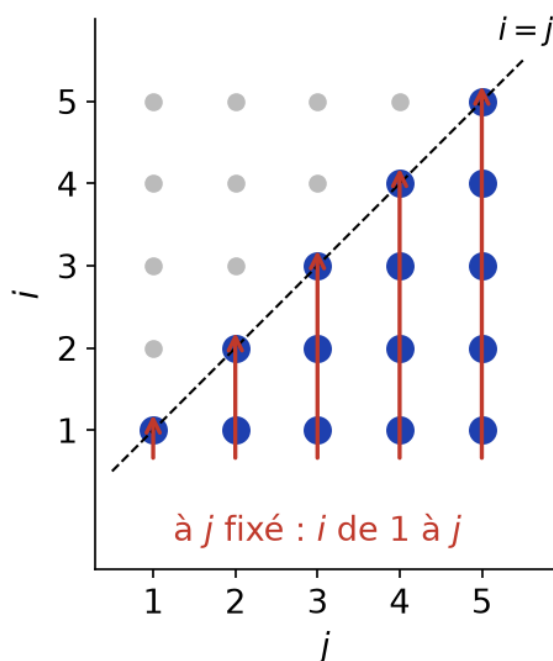
Attention :

Le carré d'une somme n'est pas la somme des carrés. En effet,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j, \text{ car le tableau des } a_i a_j \text{ est symétrique.}$$

2. Sommes triangulaires

Quand les indices sont liés par une condition $i \leq j$, les termes occupent un triangle du tableau. On peut encore intervertir, mais les bornes changent. La figure suivante montre les deux façons de parcourir ce triangle.



Théorème :

Pour une famille $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$, on a

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j}.$$

Méthode :

Pour intervertir une somme triangulaire, écrivez d'abord la condition globale sur le couple, par exemple $1 \leq i \leq j \leq n$. Ensuite, fixez l'indice extérieur choisi et lisez les bornes de l'autre dans cette condition. Choisissez l'ordre qui rend la somme intérieure calculable. Enfin, n'hésitez pas à dessiner la grille des couples.

Exemple :

Calculons $T = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$. À j fixé, i varie de 1 à j . Ainsi,

$$T = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^n \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Dans l'autre ordre, la somme intérieure $\sum_{j=i}^n \frac{1}{j}$ ne se calcule pas. C'est pourquoi le choix de l'ordre compte.

IV. Coefficients binomiaux et formule du binôme

1. Factorielle et coefficients binomiaux

Définition :

On pose $0! = 1$ et $n! = \prod_{k=1}^n k$ pour $n \geq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, le **coefficient binomial** est

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

, si $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = 0$
 , sinon.

Propriété :

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

- symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
- formule « pion », si $n \geq 1$: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$;
- formule de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Démonstration :

Démontrons la formule de Pascal pour $0 \leq k \leq n-1$. Les autres cas se vérifient directement, car les deux membres valent alors 0 ou 1. On met au même dénominateur $(k+1)!(n-k)!$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \left((k+1) + (n-k) \right) = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

La formule de Pascal permet de construire le triangle ligne par ligne. Chaque coefficient est la somme des deux coefficients situés au-dessus de lui, comme le montre la figure ci-dessous.

On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 0$, les deux membres valent 1. Supposons la formule vraie au rang n . Alors

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

Dans la première somme, on pose $j = k + 1$. Elle devient

$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j}$, grâce à la convention $\binom{n}{-1} = 0$. De même, la seconde s'étend à $k = n + 1$ car $\binom{n}{n+1} = 0$. En regroupant, puis avec la formule de Pascal, on obtient $\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j}$.

Attention :

La formule du binôme exige que a et b commutent. C'est toujours le cas pour des nombres. En revanche, pour les matrices du chapitre de calcul matriciel, il faudra vérifier $AB = BA$.

