

Séries numériques

Exercice 1 : Sommes partielles et séries télescopiques

Justifiez la convergence de chacune des séries suivantes et calculez sa somme.

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$

2. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$ On pourra écrire $\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$

3. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$

Exercice 2 : Divergence grossière

1. Montrez que les séries $\sum \cos \frac{1}{n}, \sum n \sin \frac{1}{n}$ et $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ divergent grossièrement.

2. La série $\sum (-1)^n$ converge-t-elle ?

3. Montrez que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

4. Calculez $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Dédisez-en que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, bien que son terme général tende vers 0.

Exercice 3 : Séries géométriques et série exponentielle

Justifiez la convergence et calculez la somme des séries suivantes.

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n + (-1)^n}{3^n}.$

2. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{3^n}$, puis le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}.$

3. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-2)^n}{n!}.$

4. $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!}.$

Exercice 4 : Comparaison avec les séries de Riemann

Déterminez la nature des séries de termes généraux suivants.

1. $u_n = \frac{1}{n^2 + n + 1}.$

2. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}.$

3. $u_n = \frac{n+1}{n^2 + 3}.$

4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, pour $n \geq 1.$

5. $u_n = \sin \frac{1}{n^2}$, pour $n \geq 1.$

Exercice 5 : Nature par équivalents

Déterminez la nature des séries de termes généraux suivants, définis pour $n \geq 1$.

1. $u_n = 1 - \cos \frac{1}{n}$.

2. $u_n = e^{1/n} - 1$.

3. $u_n = \frac{1}{n} \tan \frac{1}{n}$.

4. $u_n = n^{1/n} - 1$.

5. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Retrouvez le résultat en calculant les sommes partielles.

Exercice 6 : Comparaison à une série de Riemann par domination

Déterminez la nature des séries suivantes, en comparant u_n à $\frac{1}{n^\alpha}$ pour un α bien choisi.

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$.

2. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$.

3. $\sum_{n \geq 0} e^{-\sqrt{n}}$.

4. $\sum_{n \geq 0} n^3 e^{-n}$.

5. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$. On pourra écrire $(\ln n)^{\ln n} = n^{\ln(\ln n)}$.

Exercice 7 : Convergence absolue

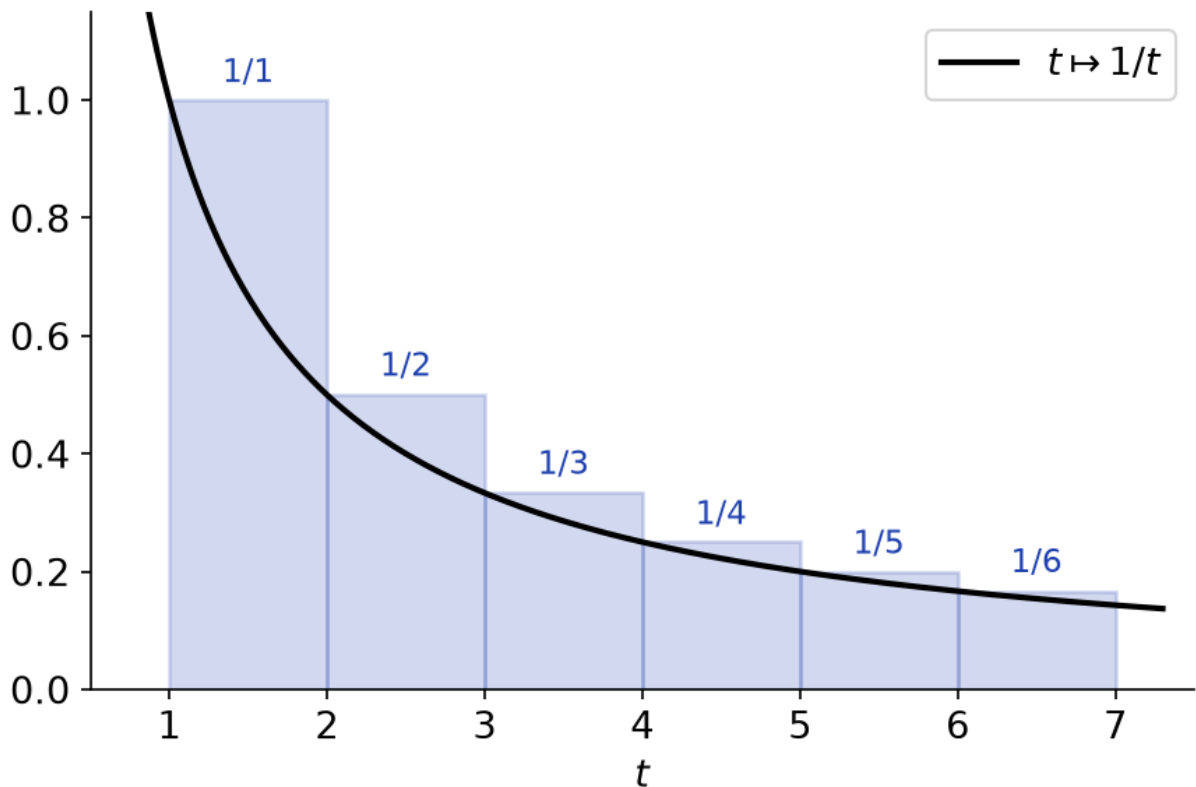
1. Montrez que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^2}$ converge.
2. Montrez que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n n}{2^n}$ converge absolument.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrez que $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n\sqrt{n}}$ converge.
4. Montrez que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n + \sin n}{n^2 + 1}$ converge, et majorez la valeur absolue de sa somme par $2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.
5. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est-elle absolument convergente ?

