

Sommes, produits et inégalités

Corrigé de l'exercice 1 : Manipulation des symboles Σ et Π

1. Les termes de A sont les impairs $2k+1$, pour k allant de 0 à n . Ceux de B sont les pairs $2k$, pour k de 1 à n . Enfin, le signe de C alterne et commence par $+$. Ainsi,

$$A = \sum_{k=0}^n (2k+1), \quad B = \prod_{k=1}^n (2k) \quad \text{et} \quad C = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

2. Par linéarité, $A = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = n(n+1) + (n+1)$. Attention : la somme de 1 pour k de 0 à n compte $n+1$ termes. Donc $A = (n+1)^2$. Ensuite, on sort le facteur 2 de chacun des n facteurs : $B = 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n!$.

3. D'abord, $\sum_{k=1}^n (3k-2) = 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{n(3n+3-4)}{2}$. Donc

$$\sum_{k=1}^n (3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2}. \text{ Ensuite, une constante sommée } n \text{ fois donne } \sum_{k=1}^n 5 = 5n,$$

tandis qu'un produit de n facteurs égaux donne $\prod_{k=1}^n 5 = 5^n$. Enfin, les exposants s'ajoutent :

$$\prod_{k=1}^n 3^k = 3^{1+2+\dots+n} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Donc $\prod_{k=1}^n 3^k = 3^{n(n+1)/2}.$

4. Prenons $n = 2$ et $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$. Le membre de gauche vaut $1+1 = 2$. En revanche, le membre de droite vaut $(1+1)(1+1) = 4$. **L'égalité proposée est donc fausse.**
En fait, le produit des deux sommes contient aussi les produits croisés $a_i b_j$ avec $i \neq j$.

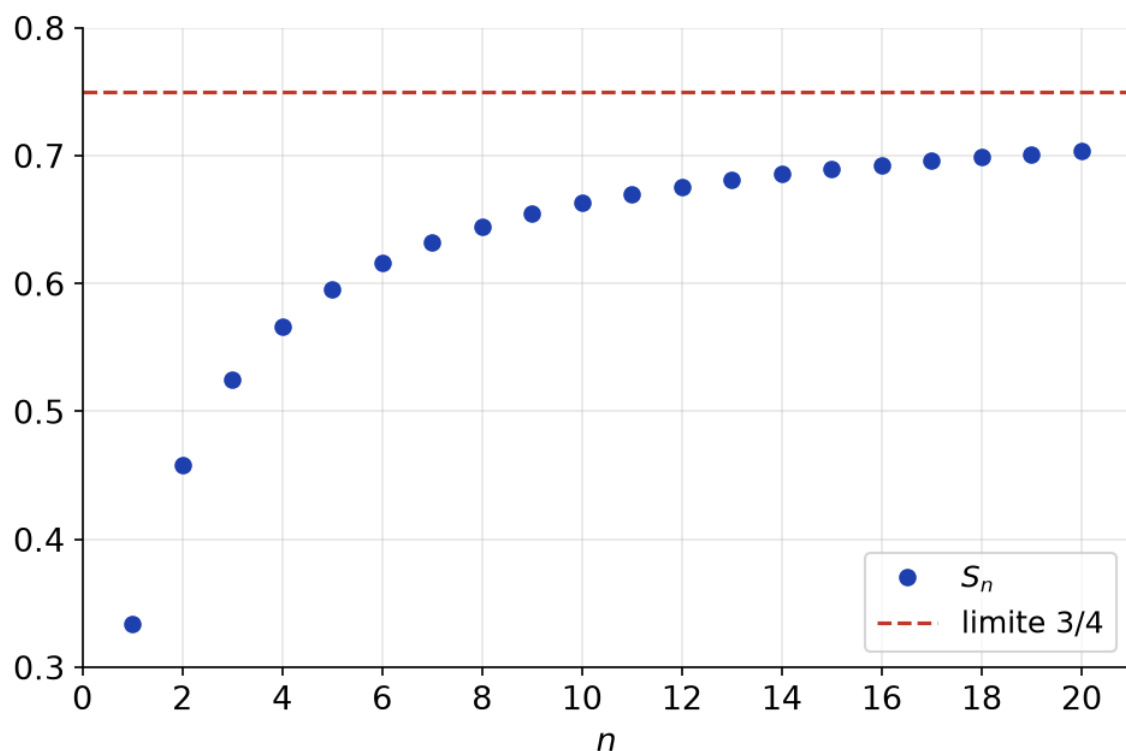
Corrigé de l'exercice 2 : Sommes et produits télescopiques

1. On réduit au même dénominateur : $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} = \frac{(k+2) - k}{k(k+2)} = \frac{2}{k(k+2)}$. La décomposition est donc vérifiée. Ensuite, par linéarité et décalage d'indice $j = k + 2$:

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right).$$

En effet, les termes d'indices 3 à n se simplifient. Il s'agit d'un télescopage « à deux pas ». Ainsi,

$S_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}$, et S_n **tend vers** $\frac{3}{4}$. Par exemple, pour $n = 1$, on retrouve $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. La figure ci-dessous montre les sommes partielles s'approcher de leur limite.



2. Pour $k \geq 1$, on a $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\frac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k$. Par télescopage, la somme vaut $\ln(n+1) - \ln 1$. **Donc** $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1)$.

3. Pour $k \geq 2$, on factorise : $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k}$. Tous les facteurs sont non nuls. Le produit se sépare donc en deux produits télescopiques :

$$P_n = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \times \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2}.$$

Ainsi $P_n = \frac{n+1}{2n}$. Pour $n = 2$, on vérifie bien $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

4. On a $(k+1)! - k! = k!(k+1-1) = k \cdot k!$. Par conséquent, avec $u_k = k!$, la somme est télescopique :

$$\sum_{k=0}^n k \cdot k! = \sum_{k=0}^n ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 0!.$$

Donc $\sum_{k=0}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1.$

Point de méthode : dans un télescopage à pas 2, il reste deux termes au début et deux termes à la fin ; écrivez les deux sommes décalées pour ne pas en oublier.

Corrigé de l'exercice 3 : Changements d'indice et regroupements

1. On pose $j = k - 2$. Quand k va de 3 à $n+2$, l'indice j va de 1 à n . Donc

$$\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^2 = \sum_{j=1}^n j^2. \text{ La somme vaut } \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Notons $S = \sum_{k=0}^n (2k - n)$. Quand k décrit $[[0, n]]$, l'entier $j = n - k$ décrit aussi $[[0, n]]$. De plus, $2k - n = 2(n - j) - n = n - 2j$. Ainsi,

$$S = \sum_{j=0}^n (n - 2j) = -\sum_{j=0}^n (2j - n) = -S.$$

Par conséquent, $2S = 0$, donc $S = 0$.

3. Pour $k = 2p$, le terme vaut $+4p^2$. Pour $k = 2p - 1$, il vaut $-(2p-1)^2$. On regroupe les deux termes de même p , pour p de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{p=1}^n (4p^2 - (2p-1)^2) = \sum_{p=1}^n (4p - 1) = 2n(n+1) - n.$$

Donc $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = n(2n+1)$. Pour $n = 1$, on a bien $-1 + 4 = 3$.

