

Séries numériques et vectorielles

Corrigé de l'exercice 1 : Divergence grossière et premières sommes

1. On écrit $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$. Or $\ln(1 + 1/n) \sim 1/n$, donc $n \ln(1 + 1/n) \rightarrow 1$. Par continuité de l'exponentielle, le terme général tend vers $e^{-1} \neq 0$.
La série diverge grossièrement.

2. Par continuité du cosinus en 0 , $\cos(1/n) \rightarrow 1 \neq 0$. **La série diverge grossièrement.**

3. Les séries géométriques $\sum (2/5)^n$ et $\sum (3/5)^n$ convergent, car leurs raisons appartiennent à $[0, 1[$. Par linéarité, la série proposée converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \frac{1}{1 - 2/5} + \frac{1}{1 - 3/5} = \frac{5}{3} + \frac{5}{2}.$$

La somme vaut $\frac{25}{6}$.

4. Pour $1 \leq k \leq n$, on a $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$, donc $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$. En sommant ces n inégalités, on obtient $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Ainsi, les sommes partielles tendent vers $+\infty$. **La série** $\sum 1/\sqrt{n}$ **diverge, bien que** $1/\sqrt{n} \rightarrow 0$. La condition $u_n \rightarrow 0$ est donc nécessaire mais pas suffisante.

Corrigé de l'exercice 2 : Séries télescopiques

1. Pour $n \geq 2$, $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$. Posons $a_n = \ln(n+1) - \ln n$. Alors

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = [\ln(n+1) - \ln n] - [\ln n - \ln(n-1)] = a_n - a_{n-1}.$$

Par télescopage, $\sum_{n=2}^N \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = a_N - a_1 = \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) - \ln 2$. Ce terme tend vers $-\ln 2$. **La série converge et sa somme vaut $-\ln 2$.**

2. On réduit au même dénominateur : $\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2) - n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$.

La décomposition est donc juste. Posons $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Alors

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}(b_1 - b_{N+1}), \text{ qui tend vers } \frac{1}{2} b_1 = \frac{1}{4}. \text{ **La somme vaut } \frac{1}{4}.**$$

3. Posons $a = \arctan(n+1)$ et $b = \arctan n$. Comme $0 \leq b < a < \frac{\pi}{2}$, on a $a - b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, la formule d'addition donne

$$\tan(a - b) = \frac{(n+1) - n}{1 + n(n+1)} = \frac{1}{n^2 + n + 1}.$$

Or $a - b$ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, où $\arctan$ est la réciproque de $\tan$. Par conséquent, $a - b = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$.

4. La série est donc télescopique :

$$\sum_{n=0}^N \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right) = \arctan(N+1) - \arctan 0 = \arctan(N+1). \text{ Quand } N \rightarrow +\infty, \text{ ce terme tend vers } \frac{\pi}{2}. \text{ **La somme vaut } \frac{\pi}{2}.**$$

Point de méthode : une série télescopique se reconnaît quand le terme général s'écrit $a_{n+1} - a_n$. La somme vaut alors $\lim a_n - a_{n_0}$, et le calcul est exact.

Corrigé de l'exercice 3 : Nature par équivalents

Toutes ces séries sont à termes positifs. On peut donc conclure à l'aide d'équivalents et des séries de

Riemann.

1. On a $n+1 \sim n$ et $n^3+2 \sim n^3$, donc $a_n \sim \frac{1}{n^2}$. **La série converge.**
2. Comme $\sin x \sim x$ en 0 , on a $b_n \sim \frac{1}{n}$, et $b_n > 0$. **La série diverge**, comme la série harmonique.
3. Comme $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ en 0 , on a $c_n \sim \frac{1}{2n^2}$. **La série converge.**
4. D'abord, $d_n \geq 0$ car $e^x \geq 1+x$ par convexité. Ensuite, $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, donc $d_n \sim \frac{1}{2n^2}$. **La série converge.**
5. On a $\sqrt{n(n+1)} = n\sqrt{1+1/n} \sim n$, donc $e_n \sim \frac{1}{n}$. **La série diverge.**
6. On compare à $1/n^2$: $n^2 f_n = n^4 e^{-\sqrt{n}} = \exp(4 \ln n - \sqrt{n})$. Or $4 \ln n - \sqrt{n} \rightarrow -\infty$ par croissances comparées. Donc $f_n = o(1/n^2)$. **La série converge.**

Corrigé de l'exercice 4 : Règle de d'Alembert

Tous les termes sont strictement positifs, donc le quotient u_{n+1}/u_n est bien défini.

1. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^3} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \rightarrow \frac{1}{2}$. Comme $\frac{1}{2} < 1$, **la série converge.**

2. On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \rightarrow \frac{1}{4}$. **La série converge.**

3. On calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = 2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Ce quotient tend vers $2/e$. Or $e > 2$, donc $2/e < 1$. **La série converge.**

4. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow 1$. La règle de d'Alembert ne permet donc pas de conclure. En revanche,

$$\frac{(n+1) u_{n+1}}{n u_n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n+2)} = \frac{2n+1}{2n} > 1.$$

Ainsi, la suite $(n u_n)$ est croissante, et $n u_n \geq 1 \cdot u_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Par conséquent, $u_n \geq \frac{1}{2n}$ pour tout $n \geq 1$. Par comparaison avec la série harmonique, **la série** $\sum u_n$ **diverge**.

