

Séries numériques et vectorielles

I. Séries numériques et vectorielles : définitions

En maths sup, vous avez étudié les séries de nombres réels ou complexes. En maths spé, le cadre s'élargit : les termes peuvent être des vecteurs de $\mathbb{R}^p$, des matrices ou, plus généralement, des éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie. Dans tout le chapitre, E désigne un tel espace, muni d'une norme $\|\cdot\|$. Comme toutes les normes y sont équivalentes, la convergence ne dépend pas de la norme choisie.

Définition :

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de E . On appelle **somme partielle** d'indice n le vecteur $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. La **série** de terme général u_n , notée $\sum u_n$, est la suite (S_n) . Elle **converge** si (S_n) admet une limite S dans E ; on note alors $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ sa **somme**. Dans ce cas, le **reste** d'indice n est $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, et $R_n \rightarrow 0$. Une série qui ne converge pas est dite divergente.

La somme d'une série n'est donc rien d'autre qu'une limite de suite. Par conséquent, l'ensemble des séries convergentes est un sous-espace vectoriel, et l'application qui associe sa somme à une série convergente est linéaire.

Proposition :

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $u_n = \sum_{i=1}^p u_{n,i} e_i$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si, pour tout i , la série numérique $\sum_n u_{n,i}$ converge. Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,i} \right) e_i.$$

En effet, une suite de E converge si et seulement si ses coordonnées convergent. Ainsi, une série de matrices converge exactement quand chacune de ses p^2 séries de coefficients converge. De même, une série complexe converge si et seulement si les séries des parties réelles et imaginaires convergent.

Proposition :

Si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \rightarrow 0$. Par contraposée, si (u_n) ne tend pas vers 0, la série **diverge grossièrement**.

Démonstration :

Pour $n \geq 1$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$. Or S_n et S_{n-1} tendent toutes deux vers S . Donc $u_n \rightarrow S - S = 0$.

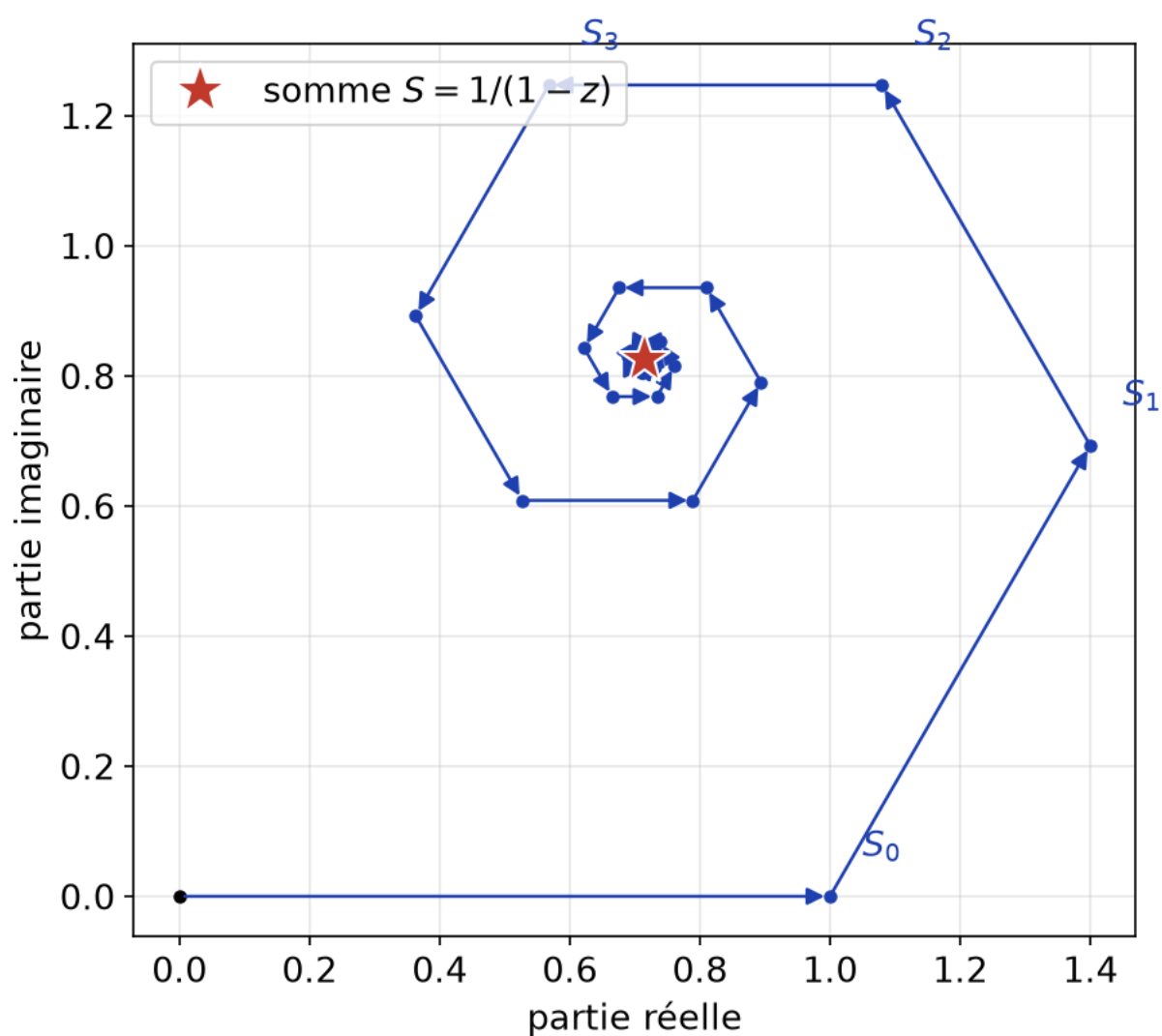
Attention :