4. La somme des carrés de 1 à $2n$ est la somme des carrés pairs plus celle des carrés impairs.
Donc

$$\sum_{p=1}^n (2p-1)^2 = \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{p=1}^n 4p^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On factorise par $\frac{2n(2n+1)}{6}$: il reste $(4n+1) - 2(n+1) = 2n-1$. **Ainsi**

$$\sum_{p=1}^n (2p-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}. \text{ Pour } n = 2, \text{ on trouve } 1 + 9 = 10 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{3}.$$

Corrigé de l'exercice 4 : Sommes usuelles et télescopage

1. Par linéarité, $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum k^2 + \sum k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{6}$. On met

$$\frac{n(n+1)}{6} \text{ en facteur : il reste } 2n+4. \text{ Donc } \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2. On a $(k-1)(k+1) = k^2 - 1$. Ainsi, la somme vaut

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n = \frac{n(2n^2 + 3n + 1 - 6)}{6}. \text{ Or } 2n^2 + 3n - 5 = (n-1)(2n+5). \text{ Donc } \sum_{k=1}^n (k-1)(k+1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}. \text{ Pour } n = 2, \text{ on retrouve } 0 + 3 = 3.$$

3. La formule du binôme donne $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$. On somme de 1 à n

. À gauche, le télescopage laisse $(n+1)^4 - 1$. À droite, on note $T = \sum_{k=1}^n k^3$:

$$(n+1)^4 - 1 = 4T + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n.$$

Comme $-1 - n = -(n+1)$, on isole $4T$ et on factorise par $n+1$:

$$4T = (n+1)[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n] = (n+1)(n^3 + n^2).$$

En effet, $(n+1)^3 - 1 - 2n^2 - 3n = n^3 + n^2$. Donc $4T = n^2(n+1)^2$. **On conclut que**

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Corrigé de l'exercice 5 : Somme géométrique et factorisation de $a^n - b^n$

1. On applique la factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$ avec $a = 3$ et $b = 2$:

$$3^{n+1} - 2^{n+1} = (3 - 2) \sum_{k=0}^n 3^k 2^{n-k}.$$

Le changement d'indice $j = n - k$ montre que $\sum_{k=0}^n 3^k 2^{n-k} = \sum_{j=0}^n 2^j 3^{n-j}$. **Donc**

$$\sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

2. C'est une somme géométrique de raison $q = x^2$, avec $n+1$ termes. Si $x^2 \neq 1$, c'est-à-dire $x \notin \{-1, 1\}$, **la somme vaut** $\frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}$. Si $x = 1$ ou $x = -1$, chaque terme vaut 1 et **la somme vaut** $n+1$.

3. La raison $q = -\frac{1}{2}$ est différente de 1. Le premier terme est q et il y a n termes. Donc

$$\sum_{k=1}^n q^k = q \frac{1 - q^n}{1 - q} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right).$$

Ainsi $\sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{3} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right)$. Pour $n = 1$, on retrouve $-\frac{1}{2}$.

4. On a $2^{3n} - 1 = 8^n - 1^n$. Pour $n \geq 1$, la factorisation donne $8^n - 1 = (8 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} 8^k$.

La somme est un entier. **Donc 7 divise** $2^{3n} - 1$. De même,

$3^{4n} - 1 = 81^n - 1 = 80 \sum_{k=0}^{n-1} 81^k$. **Donc 80 divise** $3^{4n} - 1$. Pour $n = 0$, les deux nombres sont nuls, donc divisibles.

5. Avec $a = x$, $b = 1$ et l'exposant 5 : $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.
Ensuite, $x^5 + 32 = x^5 - (-2)^5$, car 5 est impair. Donc

$$x^5 + 32 = (x + 2) \sum_{k=0}^4 x^k (-2)^{4-k}. \text{ Ainsi}$$

$$x^5 + 32 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16).$$

Corrigé de l'exercice 6 : Somme des $k q^k$ par une somme double

1. Pour tout $k \geq 1$, on a $k = \sum_{j=1}^k 1$. Donc $k q^{k-1} = \sum_{j=1}^k q^{k-1}$. En sommant sur k ,

$$S = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k q^{k-1} = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} q^{k-1}.$$

2. La condition $1 \leq j \leq k \leq n$ se lit aussi : j varie de 1 à n , puis k de j à n . Pour j fixé, la somme intérieure est géométrique de raison $q \neq 1$, de premier terme q^{j-1} et de $n - j + 1$ termes :

$$\sum_{k=j}^n q^{k-1} = q^{j-1} \frac{1 - q^{n-j+1}}{1 - q} = \frac{q^{j-1} - q^n}{1 - q}.$$

Ensuite, on somme sur j . Comme $\sum_{j=1}^n q^{j-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$, on obtient

$$S = \frac{1}{1-q} \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} - n q^n \right) = \frac{1 - q^n - n q^n + n q^{n+1}}{(1 - q)^2}.$$

Donc
$$S = \frac{1 - (n+1)q^n + n q^{n+1}}{(1 - q)^2}.$$

3. Pour $q = 2$, on a $(1 - q)^2 = 1$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = 1 - (n+1)2^n + 2n 2^n = 1 + (n-1)2^n. \text{ En multipliant par } 2,$$

$$\sum_{k=1}^n k 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2. \text{ Pour } n = 3 : 2 + 8 + 24 = 34 \text{ et } 2 \times 16 + 2 = 34.$$

Point de méthode : écrire un coefficient entier k comme $\sum_{j=1}^k 1$ transforme une somme simple en somme triangulaire ; l'interversion donne alors des sommes géométriques.

Corrigé de l'exercice 7 : Sommes doubles rectangulaires

1. Le terme ij est un produit d'une fonction de i par une fonction de j . La somme est donc un

produit de deux sommes : $\sum_{i,j} ij = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n j \right)$. Elle vaut $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. On développe : $(i+j)^2 = i^2 + 2ij + j^2$. D'abord, $\sum_{i,j} i^2 = n \sum_{i=1}^n i^2$, car j prend n valeurs. Par symétrie, $\sum_{i,j} j^2$ a la même valeur. Ensuite, $\sum_{i,j} 2ij = \frac{n^2(n+1)^2}{2}$ par la question

1. Ainsi,

$$\sum_{i,j} (i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} = \frac{n^2(n+1)}{6} (2(2n+1) + 3(n+1)).$$

Donc $\sum_{1 \leq i,j \leq n} (i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$. Pour $n = 2$, on trouve
 $4 + 9 + 9 + 16 = 38$ et $\frac{4 \cdot 3 \cdot 19}{6} = 38$.

3. C'est encore un produit de deux sommes géométriques :

$$\sum_{0 \leq i,j \leq n} 2^i 3^j = \left(\sum_{i=0}^n 2^i \right) \left(\sum_{j=0}^n 3^j \right) = (2^{n+1} - 1) \cdot \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

La somme vaut $\frac{(2^{n+1} - 1)(3^{n+1} - 1)}{2}$.