Méthode :

Pour calculer une somme contenant $\binom{n}{k}$, cherchez à reconnaître $(a+b)^n$ avec des valeurs bien choisies. Par exemple, $a = b = 1$ donne $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. De plus, $a = -1, b = 1$ donne $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ pour $n \geq 1$. Si un facteur k gêne, utilisez la formule « pion » pour l'absorber.

Exemple :

Pour $n \geq 1$, la formule « pion » donne $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$.

Ensuite, le décalage $j = k - 1$ donne $n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n 2^{n-1}$.

V. Petits systèmes linéaires et méthode du pivot

Un système linéaire de n équations à p inconnues s'écrit

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n. \end{cases}$$

Le chapitre de calcul matriciel reprendra ces systèmes en détail. Ici, l'objectif est pratique : résoudre vite et sans erreur un système de trois équations.

Définition :

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes $L_1, \dots, L_n$ d'un système :

- l'échange de deux lignes, noté $L_i \leftrightarrow L_j$;
- la multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$;
- l'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre, noté $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$.

Théorème :

Une opération élémentaire transforme un système en un système **équivalent**, c'est-à-dire ayant exactement les mêmes solutions.

Méthode :

Algorithme du pivot de Gauss. D'abord, choisissez une ligne dont le coefficient de x est non nul, de préférence égal à 1 : c'est le pivot. Placez-la en tête. Ensuite, éliminez x des autres lignes par des opérations $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_1$. Recommencez avec y sur les lignes restantes. On obtient un système triangulaire, que l'on résout en remontant.

Exemple :

Résolvons le système suivant.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y - z = -1 \\ -2y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y - z = -1 \\ -z = 1. \end{cases}$$

On a effectué $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$. En remontant, $z = -1$, puis $y = -2$, enfin $x = 5$. L'unique solution est $(5, -2, -1)$.

Remarque :

Si une ligne devient $0 = c$ avec $c \neq 0$, le système est **incompatible**. Si une ligne devient $0 = 0$, une inconnue reste libre. On exprime alors les autres en fonction d'elle : il y a une infinité de solutions. Enfin, en présence d'un paramètre, on ne divise jamais par une quantité qui peut s'annuler sans distinguer les cas.

VI. Inégalités dans $\mathbb{R}$

1. Relation d'ordre et intervalles

La relation $\leq$ est une **relation d'ordre total** sur $\mathbb{R}$. Elle est compatible avec les opérations, avec des précautions de signe.

Propriété :

Pour tous réels a, b, c, d :

- si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$;
- si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$;
- si $a \leq b$ et $c < 0$, alors $ac \geq bc$;
- si $0 < a \leq b$, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

Attention :

On ne soustrait pas des inégalités, et on ne les divise pas. Pour majorer $a - c$, on majore a et on minore c . De même, pour majorer un quotient $\frac{a}{c}$ de termes positifs, on majore a et on minore c par un nombre strictement positif.

Méthode :

Pour majorer une somme de n termes, majorez chaque terme par le plus grand d'entre eux :

$\sum_{k=1}^n a_k \leq n \max a_k$. Pour un produit de termes positifs, majorez chaque facteur. Pour un quotient, traitez séparément numérateur et dénominateur en contrôlant les signes.

Exemple :

Pour $n \geq 1$, chaque terme de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ est compris entre $\frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{n+1}$. Comme il y a n termes, la somme est comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{n}{n+1} < 1$.

