

Séries numériques et vectorielles

Exercice 1 : Divergence grossière et premières sommes

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminez la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

2. Déterminez la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. Justifiez la convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$ et calculez sa somme.

4. Montrez que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$ pour tout $n \geq 1$. Qu'en déduisez-vous pour la série $\sum 1/\sqrt{n}$, dont le terme général tend pourtant vers 0 ?

Exercice 2 : Séries télescopiques

1. Montrez que la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et calculez sa somme.

2. Décomposez $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ sous la forme $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$, puis calculez $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

3. Montrez que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\arctan(n+1) - \arctan(n) = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right).$$

4. En déduisez la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$.

Exercice 3 : Nature par équivalents

Déterminez la nature des séries de terme général suivant, définies pour $n \geq 1$.

1. $a_n = \frac{n+1}{n^3 + 2}$

2. $b_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

3. $c_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

4. $d_n = e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}$

5. $e_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

6. $f_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}$

Exercice 4 : Règle de d'Alembert

1. Étudiez la nature de $\sum \frac{n^3}{2^n}$.

2. Étudiez la nature de $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

3. Étudiez la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n n!}{n^n}$.

4. On pose $u_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ pour $n \geq 1$. Vérifiez que la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure. Montrez ensuite que la suite (u_n) est croissante, puis concluez sur la nature de $\sum u_n$.

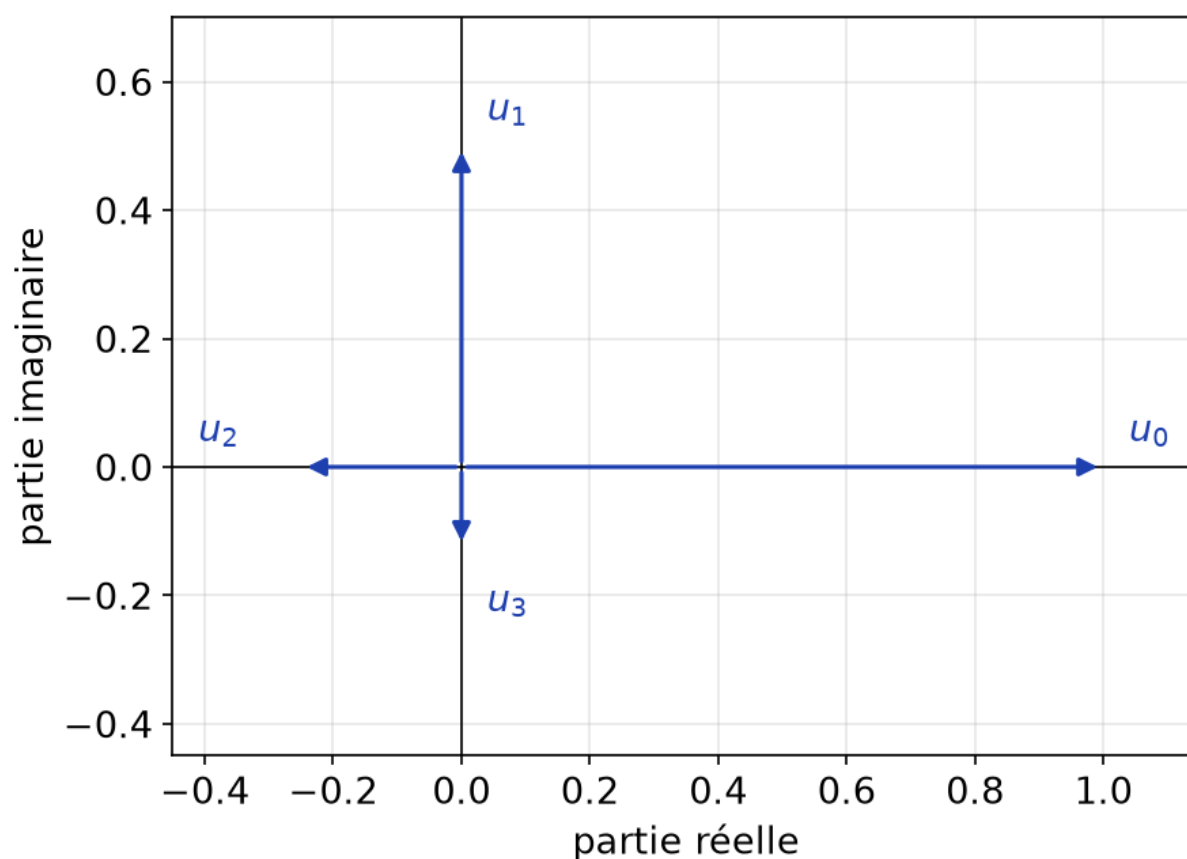
Exercice 5 : Encadrement de la série harmonique

On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour $n \geq 1$.