4. Par linéarité, on sépare. D'une part, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p i = p \cdot \frac{n(n+1)}{2}$. D'autre part,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p j = n \cdot \frac{p(p+1)}{2}. \text{ La différence vaut } \frac{np}{2}((n+1) - (p+1)). \text{ Donc la somme vaut } \frac{np(n-p)}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 8 : Sommes triangulaires et minimum

1. La somme intérieure doit être calculable. On fixe donc j , puis i varie de 1 à j :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i = \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

En effet, on a utilisé l'exercice 4. **La somme vaut** $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

2. À j fixé, le terme j est répété j fois. Donc

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j = \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \text{ Ensuite, à } j \text{ fixé, il y a } j-1 \text{ entiers } i \text{ tels que } 1 \leq i < j. \text{ Donc } \sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 = \sum_{j=1}^n (j-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

3. On découpe le carré des couples en trois parties. Si $i = j$, le minimum vaut i . Si $i < j$, il vaut i . Enfin, si $i > j$, il vaut j . De plus, en échangeant les noms des indices,

$$\sum_{i > j} j = \sum_{j > i} i = \sum_{i < j} i. \text{ Donc}$$

$$M = \sum_{i=1}^n i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} i.$$

Or, par la question 1,

$$\sum_{i < j} i = \sum_{i \leq j} i - \sum_{i=j} i = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}. \text{ Ainsi,}$$

$$M = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{n(n+1)}{6}(3 + 2(n-1)).$$

On obtient $M = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Pour $n = 5$, la somme des cases du tableau de l'énoncé vaut bien 55.

4. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a l'équivalence $(k \leq i \text{ et } k \leq j) \Leftrightarrow k \leq \min(i, j)$. Les entiers k concernés sont donc $1, 2, \dots, \min(i, j)$: il y en a $\min(i, j)$. Notons $\varepsilon_{i,j,k}$ le nombre qui vaut 1 si $k \leq i$ et $k \leq j$, et 0 sinon. Alors $\min(i, j) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_{i,j,k}$. Les sommes étant finies, on les intervertit :

$$M = \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_{i,j,k} = \sum_{k=1}^n (n - k + 1)^2.$$

En effet, à k fixé, on compte les couples tels que $k \leq i \leq n$ et $k \leq j \leq n$. Il y en a $(n - k + 1)^2$. Enfin, le changement d'indice $m = n - k + 1$ donne

$M = \sum_{m=1}^n m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. La figure ci-dessous montre ces couches carrées emboîtées.

$k=1$ 1	1	1	1	1
1	$k=2$ 2	2	2	2
1	2	$k=3$ 3	3	3
1	2	3	$k=4$ 4	4
1	2	3	4	$k=5$ 5

couche k : carré de $(n - k + 1)^2$ couples

Corrigé de l'exercice 9 : Carré d'une somme et produits croisés

1. Le carré est le produit de deux sommes : $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{j=1}^n a_j\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_i a_j$. On sépare les couples tels que $i = j$, $i < j$ et $i > j$. D'abord, les couples $i = j$ donnent $\sum a_k^2$. Ensuite, en échangeant les noms des indices,

$$\sum_{i > j} a_i a_j = \sum_{i < j} a_j a_i = \sum_{i < j} a_i a_j. \text{ Donc } \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j.$$

2. On prend $a_k = k$. Alors

$$\sum_{i < j} ij = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \frac{n(n+1)}{24} (3n(n+1) - 2(2n+1)).$$

Or $3n^2 + 3n - 4n - 2 = 3n^2 - n - 2 = (n-1)(3n+2)$. **Donc**

$$\sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 11}} ij = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}. \text{ Pour } n = 3, \text{ on trouve } 2 + 3 + 6 = 11 \text{ et } \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 11}{24} = 11.$$

3. On applique la question 1 aux $n+1$ réels $a_k = 2^k$, pour k de 0 à n . Notons

$u = 2^{n+1}$. D'une part, $\sum_{k=0}^n 2^k = u - 1$. D'autre part,

$$\sum_{k=0}^n 4^k = \frac{4^{n+1} - 1}{3} = \frac{u^2 - 1}{3}. \text{ Donc}$$

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} 2^{i+j} = \frac{1}{2} \left((u-1)^2 - \frac{u^2-1}{3} \right) = \frac{2u^2 - 6u + 4}{6} = \frac{(u-1)(u-2)}{3}.$$

La somme vaut $\frac{(2^{n+1}-1)(2^{n+1}-2)}{3}$. Pour $n = 2$: $2 + 4 + 8 = 14 = \frac{7 \times 6}{3}$.

Corrigé de l'exercice 10 : Factorielles et coefficients binomiaux

1. On a $(n+2)! = (n+2)(n+1)n!$. **Donc** $\frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2)$. De même,

$$\frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n+1)(2n+2).$$

2. Chacun des n facteurs contient un 2. Donc $\prod_{k=1}^n 2k = 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n!$. Ensuite, $(2n)!$

est le produit des entiers de 1 à $2n$. On sépare les facteurs pairs $2k$ et impairs $2k-1$, pour

$$k \text{ de } 1 \text{ à } n : (2n)! = 2^n n! \prod_{k=1}^n (2k-1). \text{ Donc } \prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

3. D'abord, $\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$. Ensuite, par symétrie, $\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$.
Enfin, $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$, valable aussi pour $n = 1$. **Les valeurs sont 35, 45 et $\frac{n(n-1)}{2}$.**

4. Pour $1 \leq k \leq n$, on simplifie k avec $k!$:

$$k \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

La formule est démontrée.

5. On applique la formule de Pascal au rang $n+1$, puis deux fois au rang n :

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+2} = \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right] + \left[\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} \right].$$

Donc $\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Corrigé de l'exercice 11 : Formule du binôme et coefficient d'un terme

1. La ligne 5 du triangle de Pascal est 1, 5, 10, 10, 5, 1. Le terme en x^{5-k} vaut $\binom{5}{k} 2^k x^{5-k}$.
Ainsi $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$. De même, avec la ligne 1, 4, 6, 4, 1 et des signes alternés, $(1-x)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$.

2. Par la formule du binôme, le terme d'indice k vaut

$$\binom{9}{k} (2x)^{9-k} \left(-\frac{1}{x}\right)^k = \binom{9}{k} 2^{9-k} (-1)^k x^{9-2k}.$$

L'exposant vaut 3 si et seulement si $k = 3$. Le coefficient cherché est

$\binom{9}{3} 2^6 (-1)^3 = -84 \times 64$. **Le coefficient de x^3 vaut -5376 .** Enfin, un terme constant exigerait $9 - 2k = 0$, ce qui est impossible car 9 est impair. **Il n'y a pas de terme constant.**

3. Par la formule du binôme, $(1 + \sqrt{2})^4 + (1 - \sqrt{2})^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \sqrt{2}^k (1 + (-1)^k)$. Les termes d'indice impair s'annulent. Il reste

$$2 \left(\binom{4}{0} + \binom{4}{2} \cdot 2 + \binom{4}{4} \cdot 4 \right) = 2(1 + 12 + 4).$$

La somme vaut 34.