2. Valeur absolue et inégalité triangulaire

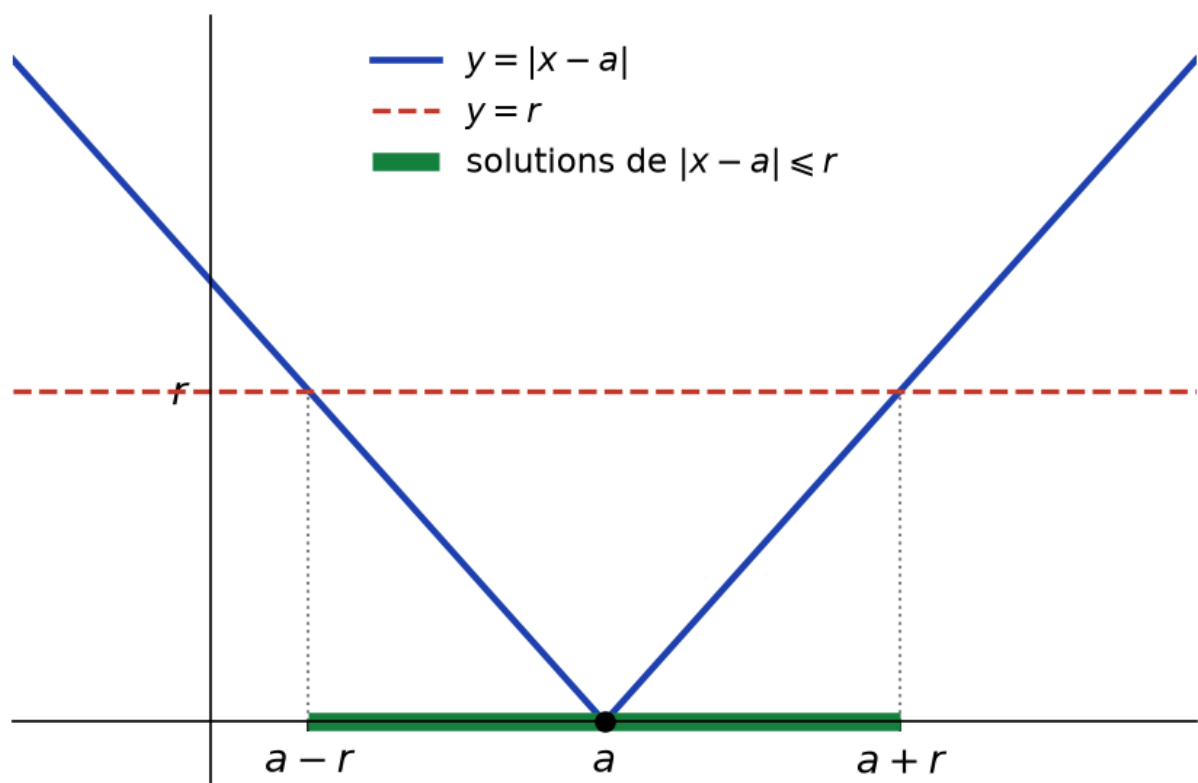
Définition :

La **valeur absolue** d'un réel x est $|x| = \max(x, -x)$. Le nombre $|x - a|$ est la distance entre x et a sur la droite réelle.

Propriété :

Pour tous réels x, a et tout $r \geq 0$: $|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$. De plus, $|xy| = |x||y|$.

La figure ci-dessous traduit cette équivalence. Les réels à distance au plus r de a forment l'intervalle $[a - r, a + r]$, lu sous le graphe de $x \rightarrow |x - a|$.



Théorème :

Inégalité triangulaire : pour tous réels x, y ,

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Démonstration :

On a $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq y \leq |y|$. En additionnant,
 $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$, donc $|x + y| \leq |x| + |y|$. Ensuite,
 $|x| = |(x + y) - y| \leq |x + y| + |y|$, donc $|x| - |y| \leq |x + y|$. En échangeant x et y ,
 on conclut.

3. Majorant, minorant, maximum, minimum

Définition :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un réel M est un **majorant** de A si $\forall a \in A, a \leq M$. De même, m est un **minorant** si $\forall a \in A, m \leq a$. Un majorant de A qui appartient à A est le **maximum** de A . Le minimum se définit de la même façon.