Point de méthode : quand le quotient tend vers 1, comparez u_{n+1}/u_n à v_{n+1}/v_n pour une suite de référence, ici $v_n = 1/n$.

Corrigé de l'exercice 5 : Encadrement de la série harmonique

1. La fonction $t \rightarrow 1/t$ est positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour $k \geq 1$, on a

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}. \text{ En sommant de } k = 1 \text{ à } n, \text{ on obtient } H_n \geq \ln(n+1). \text{ De même, pour}$$

$$k \geq 2, \text{ on a } \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}. \text{ En sommant de } k = 2 \text{ à } n, \text{ on obtient } H_n - 1 \leq \ln n.$$

Ensuite, pour $n \geq 2$, on divise par $\ln n > 0$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1.$$

Or $\ln(n+1) = \ln n + \ln(1 + 1/n)$, donc le membre de gauche tend vers 1. Par encadrement, $H_n \sim \ln n$.

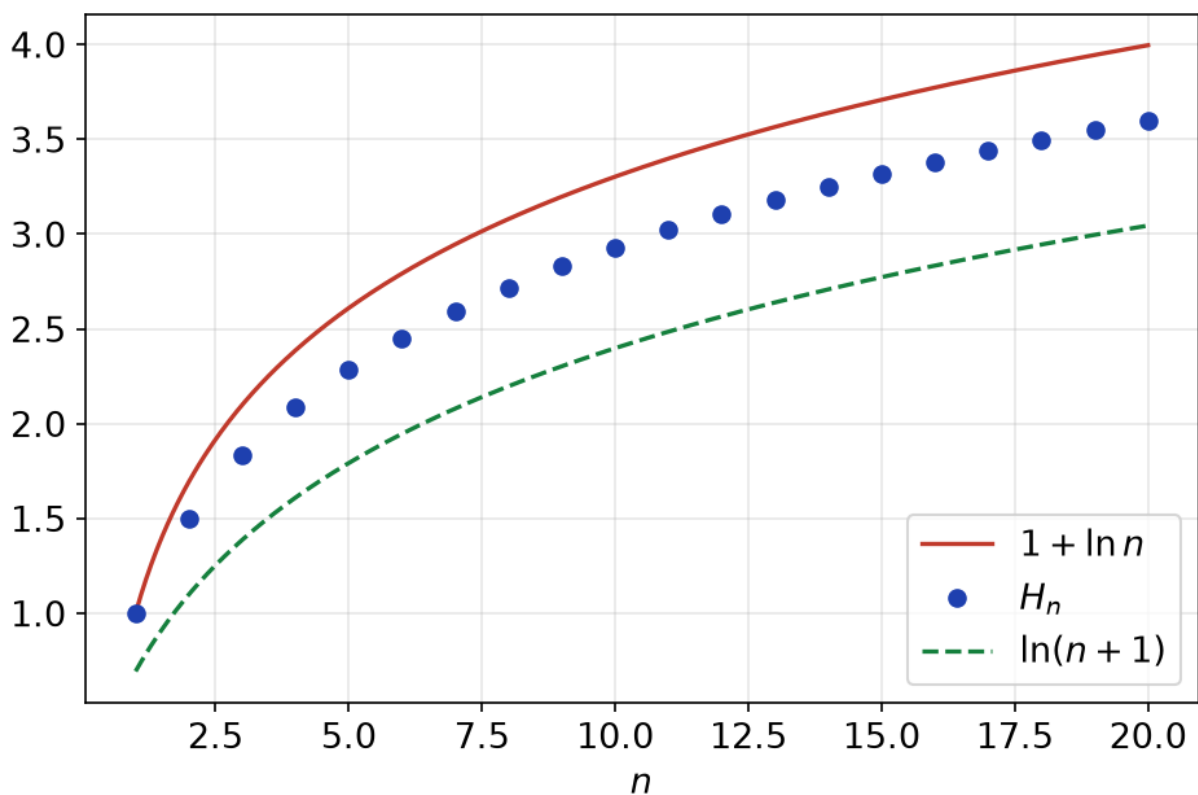
2. D'abord, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$. Sur $[n, n+1]$, on a

$$\frac{1}{t} \geq \frac{1}{n+1}, \text{ donc } u_{n+1} - u_n \leq 0. \text{ Ensuite, } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{dt}{t} \geq 0, \text{ car}$$

$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{n+1}$ sur $[n+1, n+2]$. Enfin, $u_n - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$. Les suites (u_n) et (v_n) **sont adjacentes** : elles convergent vers une même limite γ .

3. Comme (v_n) croît et (u_n) décroît, on a $v_1 \leq \gamma \leq u_1$. Or $v_1 = 1 - \ln 2$ et $u_1 = 1$. Donc $1 - \ln 2 \leq \gamma \leq 1$, soit environ $0,307 \leq \gamma \leq 1$. En réalité, $\gamma \approx 0,577$.