Corrigé de l'exercice 12 : Sommes binomiales classiques

1. Par la formule du binôme avec $a = 2$ et $b = 1$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n$.

2. Le terme $k = 0$ est nul. Pour $k \geq 1$, la formule « pion » donne

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}. \text{ Donc, avec } j = k - 1,$$

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n 2^{n-1}. \text{ Ensuite, pour } k \geq 2, \text{ on applique}$$

deux fois la formule « pion » :

$$k(k-1) \binom{n}{k} = (k-1) n \binom{n-1}{k-1} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}.$$

Les termes $k = 0$ et $k = 1$ sont nuls. Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) 2^{n-2}. \text{ Enfin, } k^2 = k(k-1) + k, \text{ donc la somme vaut}$$

$$n(n-1) 2^{n-2} + 2n 2^{n-2}. \text{ Ainsi } \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1) 2^{n-2}. \text{ Pour } n = 2 :$$

$$0 + 2 + 4 = 6 = 2 \times 3 \times 1.$$

3. Pour $0 \leq k \leq n$, on a $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)! (n-k)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)! ((n+1)-(k+1))!}$. C'est bien $\frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$. Avec $j = k + 1$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - \binom{n+1}{0}).$$

La somme vaut $\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

4. Notons P la somme des termes d'indice pair et I celle des termes d'indice impair. D'une part, $P + I = \sum_k \binom{n}{k} = 2^n$. D'autre part, $P - I = \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = (1 - 1)^n = 0$, car $n \geq 1$. En additionnant, $2P = 2^n$. **Donc** $P = 2^{n-1}$.

Corrigé de l'exercice 13 : Somme des carrés des coefficients binomiaux

1. Par la formule du binôme, $(1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i$. Le produit de deux sommes est une somme double :

$$(1+x)^n (1+x)^n = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \binom{n}{i} \binom{n}{j} x^{i+j}.$$

On regroupe les couples selon $m = i + j$, qui varie de 0 à $2n$. À m fixé, on a $j = m - i$. Grâce à la convention $\binom{n}{j} = 0$ pour $j < 0$ ou $j > n$, on peut laisser i varier de 0 à m . **Le coefficient de x^m est donc** $\sum_{i=0}^m \binom{n}{i} \binom{n}{m-i}$.

2. D'autre part, $(1+x)^{2n} = \sum_{m=0}^{2n} \binom{2n}{m} x^m$. Les deux fonctions polynomiales sont égales sur $\mathbb{R}$. Par le résultat admis, leurs coefficients coïncident. **Donc**

$$\sum_{i=0}^m \binom{n}{i} \binom{n}{m-i} = \binom{2n}{m}.$$

3. On prend $m = n$. Par symétrie, $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$. **Donc** $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
Pour $n = 4$, on trouve $1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70$, et $\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{24} = 70$.

Corrigé de l'exercice 14 : Formule de la crosse de hockey

1. La formule de Pascal, valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, donne

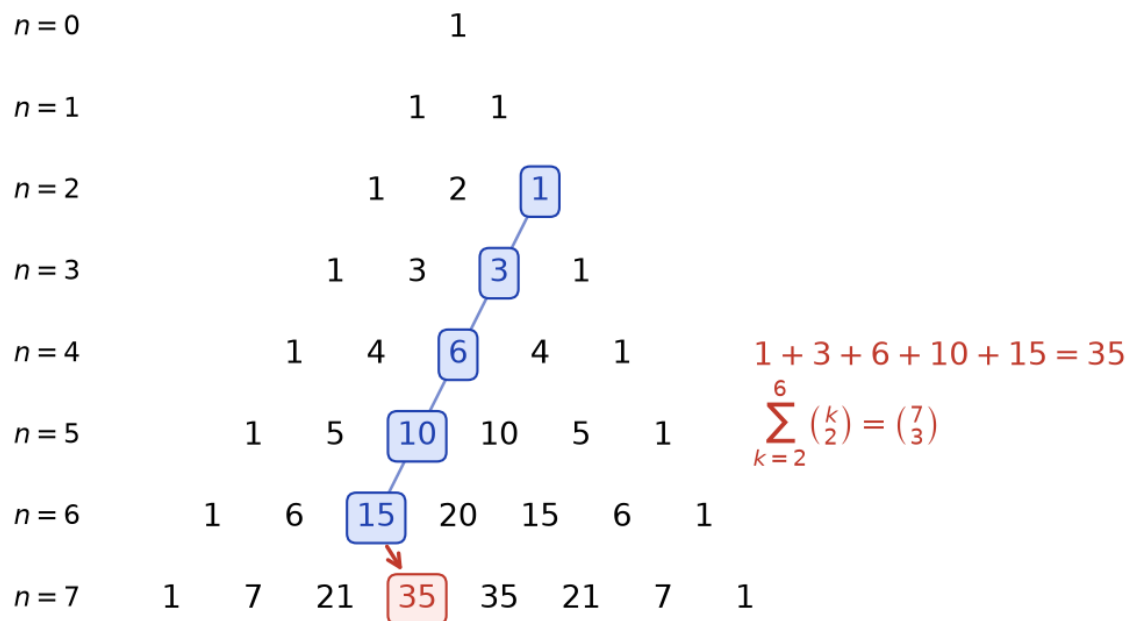
$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1} \quad \text{Donc}$$

$$\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}.$$

2. On pose $u_k = \binom{k}{p+1}$. La question 1 s'écrit $\binom{k}{p} = u_{k+1} - u_k$. Par télescopage, $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = u_{n+1} - u_p$. Or $u_p = \binom{p}{p+1} = 0$. **Donc**

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

3. Pour $p = 2$ et $n = 6$, la colonne des $\binom{k}{2}$ donne $1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$. Or $\binom{7}{3} = 35$. **Le résultat est vérifié.** La figure montre cette « crose » dans le triangle de Pascal.



4. Pour $p = 1$, on obtient $\sum_{k=1}^n k = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Pour $p = 2$, comme $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$, on obtient $\sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3}$. Le terme $k = 1$ de $k(k-1)$ est nul, donc $\sum_{k=1}^n k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$. Enfin, $k^2 = k(k-1) + k$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6}(2(n-1) + 3).$$

On retrouve $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Corrigé de l'exercice 15 : Système 3×3 par la méthode du pivot

1. On prend la première ligne comme pivot. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - 2z = -4 \\ -7z = -21. \end{cases}$$

On a échangé L_2 et L_3 , pour avoir un pivot égal à 1, puis effectué $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$. Ainsi $z = 3$, puis $y = -4 + 6 = 2$, enfin $x = 6 - 2 - 3 = 1$. **L'unique solution est $(1, 2, 3)$.** On vérifie : $2 - 2 + 3 = 3$ et $1 + 4 - 3 = 2$.

2. Avec $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient $-y + 3z = 2$ et $-y + 3z = 4$. Ensuite, $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne $0 = 2$. **Le système est incompatible : il n'a aucune solution.**

3. Les mêmes opérations donnent cette fois $-y + 3z = 2$ deux fois, puis $0 = 0$. Le système équivaut à $x + 2y - z = 1$ et $y = 3z - 2$. L'inconnue z est libre. Ensuite,

$x = 1 - 2(3z - 2) + z = 5 - 5z$. **L'ensemble des solutions est** $\left\{ \begin{pmatrix} 5 - 5z, \\ 3z - 2, \\ z \end{pmatrix} \right\}$. Pour

$z = 0$, on vérifie que $(5, -2, 0)$ convient dans les trois équations.