La réciproque est fausse. Par exemple, $1/n \rightarrow 0$ et pourtant la série harmonique $\sum 1/n$ diverge. La divergence grossière est un test d'élimination, jamais une preuve de convergence.

Exemple :

Soit $z \in \mathbb{C}$ et la série géométrique $\sum z^n$. Si $|z| \geq 1$, alors $|z^n| \geq 1$ et la série diverge grossièrement. Si $|z| < 1$, on a $S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$, qui tend vers $\frac{1}{1-z}$. Ainsi, dans le plan identifié à $\mathbb{C}$, les sommes partielles s'enroulent vers la somme.

La figure ci-dessous représente les sommes partielles de $\sum z^n$ pour $z = 0,8 e^{i\pi/3}$. Chaque flèche est un terme z^n , et la ligne brisée converge vers le point $1/(1-z)$.



II. Lien suite-série et séries télescopiques

Toute suite peut s'écrire comme une série. En effet, pour une suite (a_n) de E , on a

$$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k). \text{ Cette remarque simple fournit une méthode très utile.}$$

Proposition :

La suite (a_n) converge si et seulement si la série **télescopique** $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge.

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim a_n - a_0$.

Exemple :

Pour $k \geq 1$, on a $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Par télescopage, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$. La série converge donc et sa somme vaut 1. De même, $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1)$, donc la série $\sum \ln(1 + 1/n)$ diverge.

Méthode :

Pour montrer qu'une suite (a_n) converge sans connaître sa limite, étudiez la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$. D'abord, calculez un développement asymptotique de $a_{n+1} - a_n$. Ensuite, montrez que cette différence est dominée par le terme d'une série positive convergente, par exemple $1/n^2$. Enfin, concluez que la série des différences converge, donc que (a_n) converge.

Par exemple, posons $a_n = H_n - \ln n$, où $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$. Alors

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Ce terme est un $O(1/n^2)$, donc la suite (a_n) converge. Sa limite est la **constante d'Euler** $\gamma \approx 0,577$.