La figure ci-dessous montre les points H_n coincés entre les courbes $\ln(n+1)$ et $1 + \ln n$, dont l'écart tend vers 1.



Corrigé de l'exercice 6 : Série de vecteurs du plan

1. On a $|u_n| = \frac{1}{2^n}$, terme général d'une série géométrique convergente. La série $\sum u_n$ **converge absolument**, donc elle converge, puisque $\mathbb{C}$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

2. Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, la formule de la série géométrique donne

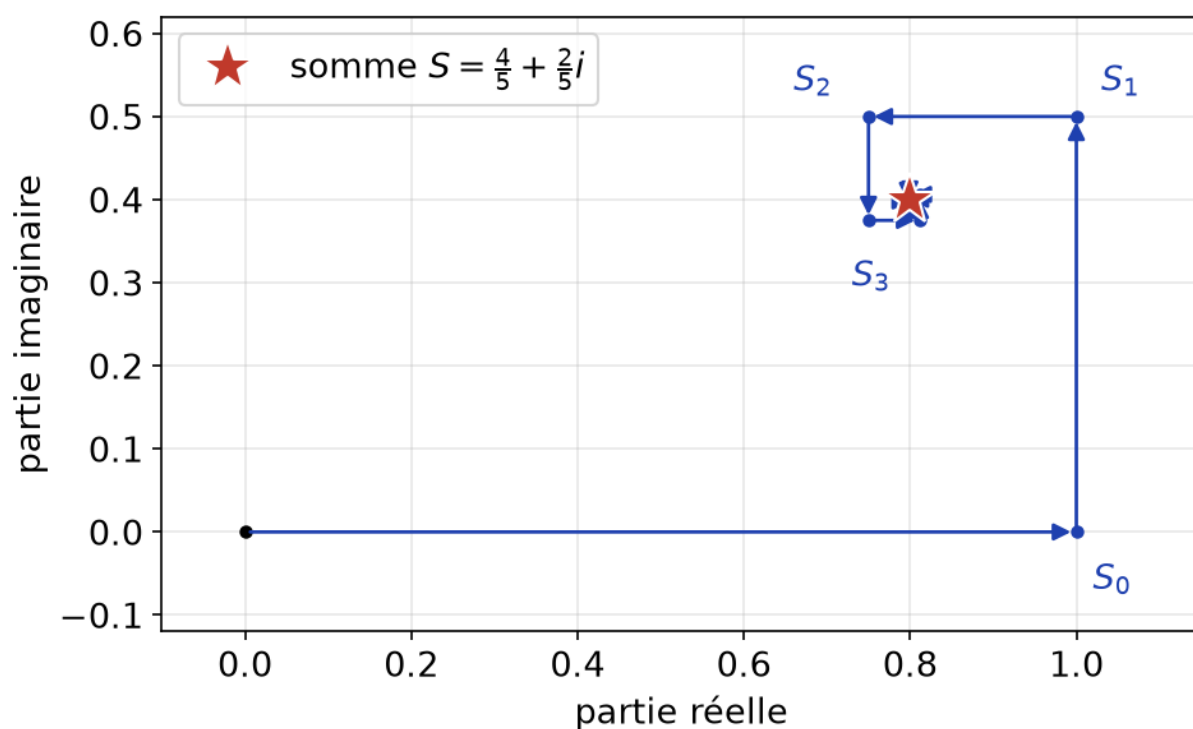
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n = \frac{1}{1-i/2} = \frac{2}{2-i} = \frac{2(2+i)}{5}.$$

La somme vaut $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

3. On a $u_n = \frac{e^{in\pi/2}}{2^n}$, donc $\operatorname{Re}(u_n) = \frac{\cos(n\pi/2)}{2^n}$ et $\operatorname{Im}(u_n) = \frac{\sin(n\pi/2)}{2^n}$. Une série complexe converge si et seulement si les séries de ses parties réelle et imaginaire convergent, et les sommes se correspondent. Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi/2)}{2^n} = \frac{4}{5}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{2^n} = \frac{2}{5}$. Vérifions le premier résultat. Pour n impair, $\cos(n\pi/2) = 0$. Pour $n = 2m$, $\cos(m\pi) = (-1)^m$. Donc la somme vaut $\sum_{m=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^m = \frac{1}{1+1/4} = \frac{4}{5}$. Les deux calculs concordent.

4. Une série de $\mathbb{R}^2$ converge si et seulement si ses deux séries de coordonnées convergent. Pour (w_n) , on a $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} = 2$. De plus, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, donc la seconde série télescopique vaut 1. **La série $\sum w_n$ converge et sa somme vaut $(2, 1)$.** En revanche, la première coordonnée de z_n est $1/n$. Or la série harmonique diverge. **La série $\sum z_n$ diverge**, bien que $z_n \rightarrow 0$ et que la série des secondes coordonnées converge.

La figure ci-dessous représente les sommes partielles S_n de $\sum u_n$. Chaque terme tourne d'un quart de tour et se divise par deux, de sorte que la ligne brisée s'enroule vers le point $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.