Exemple :

L'intervalle $[0, 1[$ admet 0 pour minimum. Il est majoré par 1 , mais il n'a pas de maximum. En effet, pour tout $a \in [0, 1[$, le réel $\frac{a+1}{2}$ est dans $[0, 1[$ et il est strictement plus grand que a .

Propriété :

Si A admet un maximum, il est unique. Toute partie finie et non vide de $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.

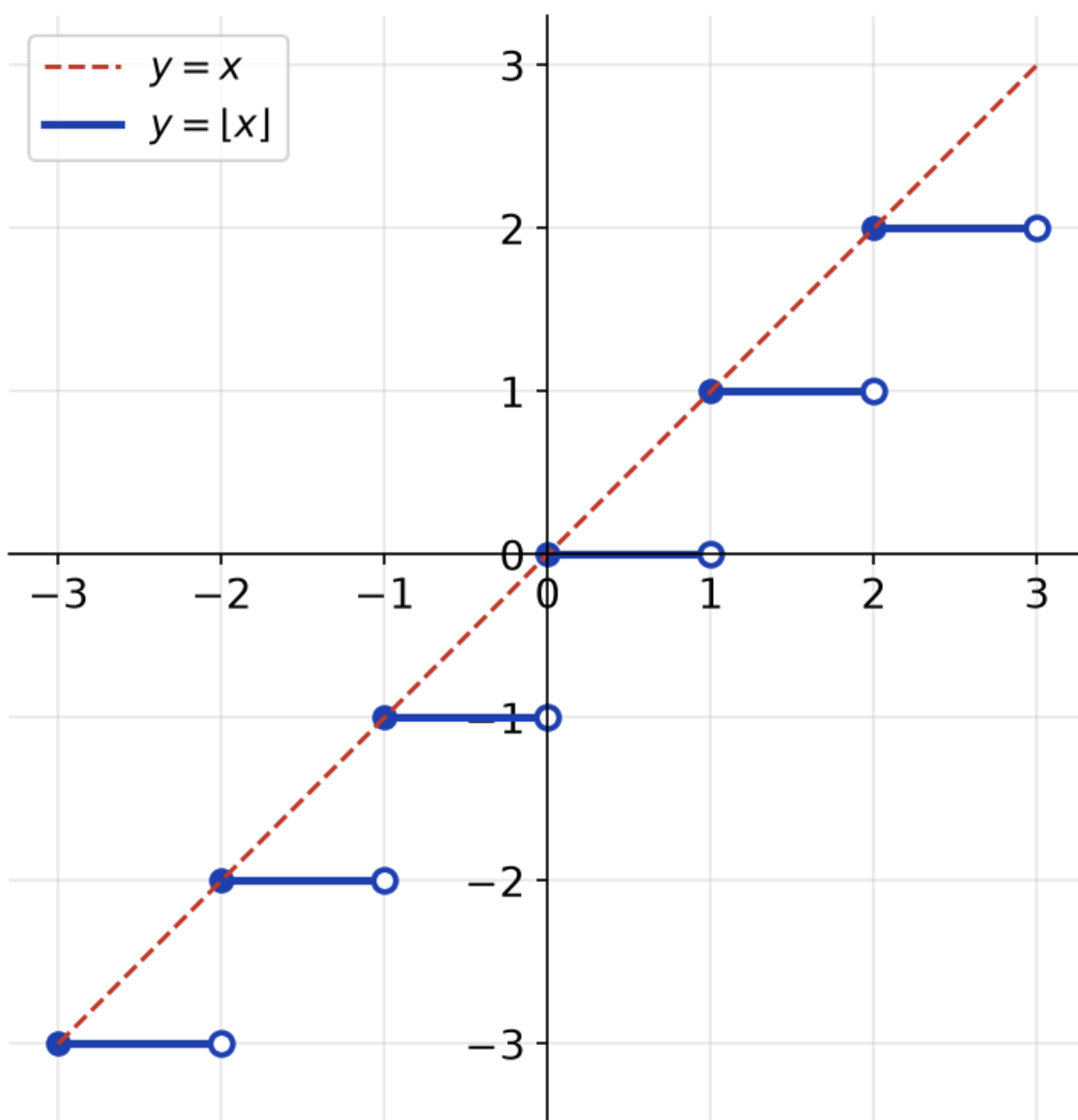
4. Partie entière

Théorème :