III. Séries à termes positifs et absolue convergence

1. Comparaison des séries à termes positifs

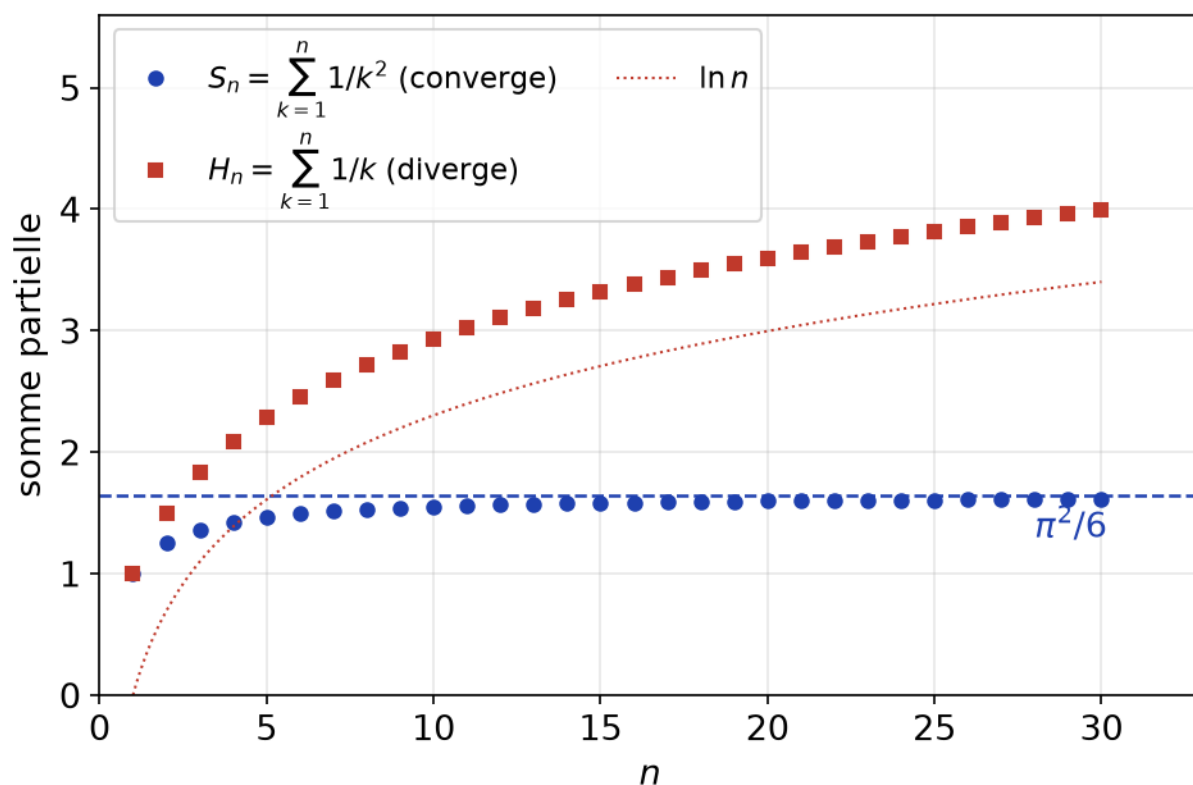
Lorsque $u_n \geq 0$ pour tout n , la suite (S_n) est croissante. Elle converge donc si et seulement si elle est majorée. Tous les critères de comparaison découlent de ce principe.

Théorème :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives.

- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, ou si $u_n = O(v_n)$, alors la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$.
- Si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
- Les séries de Riemann $\sum 1/n^\alpha$ convergent si et seulement si $\alpha > 1$.

La figure suivante compare les sommes partielles de $\sum 1/k^2$, qui se stabilisent sous $\pi^2/6$, à celles de la série harmonique. Ces dernières croissent sans borne, au même rythme que $\ln n$.



2. Absolue convergence dans un espace de dimension finie

Définition :

La série $\sum u_n$ d'éléments de E est dite **absolument convergente** si la série réelle positive $\sum |u_n|$ converge.

Cette notion ne dépend pas de la norme. En effet, si $N_1 \leq C N_2$, la convergence de $\sum N_2(u_n)$ entraîne celle de $\sum N_1(u_n)$ par comparaison.

Théorème :

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute série absolument convergente est

convergente. De plus, $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Démonstration :

D'abord, traitons le cas réel. Posons $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. Ces suites sont positives, majorées par $|u_n|$, et $u_n = u_n^+ - u_n^-$. Par comparaison, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent, donc $\sum u_n$ aussi. Le cas complexe s'en déduit avec les parties réelle et imaginaire, majorées par le module. Ensuite, dans E , on fixe une base et on utilise la norme infinie associée. Chaque coordonnée vérifie $|u_{n,i}| \leq |u_n|_\infty$, donc chaque série de coordonnées converge absolument. La proposition du I donne alors la convergence. Enfin, l'inégalité triangulaire donne $|S_n| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|$, et on passe à la limite grâce à la continuité de la norme.

Corollaire :

Si (v_n) est une suite positive telle que $\sum v_n$ converge, et si $|u_n| = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument.

Exemple :

Munissons $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative. Pour toute matrice A , on a $\|A^n / n!\| \leq |A|^n / n!$, terme d'une série convergente. Ainsi, la série $\sum A^n / n!$ converge absolument : sa somme est l'**exponentielle** $\exp(A)$. De même, si $|A| < 1$, la série $\sum A^n$ converge absolument. Comme $(I_p - A) \sum_{k=0}^n A^k = I_p - A^{n+1}$ et que $A^{n+1} \rightarrow 0$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_p - A)^{-1}$.