Point de méthode : vérifiez toujours la solution trouvée dans les équations de départ ; cela prend dix secondes et détecte presque toutes les erreurs de signe.

Corrigé de l'exercice 16 : Système linéaire à paramètre

1. On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - mL_1$. Ces opérations sont licites pour toute valeur de m . On obtient

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ (m-1)y + (1-m)z = 0 \\ (1-m)y + (1-m^2)z = 1-m. \end{cases}$$

En effet, $1 - m \cdot m = 1 - m^2$ et $1 - m \cdot 1 = 1 - m$. **C'est le système réduit après le premier pivot.**

2. Premier cas : $m = 1$. Les deux dernières lignes deviennent $0 = 0$. Le système équivaut à

$$x + y + z = 1. \text{ Les solutions sont les triplets } \begin{pmatrix} 1-y-z, \\ y, \\ z \end{pmatrix}, \text{ avec } y, z \text{ réels}$$

quelconques.

Si $m \neq 1$, on peut diviser L_2 par $m-1$ et L_3 par $1-m$. Comme $1-m^2 = (1-m)(1+m)$, on obtient $y - z = 0$ et $y + (1+m)z = 1$. Ensuite, $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne $(m+2)z = 1$.

Deuxième cas : $m = -2$. La dernière ligne devient $0 = 1$. **Le système n'a aucune solution.**

Troisième cas : $m \notin \{1, -2\}$. Alors $z = \frac{1}{m+2}$, puis $y = z$, enfin

$$x = 1 - y - mz = 1 - \frac{1+m}{m+2} = \frac{1}{m+2}. \text{ L'unique solution est } \left(\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2} \right).$$

On vérifie : chaque équation donne $\frac{m+2}{m+2} = 1$.

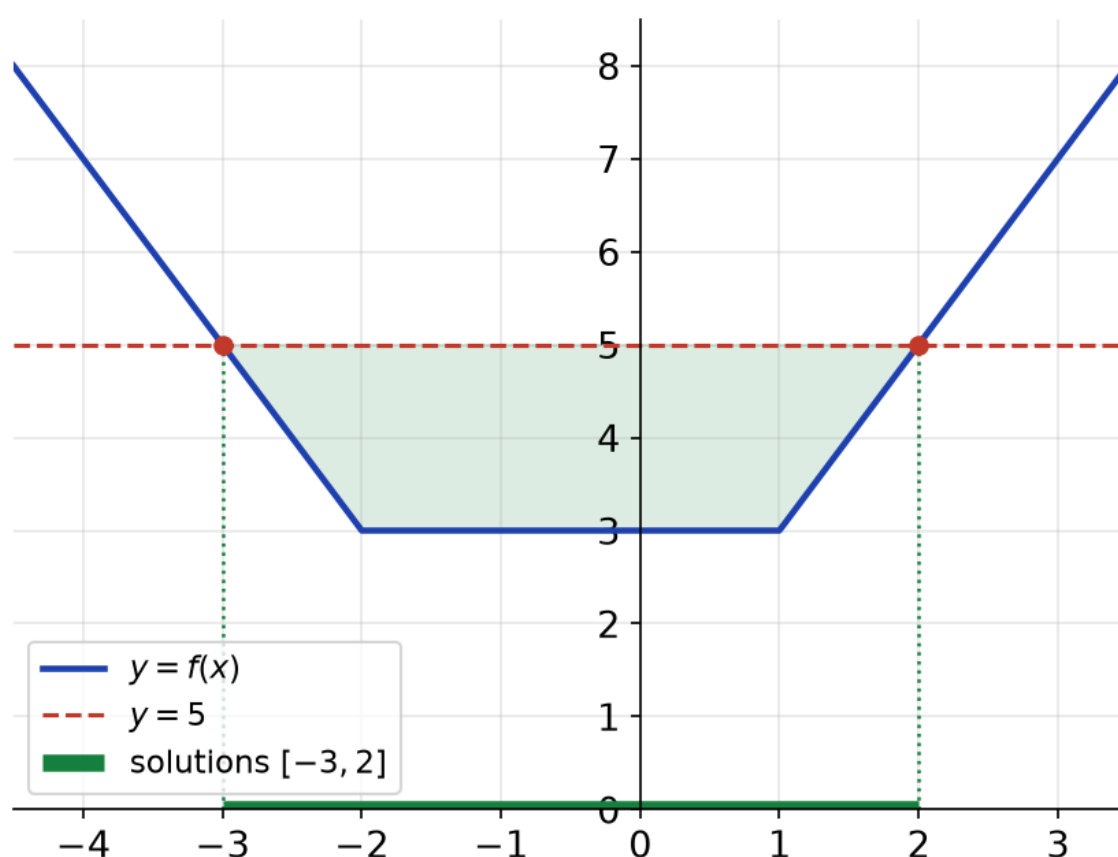
Corrigé de l'exercice 17 : Inéquations avec valeurs absolues

1. On a $|2x - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 8$. **L'ensemble des solutions est $[-1, 4]$.**
2. Les expressions $x - 1$ et $x + 2$ changent de signe en 1 et en -2 . On découpe donc $\mathbb{R}$

en trois intervalles.

- Si $x \leq -2$: $f(x) = (1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$. Donc $f(x) \leq 5 \Leftrightarrow x \geq -3$. On garde $[-3, -2]$.
- Si $-2 \leq x \leq 1$: $f(x) = (1 - x) + (x + 2) = 3 \leq 5$. Tout l'intervalle convient.
- Si $x \geq 1$: $f(x) = 2x + 1$. Donc $f(x) \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 2$. On garde $[1, 2]$.