Corrigé de l'exercice 7 : Séries à paramètre et comparaison

- Comme $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ en 0 , le terme général est positif et équivalent à $\frac{n^a}{2n^2} = \frac{1}{2n^{2-a}}$. D'après le critère de Riemann, la série converge si et seulement si $2 - a > 1$. **La série converge si et seulement si $a < 1$.**
- On écrit $n^{1/n} - 1 = \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) - 1$. Or $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$, et $e^x - 1 \sim x$ en 0 . Donc $n^{1/n} - 1 \sim \frac{\ln n}{n}$. Pour $n \geq 3$, $\ln n \geq 1$, donc $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$. Par comparaison de séries positives, **la série diverge.**
- On a $\left(\frac{1}{n}\right)^{1+1/n} = \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{\ln n}{n}\right)$. L'exponentielle tend vers 1 , donc le terme est équivalent à $\frac{1}{n}$. **La série diverge.**
- On a $n^{3/2} \cdot \frac{(\ln n)^a}{n^2} = \frac{(\ln n)^a}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ par croissances comparées. Donc le terme est un $o(1/n^{3/2})$, et $3/2 > 1$. **La série converge pour tout réel a .**
- Distinguons trois cas. Si $0 < x < 1$, alors $x^{2n} \rightarrow 0$, donc le terme est équivalent à x^n , terme d'une série géométrique convergente. Si $x = 1$, le terme vaut $\frac{1}{2}$ et la série diverge grossièrement. Enfin, si $x > 1$, on écrit $\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x^{-n}}{1+x^{-2n}} \sim \left(\frac{1}{x}\right)^n$, et la série converge.

La série converge si et seulement si $x \neq 1$.

Corrigé de l'exercice 8 : Lien suite-série pour une somme de racines

Voici la démarche, étape par étape.

1. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. Avec la quantité conjuguée,
 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}.$$

En réutilisant la quantité conjuguée au numérateur, on obtient la formule demandée. Ensuite,

$$\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n} \text{ et } (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2 \sim 4n. \text{ Donc } u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{4n^{3/2}}.$$

2. La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est à termes négatifs, et $|u_{n+1} - u_n| \sim \frac{1}{4n^{3/2}}$. Comme $3/2 > 1$, elle converge. D'après le lien suite-série, **la suite** (u_n) **converge vers un réel** C . Autrement dit, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + C + o(1)$. En particulier, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$.

3. Pour $N > n$, on a par télescopage $u_n - u_N = \sum_{k=n}^{N-1} (u_k - u_{k+1})$. Quand

$N \rightarrow +\infty$, on obtient $u_n - C = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1})$. Les termes $u_k - u_{k+1}$ sont positifs et équivalents à $\frac{1}{4k^{3/2}}$. Le théorème de sommation des équivalents, cas convergent,

donne donc $u_n - C \sim \frac{1}{4} T_n$, avec $T_n = \sum_{k=n}^{+\infty} k^{-3/2}$. Or $t \rightarrow t^{-3/2}$ est

décroissante et positive. Pour $n \geq 2$, la comparaison série-intégrale donne

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} \leq T_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}, \text{ soit } \frac{2}{\sqrt{n}} \leq T_n \leq \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

Les deux bornes sont équivalentes à $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Par conséquent, $u_n - C \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Corrigé de l'exercice 9 : Sommes partielles par comparaison série-intégrale

1. La fonction $t \rightarrow \sqrt{t}$ est croissante sur $[0, +\infty[$. Pour $k \geq 1$, on a donc

$$\int_{k-1}^k \sqrt{t} \, dt \leq \sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{t} \, dt. \text{ En sommant de } k = 1 \text{ à } n, \text{ on obtient}$$

$$\int_0^n \sqrt{t} \, dt \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{t} \, dt.$$

C'est l'encadrement demandé, car une primitive de $\sqrt{t}$ est $\frac{2}{3} t^{3/2}$. Ensuite,

$$(n+1)^{3/2} \sim n^{3/2}, \text{ donc les deux bornes sont équivalentes à } \frac{2}{3} n^{3/2}. \text{ Ainsi,}$$

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n^{3/2}.$$

2. La fonction $\ln$ est croissante. Pour $k \geq 1$, on a $\ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \, dt$, et pour $k \geq 2$,

$$\ln k \geq \int_{k-1}^k \ln t \, dt. \text{ Une primitive de } \ln \text{ est } t \ln t - t. \text{ En sommant la première inégalité}$$

de 1 à n , on obtient $\ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - n$. En sommant la seconde de 2 à n , on obtient $\ln(n!) \geq n \ln n - n + 1$, puisque $\ln 1 = 0$. Enfin, pour $n \geq 2$, on divise par

$$n \ln n. \text{ Le minorant donne } 1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n \ln n} \rightarrow 1. \text{ Le majorant s'écrit}$$

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} - \frac{1}{\ln n} \rightarrow 1, \text{ car } \ln(n+1) \sim \ln n. \text{ Donc } \ln(n!) \sim n \ln n.$$

3. Pour $\alpha > 0$, la fonction $t \rightarrow t^\alpha$ est croissante. Le même raisonnement qu'à la question 1 donne

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq \sum_{k=1}^n k^\alpha \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1}.$$