Méthode :

Pour déterminer la nature d'une série $\sum u_n$ à termes quelconques, commencez par tester la divergence grossière. Ensuite, cherchez un équivalent simple de $|u_n|$ ou de $|u_n|$: une puissance de n , une suite géométrique, ou un terme de Bertrand. Concluez enfin par comparaison à une série de référence. Si la série converge absolument, elle converge.

Remarque :

Une série peut converger sans converger absolument, comme $\sum (-1)^n/n$. L'étude de ces séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme de ce chapitre.

IV. Comparaison série-intégrale

Lorsque le terme général s'écrit $u_n = f(n)$ avec f monotone, on compare la somme à une intégrale. C'est l'outil le plus efficace pour encadrer une somme partielle ou un reste.

Théorème :

Soit f continue par morceaux, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$. Pour tout entier $k \geq n_0 + 1$, on a

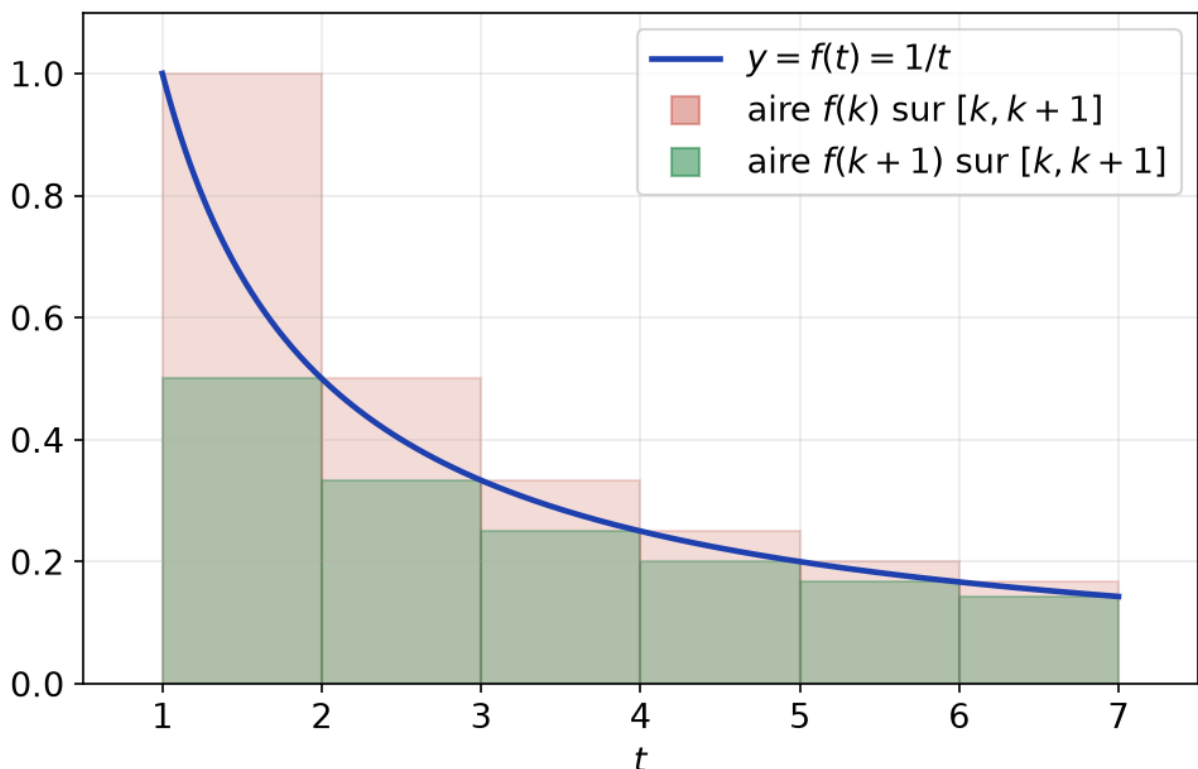
$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

Par conséquent, la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_{n_0}^n f(t) dt \right)$ est majorée, c'est-à-dire si et seulement si f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$.

Démonstration :

Pour $t \in [k, k+1]$, la décroissance donne $f(t) \leq f(k)$. On intègre sur un segment de longueur 1 : $\int_k^{k+1} f \leq f(k)$. De même, pour $t \in [k-1, k]$, on a $f(k) \leq f(t)$, d'où l'autre inégalité. Ensuite, en sommant, on obtient $\int_{n_0+1}^{n+1} f \leq \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f$. Les sommes partielles sont donc majorées si et seulement si les intégrales le sont.

Comme le montre la figure ci-dessous pour $f(t) = 1/t$, le rectangle de hauteur $f(k)$ posé sur $[k, k+1]$ dépasse la courbe. En revanche, celui de hauteur $f(k+1)$ reste dessous. L'aire sous la courbe est donc prise en sandwich.