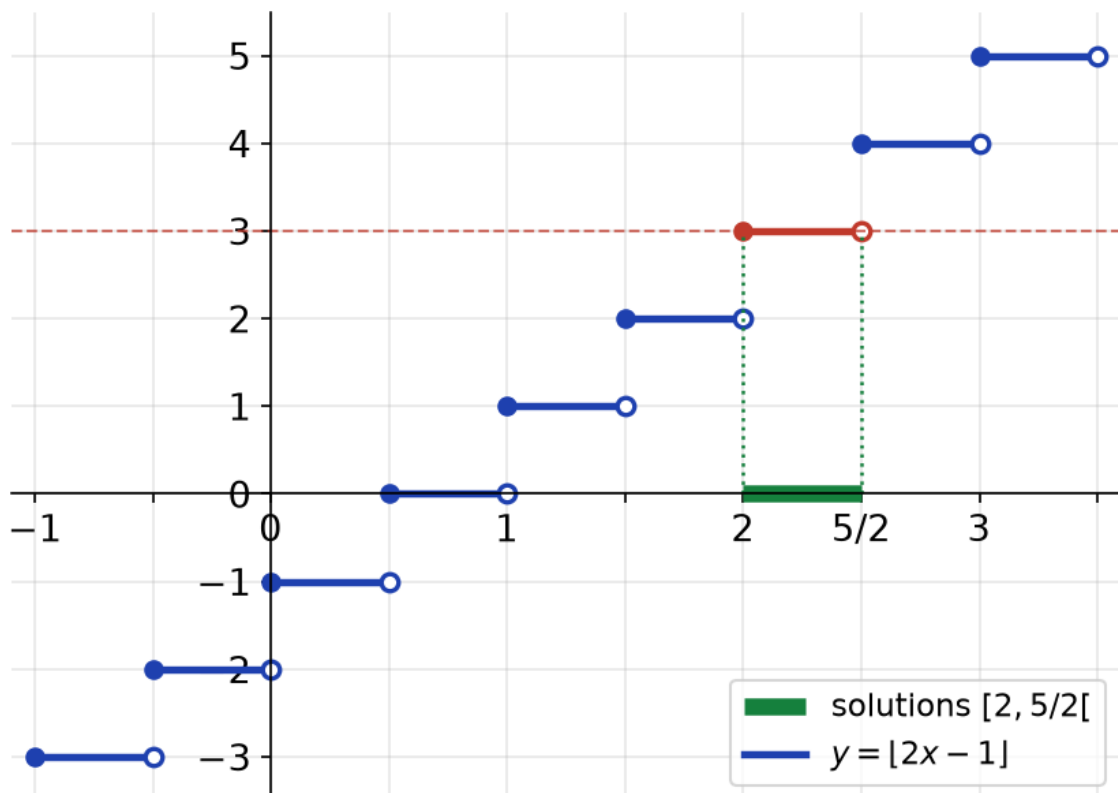
En réunissant, **l'ensemble des solutions est** $[-3, 2]$. La figure ci-dessous le confirme : c'est l'ensemble des abscisses où le graphe de f est sous la droite $y = 5$.



3. Les deux membres sont positifs, et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc l'inéquation équivaut à $(x-1)^2 < (x+3)^2$. En développant, $x^2 - 2x + 1 < x^2 + 6x + 9$, soit $-8 < 8x$. **L'ensemble des solutions est** $] -1, +\infty[$. Géométriquement, ce sont les réels plus proches de 1 que de -3.
4. On a $|x^2 - 4| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x^2 - 4 \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 7$. Or $x^2 = |x|^2$, donc cela équivaut à $1 \leq |x| \leq \sqrt{7}$. **L'ensemble des solutions est** $[-\sqrt{7}, -1] \cup [1, \sqrt{7}]$.

Corrigé de l'exercice 18 : Équations et sommes avec partie entière

1. Par définition, $\lfloor 2x - 1 \rfloor = 3 \Leftrightarrow 3 \leq 2x - 1 < 4 \Leftrightarrow 4 \leq 2x < 5$. **L'ensemble des solutions est $\left[2, \frac{5}{2}\right[$.** La figure ci-dessous montre la marche de hauteur 3 du graphe.



2. Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $-x \in \mathbb{Z}$, donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = x - x = 0$. Sinon, notons $n = \lfloor x \rfloor$. Comme x n'est pas entier, $n < x < n + 1$. Donc $-n - 1 < -x < -n$, ce qui donne $\lfloor -x \rfloor = -n - 1$. **La somme vaut donc 0 si $x \in \mathbb{Z}$ et -1 sinon.**
3. Notons $n = \lfloor x \rfloor$ et $r = x - n \in [0, 1[$. D'abord, si $r < \frac{1}{2}$, alors $n \leq x + \frac{1}{2} < n + 1$, donc $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n$. De plus, $2x = 2n + 2r$ avec $0 \leq 2r < 1$, donc $\lfloor 2x \rfloor = 2n$. Les deux membres valent $2n$. Ensuite, si $r \geq \frac{1}{2}$, alors $n + 1 \leq x + \frac{1}{2} < n + \frac{3}{2}$, donc $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n + 1$. De même, $1 \leq 2r < 2$ donne $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1$. **Dans les deux cas, $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.**

4. On sépare les indices impairs $k = 2p - 1$ et pairs $k = 2p$, pour p de 1 à n . On a $\lfloor \frac{2p-1}{2} \rfloor = \lfloor p - \frac{1}{2} \rfloor = p - 1$ et $\lfloor \frac{2p}{2} \rfloor = p$. Donc la somme vaut $\sum_{p=1}^n (2p - 1) = n(n+1) - n$. Ainsi $\sum_{k=1}^{2n} \lfloor \frac{k}{2} \rfloor = n^2$.
5. On a $\lfloor x^2 \rfloor = 2 \Leftrightarrow 2 \leq x^2 < 3 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq |x| < \sqrt{3}$. L'ensemble des solutions est $]-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}[$.

Corrigé de l'exercice 19 : Majorants, minorants, maximum et minimum

1. Notons $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. On trouve $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = -\frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{5}{4}$, $a_5 = -\frac{4}{5}$ et $a_6 = \frac{7}{6}$. **Les rangs pairs donnent des valeurs supérieures à 1, les rangs impairs des valeurs de $]-1, 0]$.**
2. Si n est pair, alors $n \geq 2$, donc $a_n = 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}$. Si n est impair, alors $a_n = -1 + \frac{1}{n} \leq 0 \leq \frac{3}{2}$. Ainsi, $\frac{3}{2}$ est un majorant de A . De plus, $\frac{3}{2} = a_2$ appartient à A . **Donc A admet un maximum, égal à $\frac{3}{2}$.**
3. Pour tout n , on a $(-1)^n \geq -1$ et $\frac{1}{n} > 0$, donc $a_n > -1$. Ainsi, -1 minore A . Montrons ensuite qu'aucun élément de A n'est un minimum. Soit $a_n \in A$. Si n est pair, alors $a_1 = 0 < 1 < a_n$. Si n est impair, alors $n + 2$ est impair et $a_{n+2} = -1 + \frac{1}{n+2} < -1 + \frac{1}{n} = a_n$. Dans les deux cas, A contient un élément strictement plus petit que a_n . **Donc A n'admet pas de minimum.** La figure de l'énoncé montre bien les rangs impairs s'accumuler vers -1 sans l'atteindre.
4. Soit m un minorant de A . Supposons par l'absurde que $m > -1$. Posons $u = \frac{1}{m+1} > 0$ et $N = 2\lfloor u \rfloor + 1$. L'entier N est impair. De plus, $\lfloor u \rfloor \geq 0$, donc $N \geq \lfloor u \rfloor + 1 > u$. Par conséquent, $\frac{1}{N} < m + 1$, c'est-à-dire $a_N = -1 + \frac{1}{N} < m$. C'est absurde, car m minore A . **Donc tout minorant de A vérifie $m \leq -1$: -1 est le plus grand des minorants.**
5. On factorise : $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Ce trinôme est strictement négatif entre ses racines. Donc $B =]1, 2[$. Tout réel $M \geq 2$ majore B . En revanche, si $M < 2$, le réel $x = \frac{\max(M, 1) + 2}{2}$ est dans B et vérifie $x > M$. **Les majorants de B forment $[2, +\infty[$ et, de même, ses minorants forment $]-\infty, 1]$.** Enfin, pour tout $x \in B$, le réel

$\frac{x+2}{2}$ est dans B et plus grand que x . Donc B n'a pas de maximum ; de même, il n'a pas de minimum.