Les deux bornes sont équivalentes à $\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. Donc $\sum_{k=1}^n k^{\alpha} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Corrigé de l'exercice 10 : Séries de Bertrand

1. Sur $[2, +\infty[$, la fonction $t \rightarrow t \ln t$ est un produit de deux fonctions positives et croissantes. Elle est donc positive et croissante, et f est positive et décroissante. De plus, une primitive de f est $t \rightarrow \ln(\ln t)$. Pour $k \geq 3$, on a $\int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f$. En sommant de $k = 3$ à n , on obtient

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 3) \leq S_n - \frac{1}{2 \ln 2} \leq \ln(\ln n) - \ln(\ln 2).$$

Le minorant tend vers $+\infty$, donc **la série diverge**. Ensuite, $\ln(n+1) = \ln n + o(1)$, donc $\ln(\ln(n+1)) = \ln(\ln n) + o(1)$. Ainsi, $S_n = \ln(\ln n) + O(1)$. Comme $\ln(\ln n) \rightarrow +\infty$, on obtient $S_n \sim \ln(\ln n)$.

2. La fonction $g : t \rightarrow \frac{1}{t (\ln t)^2}$ est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$, pour la même raison. Une primitive est $t \rightarrow -\frac{1}{\ln t}$, qui tend vers 0 en $+\infty$. Pour $k \geq 3$, on a

$$\int_k^{k+1} g \leq g(k) \leq \int_{k-1}^k g. \text{ D'abord, les sommes partielles sont majorées par}$$

$$g(2) + \int_2^{+\infty} g = g(2) + \frac{1}{\ln 2}, \text{ donc la série converge. Ensuite, pour } n \geq 2, \text{ on somme de } k = n+1 \geq 3 \text{ à } +\infty :$$

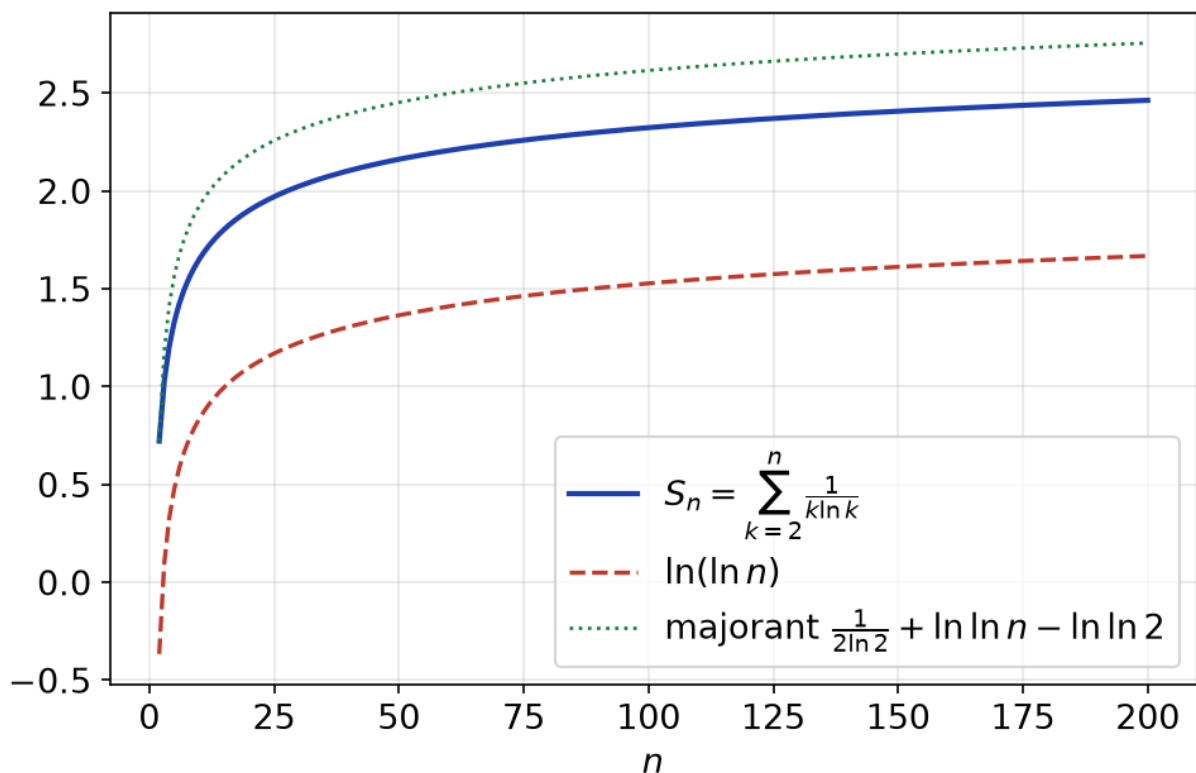
$$\int_{n+1}^{+\infty} g(t) dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} g(t) dt.$$

On obtient $\frac{1}{\ln(n+1)} \leq R_n \leq \frac{1}{\ln n}$, donc $R_n \sim \frac{1}{\ln n}$.