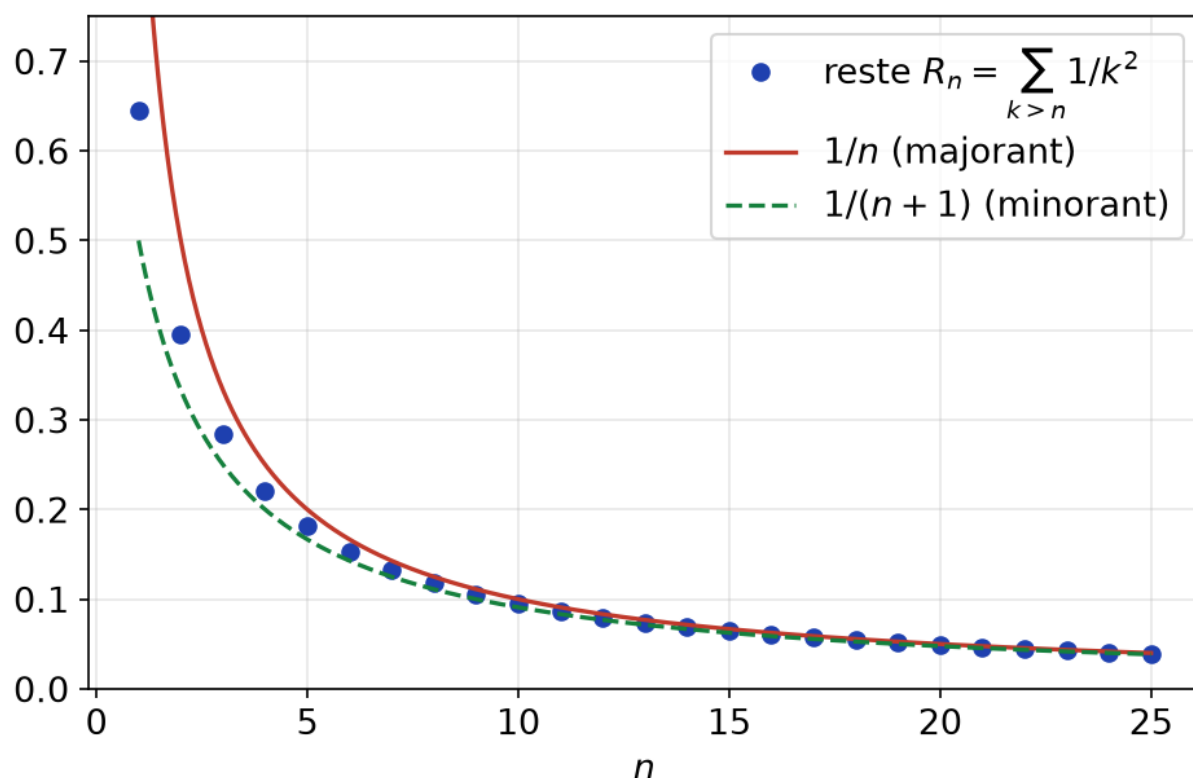
Exemple :

Avec $f(t) = 1/t^\alpha$, $\alpha > 0$, la fonction est décroissante. Pour $\alpha > 1$, $\int_1^n t^{-\alpha} dt \leq \frac{1}{\alpha-1}$, donc la série converge. Pour $0 < \alpha \leq 1$, l'intégrale $\int_1^n t^{-\alpha} dt$ tend vers $+\infty$: elle vaut $\ln n$ si $\alpha = 1$, et $\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$ sinon. Le cas $\alpha \leq 0$ relève de la divergence grossière. On retrouve ainsi le critère de Riemann.

Méthode :

Pour encadrer une **somme partielle** d'une série divergente, somme l'encadrement de $f(k)$ de $k = n_0 + 1$ à n . Pour encadrer un **reste** d'une série convergente, somme-le de $k = n+1$ à $+\infty$: on obtient $\int_{n+1}^{+\infty} f \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f$. Si les deux bornes sont équivalentes, vous obtenez un équivalent. Pour une fonction croissante, les inégalités s'inversent.

Appliquons cette méthode à la série harmonique. L'encadrement donne $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$, donc $H_n \sim \ln n$. De même, pour $\alpha = 2$, le reste $R_n = \sum_{k>n} 1/k^2$ vérifie $\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$. Par conséquent, $R_n \sim 1/n$, comme on le voit sur la figure suivante.