1. Par comparaison série-intégrale, montrez que $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$. Déduisez-en un équivalent de H_n .
2. On pose $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$. Montrez que ces suites sont adjacentes. On note γ leur limite commune.
3. Donnez un encadrement de γ à l'aide de u_1 et v_1 .

Exercice 6 : Série de vecteurs du plan

On identifie $\mathbb{C}$ au plan $\mathbb{R}^2$ et on pose $u_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n$ pour $n \geq 0$. La figure ci-dessous représente les premiers termes u_0 , u_1 , u_2 et u_3 comme des vecteurs issus de l'origine.



1. Montrez que la série $\sum u_n$ converge absolument.
2. Calculez sa somme sous forme algébrique.
3. Déduisez-en les valeurs de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi/2)}{2^n}$ et de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{2^n}$, puis vérifiez le premier résultat directement.
4. Dans $\mathbb{R}^2$, étudiez les séries de vecteurs $\sum_{n \geq 0} w_n$ et $\sum_{n \geq 1} z_n$, où $w_n = \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$ et $z_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right)$. Calculez la somme quand elle existe.

Exercice 7 : Séries à paramètre et comparaison

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminez, selon α , la nature de $\sum_{n \geq 1} n^\alpha \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$.

- Déterminez la nature de $\sum_{n \geq 1} (n^{1/n} - 1)$.
- Déterminez la nature de $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{1 + 1/n}$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrez que $\sum_{n \geq 2} \frac{(\ln n)^a}{n^2}$ converge.
- Soit $x > 0$. Déterminez, selon x , la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$.

Exercice 8 : Lien suite-série pour une somme de racines

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

- Montrez que $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2}$, puis donnez un équivalent de $u_{n+1} - u_n$.
- Déduisez-en que (u_n) converge vers un réel C . Que peut-on en conclure pour $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$?
- Montrez que $u_n - C = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1})$, puis, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, que $u_n - C \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Exercice 9 : Sommes partielles par comparaison série-intégrale

- Montrez que, pour tout $n \geq 1$, $\frac{2}{3}n^{3/2} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \frac{2}{3}((n+1)^{3/2} - 1)$. Déduisez-en un équivalent de $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

2. Montrez que, pour tout $n \geq 1$, $n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - n$. Déduisez-en que $\ln(n!) \sim n \ln n$.
3. Plus généralement, soit $\alpha > 0$. Montrez que $\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Exercice 10 : Séries de Bertrand

1. Montrez que $f : t \rightarrow \frac{1}{t \ln t}$ est décroissante et positive sur $[2, +\infty[$. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrez que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge et que $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$.
2. Montrez que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^2}$ converge, et que son reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k (\ln k)^2}$ vérifie $\frac{1}{\ln(n+1)} \leq R_n \leq \frac{1}{\ln n}$ pour $n \geq 2$.
3. En utilisant le résultat $\ln(n!) \sim n \ln n$, déterminez la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n!)}$.

Exercice 11 : Reste de la série de Riemann

Soit $\alpha > 1$. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Montrez que $\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ pour $n \geq 1$, et déduisez-en un équivalent de R_n .
2. Pour $\alpha = 3$, déterminez un entier n qui garantit $R_n \leq 10^{-4}$.
3. Pour $\alpha = 2$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Montrez que $\left| \frac{\pi^2}{6} - S_n - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{n(n+1)}$. On admet

que la somme de la série vaut $\pi^2/6$.

Exercice 12 : Majoration d'un reste par d'Alembert

On considère la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ avec $u_n = \frac{n}{3^n}$, et on note S sa somme et R_n son reste d'indice n .

1. Montrez que la série converge.
2. En comparant S et $S/3$, calculez S .
3. Montrez que $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{2}$ pour tout $k \geq 2$. Déduisez-en que $R_n \leq \frac{2(n+1)}{3^{n+1}}$ pour tout $n \geq 1$.
4. Déterminez un rang n à partir duquel la somme partielle S_n approche S à 10^{-3} près.