Pour tout réel x , il existe un unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$. On l'appelle **partie entière** de x et on le note $\lfloor x \rfloor$. Ainsi,

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \text{ et } x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

La partie entière est une fonction en escalier, croissante, continue à droite. La figure suivante montre ses sauts aux entiers.



Propriété :

Pour tout réel x et tout entier m , on a $[x + m] = [x] + m$. De plus, pour tout entier n , $[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$.

Exemple :

On a $\lfloor 2,7 \rfloor = 2$ et $\lfloor -2,7 \rfloor = -3$. Par ailleurs, résolvons $\lfloor 3x \rfloor = 4$. Cette équation équivaut à $4 \leq 3x < 5$, autrement dit $x \in \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right[$.

Méthode :

Pour résoudre une inéquation avec valeurs absolues, découpez $\mathbb{R}$ selon le signe de chaque expression dans une valeur absolue. Sur chaque intervalle, supprimez les barres, puis résolvez. Pour une partie entière, remplacez $\lfloor u \rfloor = n$ par l'encadrement $n \leq u < n + 1$.

Ce qu'il faut retenir

- Un indice de sommation est muet ; un changement d'indice modifie en même temps le terme général et les bornes.
- Télescopage : $\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$, et de même pour un produit de quotients.
- Sommes usuelles : $\sum k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$.
- Factorisation : $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.
- Une somme double rectangulaire s'intervertit librement ; pour une somme triangulaire, on relit les bornes dans la condition $i \leq j$.
- Formule de Pascal, formule « pion » et formule du binôme $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
- Le pivot de Gauss transforme un système en un système triangulaire équivalent.

- On ne soustrait ni ne divise des inégalités ; on multiplie seulement des inégalités entre nombres positifs.
- Inégalité triangulaire : $||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$.
- Partie entière : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, et $\lfloor u \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq u < n+1$.

Questions fréquentes sur sommes, produits et inégalités

Comment reconnaître une somme télescopique ?

Une somme est télescopique quand son terme général s'écrit $u_{k+1} - u_k$. Il faut souvent le provoquer, par exemple avec $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ou $\ln \frac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k$. Il ne reste alors que $u_{n+1} - u_m$.

Dans quel ordre sommer une somme double triangulaire ?

On écrit la condition $1 \leq i \leq j \leq n$, puis on choisit l'indice extérieur de sorte que la somme intérieure soit calculable. À j fixé, i va de 1 à j ; à i fixé, j va de i à n . Un petit dessin de la grille des couples évite les erreurs de bornes.

Faut-il connaître la somme des carrés par cœur ?

Oui : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ doit être immédiate, comme $\sum k$ et la somme géométrique. Il faut aussi savoir la redémontrer, par exemple en télescopant $(k+1)^3 - k^3$. Pour vérifier, testez $n = 1$ et $n = 2$.

Peut-on soustraire deux inégalités ?

Non. Si $a \leq b$ et $c \leq d$, on ne peut rien dire de $a - c$ par rapport à $b - d$. Pour majorer une différence, on majore le premier terme et on minore le second. De même, on ne multiplie des inégalités qu'entre nombres positifs.

Pour aller plus loin en maths sup

- Les énoncés : [exercices de maths sup sur sommes, produits et inégalités](#)
- À maîtriser avant : [Logique, ensembles, applications et relations](#)
- Chapitre précédent : [Logique, ensembles, applications et relations](#)
- Chapitre suivant : [Trigonométrie et fonctions circulaires](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)