V. Règle de d'Alembert

Lorsque le terme général contient des factorielles ou des puissances n -ièmes, on compare u_{n+1} à u_n . En effet, ce quotient se simplifie alors très bien.

Théorème :

Soit (u_n) une suite d'éléments non nuls de $\mathbb{E}$ telle que $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \rightarrow \ell \in [0, +\infty]$.

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument.
- Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration :

Supposons $\ell < 1$ et fixons q tel que $\ell < q < 1$. À partir d'un rang N , on a $|u_{n+1}| \leq q |u_n|$. Par récurrence, $|u_n| \leq |u_N| q^{n-N}$ pour $n \geq N$. La série géométrique $\sum q^n$ converge, donc $\sum |u_n|$ aussi. Supposons ensuite $\ell > 1$. À partir d'un certain rang, $|u_{n+1}| \geq |u_n|$. La suite $(|u_n|)$ est alors croissante et strictement positive, donc elle ne tend pas vers 0. Enfin, pour $\ell = 1$, les séries $\sum 1/n$ et $\sum 1/n^2$ donnent toutes deux $\ell = 1$, l'une divergente et l'autre convergente.

Exemple :

Soit $u_n = n!/n^n$. On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$. Ce quotient tend vers $e^{-1} < 1$, donc la série converge. De même, pour tout $x \in \mathbb{C}$ non nul, $|x^{n+1}/(n+1)!| / |x^n/n!| = |x|/(n+1) \rightarrow 0$.

Remarque :

La règle de d'Alembert sert aussi à majorer un reste. Si $|u_{k+1}| \leq q |u_k|$ pour tout $k \geq n+1$, avec $q < 1$, alors $|R_n| \leq \frac{|u_{n+1}|}{1-q}$.

VI. Sommation des relations de comparaison

Les critères de comparaison donnent la nature d'une série. Cependant, en maths spé, on attend davantage : un équivalent du reste quand la série converge, ou de la somme partielle quand elle diverge. C'est l'objet des deux théorèmes suivants.

1. Cas convergent : les restes

Théorème :

Soit (v_n) une suite réelle positive telle que $\sum v_n$ converge, et (u_n) une suite réelle ou complexe. On note $R_n(u) = \sum_{k>n} u_k$ et $R_n(v) = \sum_{k>n} v_k$.

- Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et $R_n(u) = O(R_n(v))$.
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et $R_n(u) = o(R_n(v))$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n(u) \sim R_n(v)$.

Démonstration :

Traisons le cas o . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $|u_k| \leq \varepsilon v_k$ pour $k \geq N$. La convergence absolue découle alors du critère de comparaison. Pour $n \geq N$, on somme de $k = n+1$ à $+\infty$: $|R_n(u)| \leq \varepsilon R_n(v)$. C'est exactement $R_n(u) = o(R_n(v))$. Le cas O se traite de la même manière avec une constante M . Enfin, si $u_n \sim v_n$, alors $u_n - v_n = o(v_n)$. Donc $R_n(u) - R_n(v) = o(R_n(v))$, ce qui signifie $R_n(u) \sim R_n(v)$.

2. Cas divergent : les sommes partielles

Théorème :

Soit (v_n) une suite réelle positive telle que $\sum v_n$ diverge, et (u_n) une suite réelle ou complexe. On note $S_n(u) = \sum_{k=0}^n u_k$ et $S_n(v) = \sum_{k=0}^n v_k$.

- Si $u_n = O(v_n)$, alors $S_n(u) = O(S_n(v))$.
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $S_n(u) = o(S_n(v))$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $S_n(u) \sim S_n(v)$, et $\sum u_n$ diverge.

Démonstration :

Traitons encore le cas o . Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $|u_k| \leq \varepsilon v_k$ pour $k > N$. Pour $n > N$, on coupe la somme :

$$|S_n(u)| \leq |S_N(u)| + \varepsilon \sum_{k=N+1}^n v_k \leq |S_N(u)| + \varepsilon S_n(v).$$

Or $S_n(v) \rightarrow +\infty$, donc $|S_N(u)| \leq \varepsilon S_n(v)$ pour n assez grand. Ainsi, $|S_n(u)| \leq 2\varepsilon S_n(v)$ à partir d'un certain rang. Le cas $\sim$ s'en déduit comme précédemment.

Attention :

L'hypothèse « v_n de signe constant » est indispensable. Autrement dit, on ne somme jamais des équivalents entre termes de signe variable. De plus, les théorèmes portent sur les restes dans le cas convergent, et sur les sommes partielles dans le cas divergent, jamais l'inverse.