Exercice 13 : Sommation des équivalents dans le cas divergent

Donnez un équivalent simple de chacune des sommes suivantes quand $n \rightarrow +\infty$.

1. $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$

2. $B_n = \sum_{k=1}^n k^2 \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

3. $C_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$, en admettant que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$.

4. $D_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k}$. On pourra introduire $a_k = \frac{k}{\ln k}$ et appliquer le théorème des accroissements finis à $t \rightarrow t/\ln t$.

Exercice 14 : Sommation des équivalents dans le cas convergent

1. Justifiez la convergence de $\sum \frac{1}{k^2 + k + 1}$ et donnez un équivalent de son reste
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1}.$$
2. Vérifiez que, pour $k \geq 2$, $\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)} \right)$. Déduisez-en un équivalent de
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{k^3}\right).$$
3. Donnez un équivalent de
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(e^{1/k^2} - 1 \right).$$
4. Montrez que
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
 On pourra étudier $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k-1)}.$

Exercice 15 : Théorème de Cesàro et moyennes géométriques

1. Calculez
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \sin\left(\frac{1}{k}\right).$$
2. Calculez
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$
3. En appliquant le théorème de Cesàro à $\ln(a_{k+1}/a_k)$ avec $a_n = n^n/n!$, montrez que
$$\frac{n}{(n!)^{1/n}} \rightarrow e.$$
4. Donnez une suite divergente dont les moyennes de Cesàro convergent.

Exercice 16 : Série géométrique de matrices

On pose $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $A^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 0$.
2. Montrez que la série $\sum A^n$ converge et calculez sa somme S .
3. Vérifiez que $S = (I_2 - A)^{-1}$.
4. On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la norme $|M| = \max_i \sum_j |m_{ij}|$, dont on admet qu'elle est sous-multiplicative. Calculez $|A|$ et $|B|$. Montrez que $\sum B^n$ converge absolument et calculez sa somme.

Exercice 17 : Exponentielle d'une matrice

Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on rappelle que $\exp(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!}$.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Calculez A^n , puis $\exp(A)$.
2. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $t \in \mathbb{R}$. Calculez J^2 , puis montrez que $\exp(tJ) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.
3. Soit $\|\cdot\|$ une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrez que $|\exp(M)| \leq e^{\|M\|}$.