Exercice 8 : Séries alternées : premières applications

1. Montrez que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais pas absolument.
2. Montrez que $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge.
3. Montrez que $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$ converge. On étudiera les variations de $x \rightarrow \frac{x}{x^2 + 1}$.
4. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$. À partir de quel rang n la somme partielle S_n fournit-elle une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-2} près, d'après le théorème des séries alternées ? Est-ce une valeur par défaut ou par excès lorsque n est pair ?

Exercice 9 : Encadrement de la série harmonique et constante d'Euler

Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln n$. La figure ci-dessous représente la fonction $t \rightarrow \frac{1}{t}$ et les rectangles de hauteur $\frac{1}{k}$ posés sur $[k, k+1]$.



1. Justifiez que, pour tout entier $k \geq 1$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.
2. Déduisez-en que $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$, puis que $H_n \sim \ln n$.
3. Montrez que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.
4. Concluez que (u_n) converge vers un réel $\gamma \in [0, 1]$, appelé constante d'Euler. Écrivez le résultat sous la forme $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
5. Reformulez la question 3 en termes de série : quelle série télescopique converge ici ?

Exercice 10 : Séries de Bertrand particulières

1. Montrez que la fonction $f : t \rightarrow \frac{1}{t \ln t}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$.
2. Calculez $\int_2^x \frac{dt}{t \ln t}$ pour $x \geq 2$. Déduisez-en que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge.
3. Montrez plus précisément que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$.
4. Par la même méthode, montrez que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^2}$ converge.
5. Pourquoi la règle « $n^\alpha u_n \rightarrow 0$ avec $\alpha > 1$ » ne permet-elle pas de conclure à la question 4 ?

Exercice 11 : Équivalent du reste d'une série de Riemann

Soit $\alpha > 1$. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrez que $\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^\alpha - 1} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^\alpha - 1}$.
2. Déduisez-en un équivalent simple de R_n .
3. Dans le cas $\alpha = 2$, déterminez un rang n à partir duquel $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ approche la somme de la série à 10^{-3} près.
4. Toujours pour $\alpha = 2$, montrez que $S_n + \frac{1}{n+1}$ et $S_n + \frac{1}{n}$ encadrent la somme. Quelle précision obtient-on alors avec $n = 100$?

Exercice 12 : Sommes partielles de séries divergentes

1. Par une comparaison série-intégrale, montrez que pour $n \geq 1$,

$$\frac{2}{3} n^{3/2} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \frac{2}{3} \left((n+1)^{3/2} - 1 \right).$$

2. Déduisez-en un équivalent de $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

3. Montrez de même que $n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln 2 + 1$ pour $n \geq 2$.

4. Déduisez-en que $\ln(n!) \sim n \ln n$.

Exercice 13 : Somme approchée d'une série alternée

On considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, de somme S , de sommes partielles S_n et de restes R_n .

- Montrez que cette série converge absolument.
- Appliquez le théorème des séries alternées : donnez le signe de R_n selon la parité de n et une majoration de $|R_n|$.
- Calculez S_3 et S_4 sous forme de fractions, puis encadrez S .
- Déterminez le plus petit rang n pour lequel le théorème garantit $|S - S_n| \leq 10^{-2}$.