Méthode :

Pour obtenir un équivalent d'un reste ou d'une somme partielle de $\sum u_n$, cherchez une suite positive $v_n \sim u_n$ dont le reste ou la somme partielle se calcule. Les meilleurs candidats sont les termes télescopiques $v_n = a_n - a_{n+1}$ et les termes $f(n)$ traités par comparaison série-intégrale.

Exemple :

Pour $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Par télescopage, $\sum_{k > n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n}$. Le théorème du cas convergent donne donc $\sum_{k > n} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$, sans aucune intégrale. Dans le cas divergent, $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \sim \frac{1}{k}$ et $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1)$. Par conséquent, $H_n \sim \ln(n+1) \sim \ln n$.

VII. Théorème de Cesàro

Le théorème de Cesàro affirme que la moyenne des premiers termes d'une suite convergente converge vers la même limite. C'est en réalité un cas particulier du théorème de sommation du cas divergent.

Théorème :

Soit $(u_n)_n \geq 1$ une suite réelle ou complexe qui converge vers ℓ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \ell.$$

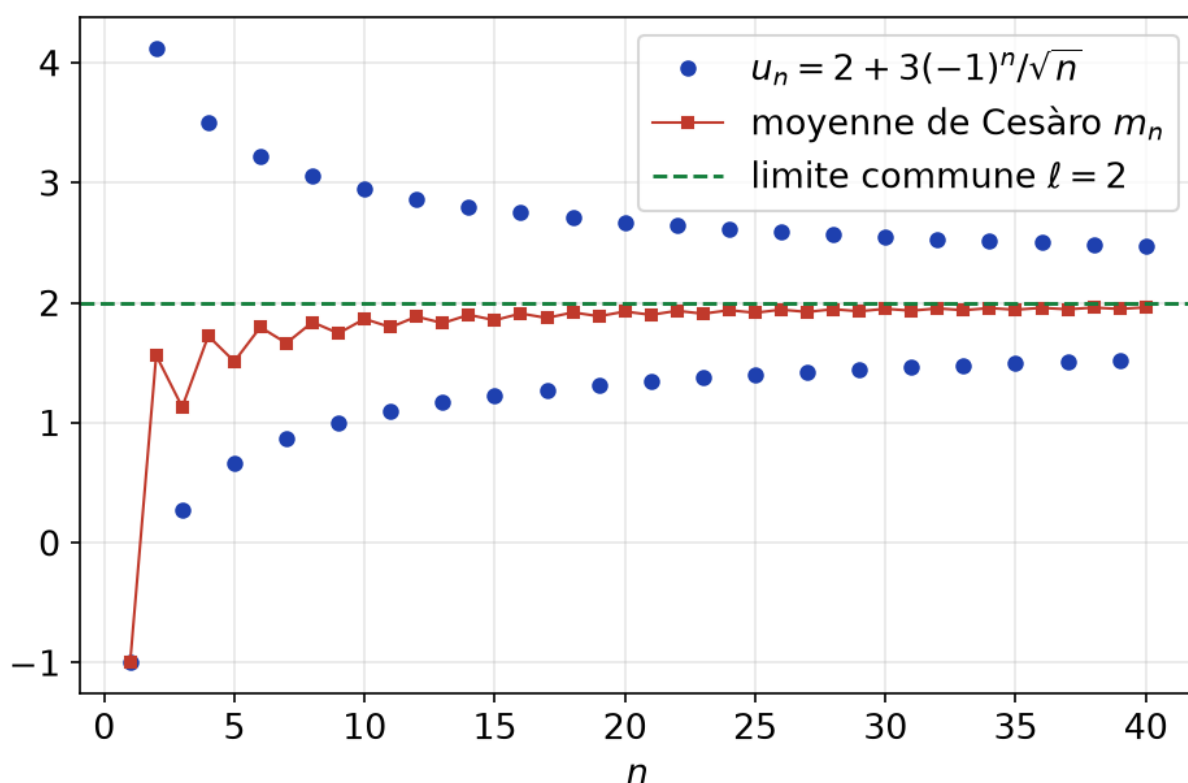
Le résultat reste vrai pour une suite réelle de limite $+\infty$ ou $-\infty$.

Démonstration :

On pose $v_k = 1$, terme positif d'une série divergente, avec $S_n(v) = n$. Comme $u_k - \ell \rightarrow 0$, on a $u_k - \ell = o(v_k)$. Le théorème de sommation donne alors $\sum_{k=1}^n (u_k - \ell) = o(n)$. En divisant par n , on obtient $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k - \ell \rightarrow 0$. Pour

$\ell = +\infty$, on utilise que $u_k \geq A$ à partir d'un certain rang, pour tout réel A .