Corrigé de l'exercice 20 : Encadrer une somme et un produit

1. On additionne les encadrements : $-2 \leq x + y \leq 1$. Pour la différence, on encadre d'abord $-y \in [1, 3]$, puis on additionne : $2 \leq x - y \leq 5$. Pour le produit, on travaille avec des nombres positifs. En effet, $|y| = -y \in [1, 3]$, donc $1 \leq x|y| \leq 6$. Comme $xy = -x|y|$, on obtient $-6 \leq xy \leq -1$. Enfin, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{|y|} \leq 1$, donc $\frac{1}{3} \leq \frac{x}{|y|} \leq 2$. Ainsi $-2 \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{3}$. Ces bornes sont atteintes, par exemple $\frac{x}{y} = -2$ pour $x = 2$ et $y = -1$.

2. Pour $n = 1$, les trois nombres valent 1. Pour $n \geq 2$, on a $n! = \prod_{k=2}^n k$, produit de $n - 1$ facteurs positifs tous supérieurs ou égaux à 2. Donc $n! \geq 2^{n-1}$. De plus, chacun des n facteurs de $\prod_{k=1}^n k$ est compris entre 0 et n . Donc $n! \leq n^n$. Ainsi $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

3. On développe : $(k-1)(n-k) = kn - k^2 - n + k = k(n+1-k) - n$. L'identité est vérifiée. Pour $1 \leq k \leq n$, les deux facteurs $k-1$ et $n-k$ sont positifs. Donc $k(n+1-k) \geq n$. Ensuite, le retournement $j = n+1-k$ montre que $n! = \prod_{k=1}^n (n+1-k)$. Par conséquent,

$$(n!)^2 = \prod_{k=1}^n k \times \prod_{k=1}^n (n+1-k) = \prod_{k=1}^n k(n+1-k) \geq \prod_{k=1}^n n.$$

On a multiplié des inégalités entre nombres positifs. Donc $(n!)^2 \geq n^n$.

4. Pour $k \geq 1$, on a $(2k-1)(2k+1) = 4k^2 - 1 < 4k^2$. Les dénominateurs étant positifs, cela donne $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$. On multiplie ces n inégalités entre nombres positifs : $P_n \leq Q_n$. Ensuite, en regroupant les facteurs de même k ,

$$P_n Q_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

En effet, c'est un produit télescopique avec $u_k = 2k - 1$ et $u_{k+1} = 2k + 1$. Par conséquent, $P_n^2 \leq P_n Q_n = \frac{1}{2n+1}$. Comme $P_n > 0$, **on conclut que** $P_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Point de méthode : pour majorer un produit qu'on ne sait pas calculer, on cherche un produit « jumeau » plus grand dont le produit avec le premier télescope.

Corrigé de l'exercice 21 : Inégalité triangulaire et encadrements

- On écrit $x - z = (x - y) + (y - z)$, puis on applique l'inégalité triangulaire. **Donc**
 $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$. Autrement dit, la distance directe est plus courte que le détour par y .
- D'abord, $2x = (x + y) + (x - y)$, donc $2|x| \leq |x + y| + |x - y|$. Ensuite,
 $2y = (x + y) - (x - y)$, donc $2|y| \leq |x + y| + |x - y|$. En additionnant et en divisant par 2, **on obtient** $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.
- On a $|x + 2| = |(x - 2) + 4| \leq |x - 2| + 4 \leq \frac{9}{2}$. Donc
 $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2}$. **Ainsi** $|x^2 - 4| \leq \frac{9}{4}$. Ensuite, l'hypothèse donne
 $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$, donc $x > 0$ et $|x| \geq \frac{3}{2}$. Par conséquent,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| = \frac{|2 - x|}{2|x|} \leq \frac{1/2}{2 \times 3/2} = \frac{1}{6}.$$

On a majoré le numérateur et minoré le dénominateur positif. **Donc** $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{6}$.

- Pour $n = 1$, c'est une égalité. Supposons l'inégalité vraie au rang n . Par l'inégalité triangulaire, puis l'hypothèse de récurrence :

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|.$$

L'inégalité est donc vraie pour tout $n \geq 1$. Ensuite, $|\sin k| \leq 1$, donc

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$$

La somme est donc strictement comprise entre -1 et 1 .

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : sommes des puissances d'entiers

1. Soit $k \geq 1$. Par la formule du binôme, $(k+1)^{p+1} = \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} k^j$. Le terme $j = p+1$ vaut k^{p+1} , donc

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} k^j.$$

On somme pour k de 1 à n . À gauche, le télescopage laisse $(n+1)^{p+1} - 1$. À droite, on intervertit les deux sommes finies. On obtient $\sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} \sum_{k=1}^n k^j$. Enfin,

$$\sum_{k=1}^n k^0 = n = S_0(n). \text{ La relation est démontrée.}$$

2. Pour $p = 1$, la relation s'écrit $S_0 + 2S_1 = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$. Donc

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}. \text{ Pour } p = 2, \text{ elle s'écrit } S_0 + 3S_1 + 3S_2 = (n+1)^3 - 1. \text{ Ainsi,}$$

$$3S_2 = n^3 + 3n^2 + 3n - n - \frac{3n(n+1)}{2} = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

$$\text{Donc } S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Pour $p = 3$, on a $S_0 + 4S_1 + 6S_2 + 4S_3 = (n+1)^4 - 1 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n$.

Or $S_0 + 4S_1 + 6S_2 = n + 2n^2 + 2n + 2n^3 + 3n^2 + n$. Cette expression vaut

$$2n^3 + 5n^2 + 4n. \text{ Par différence, } 4S_3 = n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n+1)^2. \text{ Donc}$$

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1(n)^2.$$

4. Notons $\mathcal{P}(p)$ l'assertion de l'énoncé. Pour $p = 0$, on a $S_0(n) = n = \frac{n^1}{1} + 0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie avec $c_0 = 0$. Soit $p \geq 1$, et supposons $\mathcal{P}(j)$ vraie pour tout $j \leq p-1$. La question 1 donne

$$(p+1)S_p(n) = (n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n).$$

D'abord, la formule du binôme donne $(n+1)^{p+1} = n^{p+1} + \sum_{i=0}^p \binom{p+1}{i} n^i$.

Ensuite, pour $j \leq p-1$, l'hypothèse de récurrence écrit $S_j(n)$ comme combinaison à coefficients rationnels de $n^0, \dots, n^{j+1}$, avec $j+1 \leq p$. Par conséquent, il existe des rationnels $d_0, \dots, d_p$, indépendants de n , tels que $(p+1)S_p(n) = n^{p+1} + \sum_{i=0}^p d_i n^i$.

En divisant par $p+1$, on pose $c_i = \frac{d_i}{p+1}$. Ainsi $\mathcal{P}(p)$ est vraie, et le résultat vaut pour tout $p \in \mathbb{N}$ par récurrence forte.