Exercice 14 : Développement asymptotique d'une série alternée perturbée

1. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. Justifiez que u_n est bien défini, puis montrez que

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

2. Déduisez-en la nature de $\sum_{n \geq 2} u_n$.

3. Montrez que $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Expliquez pourquoi ce résultat ne contredit pas le cours.

4. Pour $n \geq 2$, on pose $v_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. Déterminez la nature de $\sum v_n$.

Exercice 15 : Une série trigonométrique à terme oscillant

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$.

1. Montrez que $\sqrt{n^2 + 1} = n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

2. Déduisez-en que $u_n = (-1)^n \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

3. Montrez que la série $\sum u_n$ converge.

4. Est-elle absolument convergente ?

Exercice 16 : Séries dépendant d'un paramètre

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminez, selon la valeur de α , la nature des séries suivantes.

1. $\sum_{n \geq 1} n^a \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \right).$
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^a}.$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n^2}$ (on distinguera $|a| < 1$, $|a| = 1$ et $|a| > 1$).

Exercice 17 : Comparaison logarithmique

Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives telles que, pour tout $n \geq n_0$,
 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$

1. Montrez que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ est décroissante. Dédisez-en que $u_n = O(v_n).$
2. Concluez que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
3. Application : on pose $u_n = \frac{n!}{n^n}$ pour $n \geq 1$. Montrez que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$
4. Montrez que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ pour $n \geq 1$, puis déterminez la nature de $\sum u_n.$

Exercice 18 : Série exponentielle et irrationalité de e

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$

1. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrez que $0 \leq e - S_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$, puis que $S_n \rightarrow e.$
2. Montrez que pour $k \geq n+1$, $k! \geq (n+1)! (n+1)^{k-n-1}$. Dédisez-en que, pour $n \geq 1$,

$$0 < e - S_n \leq \frac{1}{n \cdot n!}.$$

3. Calculez $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ en écrivant $n^2 = n(n-1) + n$.

4. On suppose que $e = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers et $q \geq 2$. Montrez que $q!(e - S_q)$ est un entier strictement compris entre 0 et 1, et concluez. Traitez aussi le cas $q = 1$.

Exercice 19 : Série alternée logarithmique à paramètre

Soit $\alpha > 0$. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

1. Justifiez que u_n est bien défini pour tout $n \geq 2$.

2. On pose $w_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Montrez que $w_n \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$.

3. Déterminez, selon α , la nature de $\sum w_n$, puis celle de $\sum u_n$.

4. Pour quelles valeurs de α la série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?

Exercice 20 : Formule de Stirling faible : lien suite-série

Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}}$ et $b_n = \ln a_n$.

1. Montrez que $b_{n+1} - b_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

2. À l'aide d'un développement limité, montrez que $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

3. Déduisez-en que la suite (b_n) converge, puis qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \sim C n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

4. Montrez que $b_{n+1} - b_n \leq 0$ pour n assez grand. Que peut-on en déduire sur le sens de variation de (a_n) à partir d'un certain rang ?