La figure ci-dessous illustre ce phénomène. La suite $u_n = 2 + 3(-1)^n/\sqrt{n}$ oscille autour de 2, tandis que ses moyennes de Cesàro m_n s'en approchent beaucoup plus régulièrement.



Attention :

La réciproque est fausse. Par exemple, $u_n = (-1)^n$ diverge, alors que ses moyennes tendent vers 0.

Corollaire :

Si $u_{n+1} - u_n \rightarrow \ell$, alors $\frac{u_n}{n} \rightarrow \ell$. Si $a_n > 0$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \lambda > 0$, alors $a_n^{1/n} \rightarrow \lambda$.

Démonstration :

On applique Cesàro à la suite $w_k = u_k - u_{k-1}$: $\frac{u_n - u_0}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k \rightarrow \ell$, et $u_0/n \rightarrow 0$. Pour la seconde assertion, on applique la première à $u_n = \ln a_n$, puis on compose par l'exponentielle.

Méthode :

Pour trouver un équivalent d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ qui tend vers 0, cherchez un exposant β tel que $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ ait une limite finie non nulle c . Pour cela, faites un développement limité de f en 0. Le corollaire donne ensuite $u_n^\beta \sim c n$.

Exemple :

Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. La suite est positive, décroissante, et tend vers l'unique point fixe 0. Or $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + O(u^3)$, donc $\frac{1}{\ln(1+u)} = \frac{1}{u} + \frac{1}{2} + O(u)$. Ainsi, $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{2}$. Par conséquent, $\frac{1}{u_n} \sim \frac{n}{2}$, c'est-à-dire $u_n \sim \frac{2}{n}$.

Ce qu'il faut retenir

- Une série de $\mathbb{E}$ de dimension finie converge si et seulement si ses séries de coordonnées convergent ; sa somme ne dépend pas de la base.
- Si u_n ne tend pas vers 0, la série diverge grossièrement ; la réciproque est fausse.
- Une suite converge si et seulement si la série télescopique de ses différences converge.
- En dimension finie, l'absolue convergence entraîne la convergence : c'est ainsi qu'on traite $\exp(A)$ et $\sum A^n$.

- Pour les séries positives, on compare par $\leq$, O ou $\sim$ aux séries de Riemann et géométriques.
- La comparaison série-intégrale encadre une somme partielle ou un reste quand $u_n = f(n)$ avec f monotone.
- La règle de d'Alembert conclut si la limite du quotient est différente de 1.
- On somme les relations O , o , $\sim$ entre termes positifs : restes si la série converge, sommes partielles si elle diverge.
- Le théorème de Cesàro et son corollaire donnent des équivalents de suites récurrentes.

Questions fréquentes sur séries numériques et vectorielles

Quand peut-on sommer des équivalents entre termes de deux séries ?

Il faut que la série de référence $\sum v_n$ soit à termes positifs, au moins à partir d'un certain rang. Si elle converge, on compare les restes ; si elle diverge, on compare les sommes partielles. Avec des termes de signe variable, le résultat peut être faux.

Pourquoi une série absolument convergente de vecteurs converge-t-elle ?

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, et une série converge si et seulement si ses séries de coordonnées convergent. Chaque coordonnée est majorée en valeur absolue par la norme infinie du vecteur. Les séries de coordonnées convergent donc absolument, d'où la convergence.

Que faire quand la règle de d'Alembert donne une limite égale à 1 ?

La règle ne permet alors pas de conclure : les séries $\sum 1/n$ et $\sum 1/n^2$ donnent toutes deux la limite 1. Cherchez plutôt un équivalent du terme général, ou comparez le quotient u_{n+1}/u_n à celui d'une suite de Riemann. Une comparaison série-intégrale peut aussi conclure.

À quoi sert le théorème de Cesàro en maths spé ?

Il sert surtout à obtenir des équivalents de suites récurrentes. Si $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ tend vers une limite c non nulle, alors $u_n^\beta \sim cn$. C'est ainsi qu'on montre, par exemple, que la suite définie par

$u_{n+1} = \sin u_n$ est équivalente à $\sqrt{3/n}$.

Pour aller plus loin en maths spé

- Les énoncés : [exercices de maths spé sur séries numériques et vectorielles](#)
- À maîtriser avant : [Normes, espaces vectoriels normés et suites](#)
- Chapitre précédent : [Compacité, connexité par arcs et dimension finie](#)
- Chapitre suivant : [Suites de fonctions : convergence simple et uniforme](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)