Dernière question

3. D'après l'exercice 9, $\ln(n!) \sim n \ln n$, et ces quantités sont strictement positives pour $n \geq 2$. Donc $\frac{1}{\ln(n!)} \sim \frac{1}{n \ln n}$. Or la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge d'après la question 1. **La série $\sum \frac{1}{\ln(n!)}$ diverge.**

La figure ci-dessous compare S_n à $\ln(\ln n)$ et au majorant obtenu. L'écart entre S_n et $\ln(\ln n)$ reste borné, alors que les deux quantités tendent, très lentement, vers $+\infty$.



Corrigé de l'exercice 11 : Reste de la série de Riemann

1. La fonction $t \rightarrow t^{-\alpha}$ est positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour $k \geq 2$, on a

$$\int_k^{k+1} t^{-\alpha} dt \leq k^{-\alpha} \leq \int_{k-1}^k t^{-\alpha} dt. \text{ Pour } n \geq 1, \text{ on somme de } k = n+1 \text{ à } +\infty.$$

Les intégrales convergent car $\alpha > 1$, et $\int_a^{+\infty} t^{-\alpha} dt = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$. On obtient ainsi l'encadrement

demandé. Ensuite, $(n+1)^{\alpha-1} \sim n^{\alpha-1}$, donc les deux bornes sont équivalentes. **Donc**

$$R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

2. Pour $\alpha = 3$, on a $R_n \leq \frac{1}{2n^2}$. Il suffit donc que $\frac{1}{2n^2} \leq 10^{-4}$, c'est-à-dire $n^2 \geq 5000$. Or $70^2 = 4900$ et $71^2 = 5041$. **Le rang** $n = 71$ **garantit** $R_n \leq 10^{-4}$.

3. Pour $\alpha = 2$, la question 1 donne $\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$, avec $R_n = \frac{\pi^2}{6} - S_n$. En retranchant $\frac{1}{n}$, on obtient

$$-\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leq \frac{\pi^2}{6} - S_n - \frac{1}{n} \leq 0.$$

Donc $\left| \frac{\pi^2}{6} - S_n - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{n(n+1)}$. Ajouter $1/n$ à S_n améliore ainsi nettement l'approximation : l'erreur passe d'environ $1/n$ à moins de $1/n^2$.

Corrigé de l'exercice 12 : Majoration d'un reste par d'Alembert

Suivons les questions dans l'ordre.

1. Les termes sont strictement positifs, et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3n} \rightarrow \frac{1}{3} < 1$. D'après la règle de d'Alembert, **la série converge.**

2. Par linéarité, $\frac{S}{3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n+1}} = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{m-1}{3^m}$. Ce dernier terme est nul pour $m = 1$, donc on peut commencer à $m = 1$. Alors

$$S - \frac{S}{3} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m - (m-1)}{3^m} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{3^m} = \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\frac{2}{3}S = \frac{1}{2}$. **Donc** $S = \frac{3}{4}$.

3. Pour $k \geq 2$, on a $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3k} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Soit $n \geq 1$. Pour $k \geq n+1 \geq 2$, une récurrence donne $u_k \leq u_{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n-1}$. En sommant, on obtient

$$R_n \leq u_{n+1} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = 2 u_{n+1}. \text{ **Donc** } R_n \leq \frac{2(n+1)}{3^{n+1}}.$$

4. On a $0 \leq S - S_n = R_n$. Pour $n = 7$, le majorant vaut $\frac{16}{6561} \approx 2,4 \times 10^{-3}$, ce qui ne suffit pas. Pour $n = 8$, il vaut $\frac{18}{19683} \approx 9,1 \times 10^{-4}$. De plus, ce majorant décroît avec n , puisque le quotient de deux majorants consécutifs vaut $\frac{n+2}{3(n+1)} < 1$. **Pour tout** $n \geq 8$, S_n **approche** $S = 3/4$ à 10^{-3} près.

Corrigé de l'exercice 13 : Sommation des équivalents dans le cas divergent

Dans chaque cas, on trouve un équivalent positif du terme général dont la somme partielle est connue. Ensuite, on applique le théorème de sommation, cas divergent.

1. On a $\frac{1}{2k-1} \sim \frac{1}{2k}$, terme positif d'une série divergente. Par sommation, $A_n \sim \frac{1}{2} H_n$. Or $H_n \sim \ln n$. **Donc** $A_n \sim \frac{1}{2} \ln n$.
2. Avec $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$, on obtient $k^2 \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = k - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right) \sim k$. La série $\sum k$ est positive et divergente, et $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. **Donc** $B_n \sim \frac{n^2}{2}$.
3. On a $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$, terme positif d'une série divergente. Par sommation, $C_n \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$. **Donc** $C_n \sim 2\sqrt{n}$.
4. Soit $\varphi(t) = \frac{t}{\ln t}$ sur $[2, +\infty[$. Sa dérivée vaut $\varphi'(t) = \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{(\ln t)^2}$. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $k \geq 2$, il existe $c_k \in]k, k+1[$ tel que $a_{k+1} - a_k = \varphi'(c_k)$. Or $\ln k \leq \ln c_k \leq \ln(k+1)$, et $\frac{\ln(k+1)}{\ln k} \rightarrow 1$. Donc