5. Soit $k \geq 1$. La fonction $t \rightarrow t^p$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour $t \in [k-1, k]$, on a donc

$$t^p \leq k^p. \text{ Par croissance de l'intégrale sur un intervalle de longueur } 1, \int_{k-1}^k t^p dt \leq k^p.$$

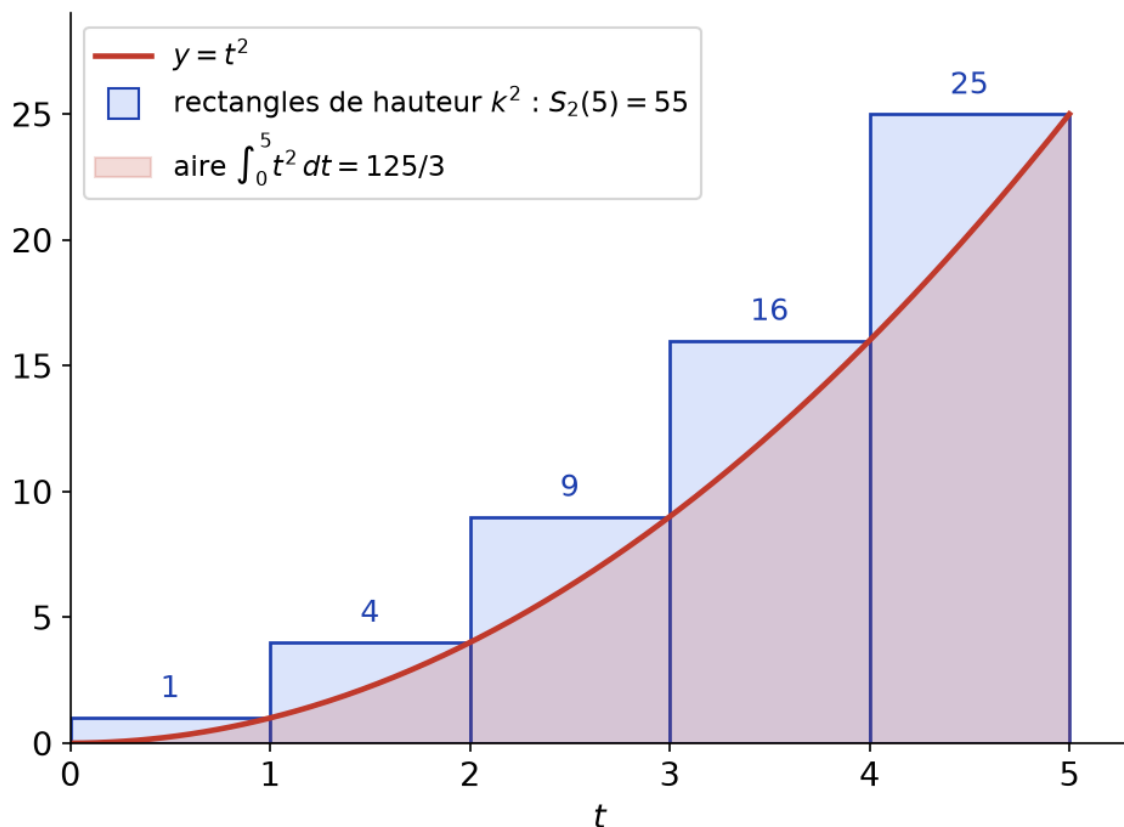
De même, $t^p \geq k^p$ sur $[k, k+1]$ donne la seconde inégalité. On somme pour k de 1 à n , avec la relation de Chasles :

$$\int_0^n t^p dt \leq S_p(n) \leq \int_1^{n+1} t^p dt.$$

Cela donne $\frac{n^{p+1}}{p+1} \leq S_p(n) \leq \frac{(n+1)^{p+1} - 1}{p+1}$. La figure ci-dessous illustre la minoration pour $p = 2$ et $n = 5$: les rectangles de hauteur k^2 recouvrent l'aire sous la courbe. On divise ensuite par $n^{p+1} > 0$:

$$\frac{1}{p+1} \leq \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} \leq \frac{1}{p+1} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p+1} - \frac{1}{n^{p+1}} \right).$$

Le majorant tend vers $\frac{1}{p+1}$. Par le théorème des gendarmes, $\frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$ tend vers $\frac{1}{p+1}$.



Point de méthode : la relation de la question 1 permet de calculer les S_p de proche en proche ; retenez surtout le terme dominant $\frac{n^{p+1}}{p+1}$.

Corrigé de l'exercice 23 : Problème : inégalité de Cauchy-Schwarz discrète

1. On développe le carré : $(a_i b_j - a_j b_i)^2 = a_i^2 b_j^2 - 2a_i b_i a_j b_j + a_j^2 b_i^2$. On somme sur tous les couples. D'abord, $\sum_{i,j} a_i^2 b_j^2 = \left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum_j b_j^2\right) = AB$. Par symétrie des rôles de i et j , le troisième terme donne aussi AB . Enfin, $\sum_{i,j} (a_i b_i)(a_j b_j) = C^2$, car c'est le produit de deux sommes. **Donc** $D = 2AB - 2C^2 = 2(AB - C^2)$.

2. Le nombre D est une somme de carrés de réels, donc $D \geq 0$. **Par conséquent**

$C^2 \leq AB$. De plus, une somme de carrés est nulle si et seulement si chaque carré est nul. **Il y a donc égalité si et seulement si** $a_i b_j = a_j b_i$ **pour tous** i, j .

3. Directement, l'inégalité s'écrit $\frac{n^2(n+1)^2}{4} \leq \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}$. Après division par $\frac{n^2(n+1)}{12} > 0$, elle équivaut à $3(n+1) \leq 2(2n+1)$, soit $n \geq 1$. Elle est donc vraie. Par Cauchy-Schwarz, on prend $a_k = 1$ et $b_k = k$. Alors $C = \sum k$, $A = n$ et $B = \sum k^2$. On

retrouve $\left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n k^2$.

4. On pose $a_k = \sqrt{x_k}$ et $b_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}}$, bien définis car $x_k > 0$. Alors $a_k b_k = 1$, donc $C = n$. De plus, $A = \sum x_k$ et $B = \sum \frac{1}{x_k}$. **Cauchy-Schwarz donne**
 $\left(\sum x_k\right)\left(\sum \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2$.

5. On applique la question 4 avec $x_k = k$. On obtient $\frac{n(n+1)}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq n^2$. En divisant par $\frac{n(n+1)}{2} > 0$, il vient $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \frac{2n}{n+1}$.

6. On prend $a_k = 1$ et $b_k = \sqrt{k}$. Alors $\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{k}\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n k = \frac{n^2(n+1)}{2}$. Les deux membres sont positifs, et la racine carrée est croissante. **Donc** $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq n \sqrt{\frac{n+1}{2}}$.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [sommes, produits et inégalités, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur sommes, produits et inégalités](#)
- À maîtriser avant : [Logique, ensembles, applications et relations](#)
- Chapitre précédent : [Logique, ensembles, applications et relations](#)

- Chapitre suivant : [Trigonométrie et fonctions circulaires](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)