Exercice 21 : Problème : série harmonique alternée

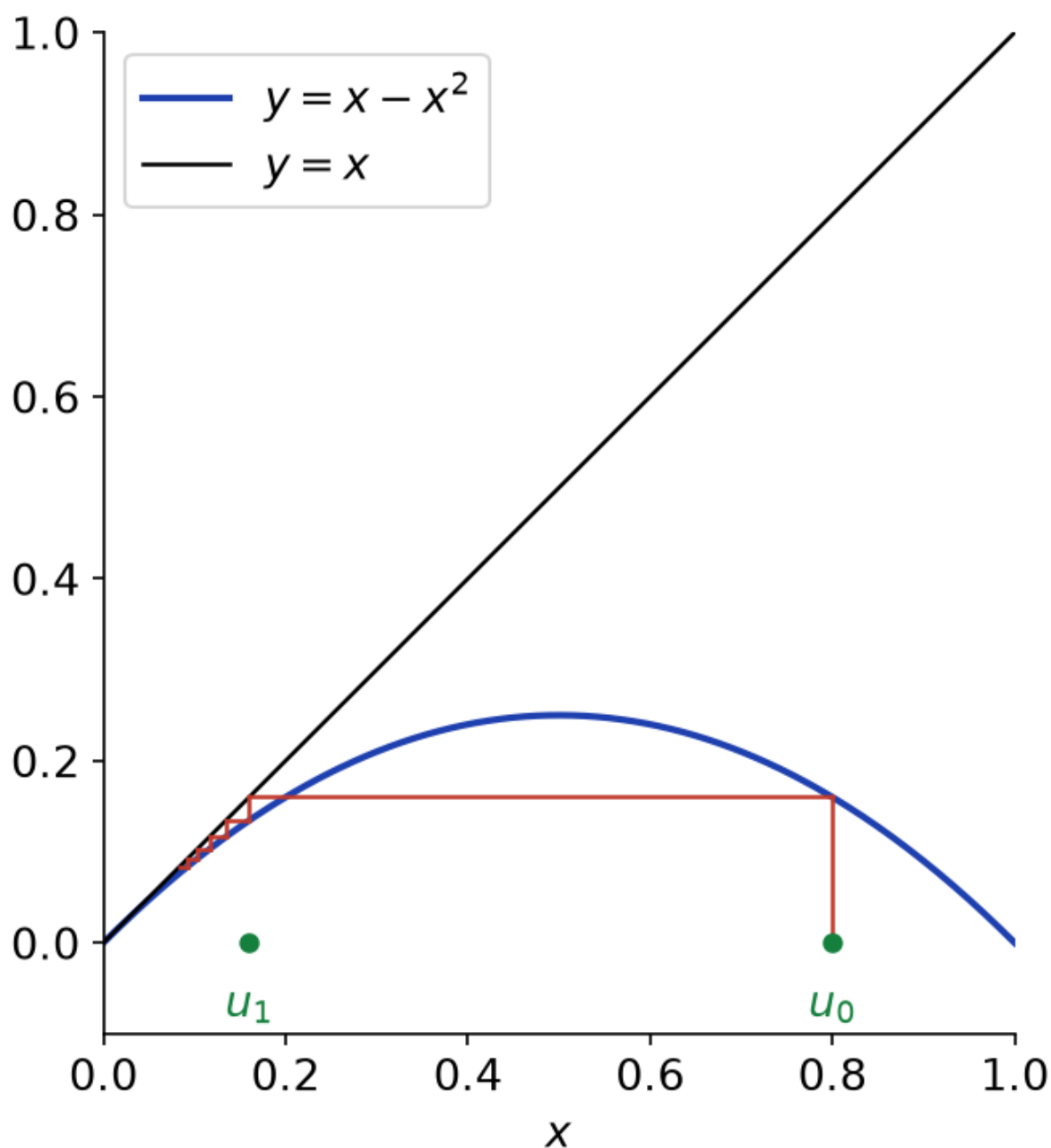
On admet le résultat de l'exercice 9 : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. On note

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

1. Montrez que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge.
2. Montrez que $A_{2n} = H_{2n} - H_n$ pour tout $n \geq 1$.
3. Déduisez-en que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$.
4. Vérifiez que $\frac{1}{n(2n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}$, puis exprimez $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(2n+1)}$ à l'aide de A_{2N+1} .
5. Déduisez-en la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.
6. Montrez de même que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ tend vers $\ln 2$ et interprétez ce résultat à l'aide de A_{2n} .

Exercice 22 : Problème : une suite récurrente et deux séries

Soit $u_0 \in]0, 1[$. On définit la suite (u_n) par $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. La figure ci-dessous représente la courbe de $f : x \rightarrow x - x^2$, la première bissectrice et les premiers termes pour $u_0 = 0,8$.



1. Montrez que pour tout n , $u_n \in]0, 1[$, puis que (u_n) est décroissante et converge vers 0 .
2. Montrez que la série $\sum u_n^2$ converge et calculez sa somme.
3. Montrez que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1 - u_n}$ pour tout n .
4. Déduisez-en que $n + \frac{1}{u_0} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{n}{1 - u_0} + \frac{1}{u_0}$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
5. En écrivant $\frac{1}{1 - u_n} = 1 + \frac{u_n}{1 - u_n}$, montrez que $\frac{1}{u_n} = n + O(\ln n)$, puis que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [séries numériques, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Relations de comparaison : domination, équivalents](#), [Intégration sur un segment](#)
- Chapitre précédent : [Intégration sur un segment](#)
- Chapitre suivant : [Familles sommables](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)