$\ln c_k \sim \ln k$, puis $\frac{1}{\ln c_k} \sim \frac{1}{\ln k}$ et $\frac{1}{(\ln c_k)^2} = o\left(\frac{1}{\ln k}\right)$. Ainsi, $a_{k+1} - a_k \sim \frac{1}{\ln k}$.
De plus, $\frac{1}{\ln k} \geq \frac{1}{k}$, donc la série $\sum \frac{1}{\ln k}$ est positive et divergente. Le théorème de sommation donne

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{\ln k} \sim \sum_{k=3}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_3.$$

Enfin, $a_{n+1} = \frac{n+1}{\ln(n+1)} \sim \frac{n}{\ln n}$, qui tend vers $+\infty$. Le terme constant $\frac{1}{\ln 2}$ et la constante a_3 sont donc négligeables. **Donc** $D_n \sim \frac{n}{\ln n}$.

Corrigé de l'exercice 14 : Sommation des équivalents dans le cas convergent

1. On a $0 < \frac{1}{k^2 + k + 1} \leq \frac{1}{k^2}$, donc la série converge. De plus,

$$\frac{1}{k^2 + k + 1} \sim \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \text{ et } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1}.$$

Le théorème de sommation des restes donne alors un reste équivalent à $\frac{1}{n+1}$. **Donc** $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1} \sim \frac{1}{n}$.

2. On a $\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1) - (k-1)}{(k-1)k(k+1)} = \frac{2}{(k-1)k(k+1)}$, ce qui prouve l'identité. Posons

$$b_k = \frac{1}{(k-1)k}, \text{ qui tend vers } 0. \text{ Par télescopage,}$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2} b_{n+1} = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

$$\sin\left(\frac{1}{k^3}\right) \sim \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{(k-1)k(k+1)}, \text{ et ces termes sont positifs. Par sommation des restes, le}$$

reste cherché est équivalent à $\frac{1}{2n(n+1)}$. **Donc** $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{k^3}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$.

3. On a $e^{1/k^2} - 1 \sim \frac{1}{k^2}$, terme positif d'une série convergente. D'après le cours,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}. \text{ Donc } \sum_{k=n+1}^{+\infty} (e^{1/k^2} - 1) \sim \frac{1}{n}.$$

4. Pour $k \geq 2$, on calcule $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k-1)} = \frac{(k-1) - k}{k^2(k-1)} = -\frac{1}{k^2(k-1)}$. Ce terme est de signe

constant, et $\frac{1}{k^2(k-1)} \sim \frac{1}{k^3}$. Par télescopage, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n}$. Ensuite, par sommation des restes et grâce à la question 2,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)} \sim -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

Donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$

Point de méthode : pour un développement asymptotique d'un reste, retranchez le premier terme obtenu, puis recommencez avec la différence, qui est une nouvelle série de signe constant.

Corrigé de l'exercice 15 : Théorème de Cesàro et moyennes géométriques

1. On a $k \sin\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\sin(1/k)}{1/k} \rightarrow 1$, car $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ en 0 . D'après le théorème de Cesàro, **la limite vaut 1**.

2. On a $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \exp\left(k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) \rightarrow e$. D'après le théorème de Cesàro, **la limite vaut e**.

3. On calcule $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^k} = \frac{(k+1)^k}{k^k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$. Donc $\ln\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) \rightarrow 1$. Le théorème de Cesàro donne alors, pour $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \frac{\ln a_n - \ln a_1}{n-1} \rightarrow 1.$$

Or $a_1 = 1$, donc $\frac{\ln a_n}{n} \rightarrow 1$, puis $a_n^{1/n} \rightarrow e$ par continuité de l'exponentielle. Enfin, $a_n^{1/n} = \frac{n}{(n!)^{1/n}}$. **Donc** $\frac{n}{(n!)^{1/n}} \rightarrow e$.

4. La suite $u_n = (-1)^n$ diverge. Pourtant, $\sum_{k=1}^n (-1)^k$ vaut -1 ou 0 , donc ses moyennes sont majorées en valeur absolue par $\frac{1}{n}$. **Les moyennes de Cesàro de $(-1)^n$ tendent vers 0 .**

Corrigé de l'exercice 16 : Série géométrique de matrices

Regardons chaque cas avec soin.

1. La formule est vraie pour $n = 0$. Supposons-la vraie au rang n . Alors

$$A^{n+1} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, la formule est vraie pour tout n .

2. Une série de matrices converge si et seulement si les séries de ses coefficients convergent. D'abord,

$\sum \frac{1}{2^n} = 2$. Ensuite, la série $\sum \frac{n}{2^n}$ converge par la règle de d'Alembert. Notons T sa somme. Comme à l'exercice 12, $T - \frac{T}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} = 1$, donc $T = 2$. **La série converge et $S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.**

3. On a $I_2 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Le produit donne

$$(I_2 - A) S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Donc $S = (I_2 - A)^{-1}$.