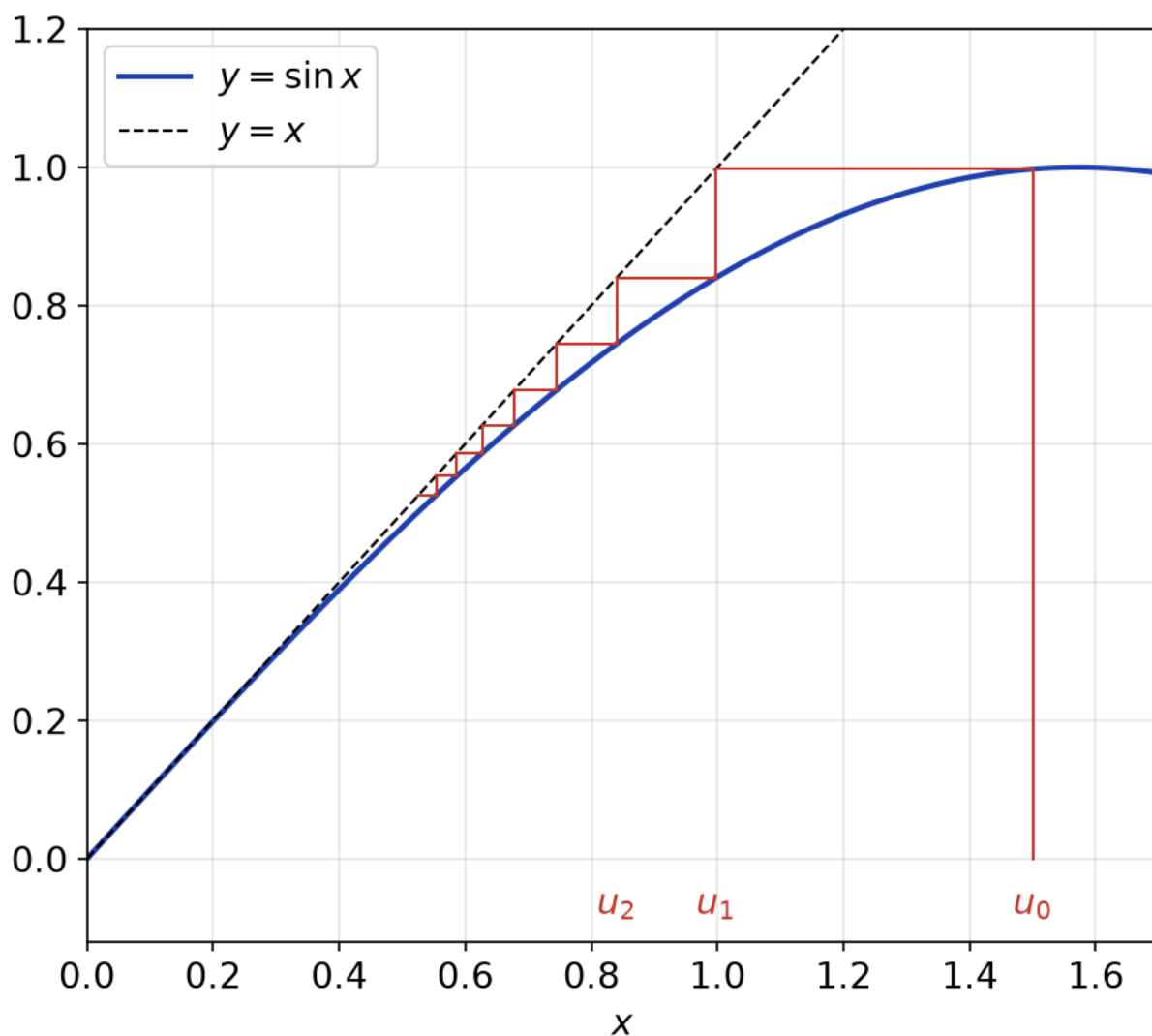
Exercice 18 : Développement asymptotique de la série harmonique

On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et on admet que $H_n - \ln n \rightarrow \gamma$. On pose $w_n = H_n - \ln n - \gamma$.

1. Montrez que $w_n - w_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$.
2. Justifiez que $w_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (w_k - w_{k+1})$, puis montrez que $w_n \sim \frac{1}{2n}$.
3. Dédisez-en que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
4. Donnez un équivalent de $\sum_{k=1}^n w_k$.

Exercice 19 : Suite récurrente et théorème de Cesàro

Soit $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$. La figure ci-dessous montre la construction des premiers termes pour $u_0 = 1,5$.



1. Montrez que (u_n) est à valeurs dans $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$, décroissante, et qu'elle converge vers 0.
2. Montrez que $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$.
3. Déduisez-en un équivalent de u_n .
4. Déterminez la nature des séries $\sum u_n$, $\sum u_n^2$ et $\sum u_n^3$.

Exercice 20 : Récurrence et sommation des équivalents

Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour $n \geq 0$.

1. Montrez que (u_n) est bien définie, strictement positive, croissante, et qu'elle tend vers $+\infty$.
2. Calculez $u_{n+1}^2 - u_n^2$ et déduisez-en que $u_n \sim \sqrt{2n}$.
3. Montrez que $u_n^2 = 2n + \frac{1}{2} \ln n + o(\ln n)$.
4. Déduisez-en que $u_n = \sqrt{2n} + \frac{\ln n}{4\sqrt{2n}} + o\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 21 : Problème sur la formule de Stirling

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \ln\left(\frac{n! e^n}{n^{n+1/2}}\right)$.

1. Montrez que $u_{n+1} - u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
2. Montrez que $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
3. Déduisez-en que (u_n) converge vers un réel ℓ , puis qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \sim C n^{n+1/2} e^{-n}$.
4. Montrez que $u_n - \ell \sim \frac{1}{12n}$.
5. On admet que $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{4^k}$. Déduisez-en que $C = \sqrt{2\pi}$.
6. Déterminez enfin la nature des séries $\sum \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}}$ et $\sum \frac{1}{4^n}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [séries numériques et vectorielles, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Normes, espaces vectoriels normés et suites](#)
- Chapitre précédent : [Compacité, connexité par arcs et dimension finie](#)
- Chapitre suivant : [Suites de fonctions : convergence simple et uniforme](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)