4. On lit $|A| = \max\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$ et $|B| = \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Par sous-multiplicativité, $|B^n| \leq \frac{1}{2^n}$. Donc $\sum B^n$ **converge absolument**, et $B^n \rightarrow 0$. Ensuite,

$$(I_2 - B) \sum_{k=0}^n B^k = I_2 - B^{n+1} \rightarrow I_2. \text{ Par passage à la limite,}$$

$$(I_2 - B) \sum_{k=0}^{+\infty} B^k = I_2. \text{ Or } \det(I_2 - B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}. \text{ La formule de la comatrice}$$

donne alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} B^n = (I_2 - B)^{-1} = \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

La somme vaut $\begin{pmatrix} 5 & 3/5 \\ 2/5 & 6/5 \end{pmatrix}$. Remarquons que $|A| = 1$: le critère $|A| < 1$ n'est donc que suffisant, puisque $\sum A^n$ converge quand même.

Corrigé de l'exercice 17 : Exponentielle d'une matrice

1. On écrit $A = a I_2 + b N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Or $N^2 = 0$, et I_2 commute avec N . La formule du binôme donne donc $A^n = a^n I_2 + n a^{n-1} b N$ pour $n \geq 1$, et $A^0 = I_2$. Ensuite, on somme coefficient par coefficient : $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!} = e^a$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{n a^{n-1} b}{n!} = b \sum_{n \geq 1} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} = b e^a$. **Donc** $\exp(A) = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On calcule $J^2 = -I_2$. Par récurrence, $(tJ)^{2m} = (-1)^m t^{2m} I_2$ et $(tJ)^{2m+1} = (-1)^m t^{2m+1} J$. La série $\sum (tJ)^n / n!$ converge, donc la sous-suite de ses sommes partielles d'indices impairs a la même limite. Or

$$\sum_{n=0}^{2M+1} \frac{(tJ)^n}{n!} = \left(\sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!} \right) I_2 + \left(\sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m t^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) J.$$

Quand $M \rightarrow +\infty$, on reconnaît les développements de $\cos t$ et de $\sin t$. Ainsi, $\exp(tJ) = \cos t I_2 + \sin t J$. **On obtient la matrice de rotation d'angle t .**

3. Une norme subordonnée vérifie $|I_2| = 1$ et $|M^n| \leq |M|^n$. Par l'inégalité triangulaire, $\left\| \sum_{n=0}^N \frac{M^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^N \frac{|M|^n}{n!} \leq e^{|M|}$. Par continuité de la norme, on passe à la limite. **Donc** $|\exp(M)| \leq e^{|M|}$.

Corrigé de l'exercice 18 : Développement asymptotique de la série harmonique

Détaillons le raisonnement.

1. On a $w_n - w_{n+1} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$. Or $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Par différence, $w_n - w_{n+1} = \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. **Donc** $w_n - w_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$.
2. Pour $N > n$, on a $w_n - w_N = \sum_{k=n}^{N-1} (w_k - w_{k+1})$. Or $w_N \rightarrow 0$ par définition de γ . Donc $w_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (w_k - w_{k+1})$. Les termes sont équivalents à $\frac{1}{2k^2}$, donc positifs à partir d'un certain rang. Par sommation des restes, $w_n \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Or ce reste est équivalent à $\frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$. **Donc** $w_n \sim \frac{1}{2n}$.
3. On a $w_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. **Donc** $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
4. On a $w_k \sim \frac{1}{2k}$, terme positif d'une série divergente. Par sommation des sommes partielles, $\sum_{k=1}^n w_k \sim \frac{1}{2} H_n$. **Donc** $\sum_{k=1}^n w_k \sim \frac{1}{2} \ln n$.

Corrigé de l'exercice 19 : Suite récurrente et théorème de Cesàro

1. Montrons par récurrence que $u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. C'est vrai pour $n = 0$. Si $u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\sin(u_n) \in \left]0, 1\right]$, et $1 < \frac{\pi}{2}$. Ensuite, $\sin x \leq x$ pour $x \geq 0$, donc $u_{n+1} \leq u_n$. La suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers $\ell \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par continuité du sinus, $\sin \ell = \ell$. Or $x - \sin x > 0$ pour $x > 0$. **Donc** $u_n \rightarrow 0$.

2. Posons $\varphi(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$. Avec $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$, on obtient $\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^6)$. Donc le numérateur vaut $\frac{x^4}{3} + O(x^6)$, et le dénominateur est équivalent à x^4 . Ainsi, $\varphi(x) \rightarrow \frac{1}{3}$ en 0. Comme $u_n \rightarrow 0$ et $u_n > 0$, **on obtient** $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \varphi(u_n) \rightarrow \frac{1}{3}$.
3. D'après le corollaire du théorème de Cesàro, $\frac{1}{n u_n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$, donc $u_n^2 \sim \frac{3}{n}$. Comme $u_n > 0$, **on obtient** $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.
4. Les trois séries sont à termes positifs. D'abord, $u_n \sim \frac{\sqrt{3}}{n^{1/2}}$, donc $\sum u_n$ **diverge**. Ensuite, $u_n^2 \sim \frac{3}{n}$, donc $\sum u_n^2$ **diverge**. Enfin, $u_n^3 \sim \frac{3\sqrt{3}}{n^{3/2}}$, donc $\sum u_n^3$ **converge**.

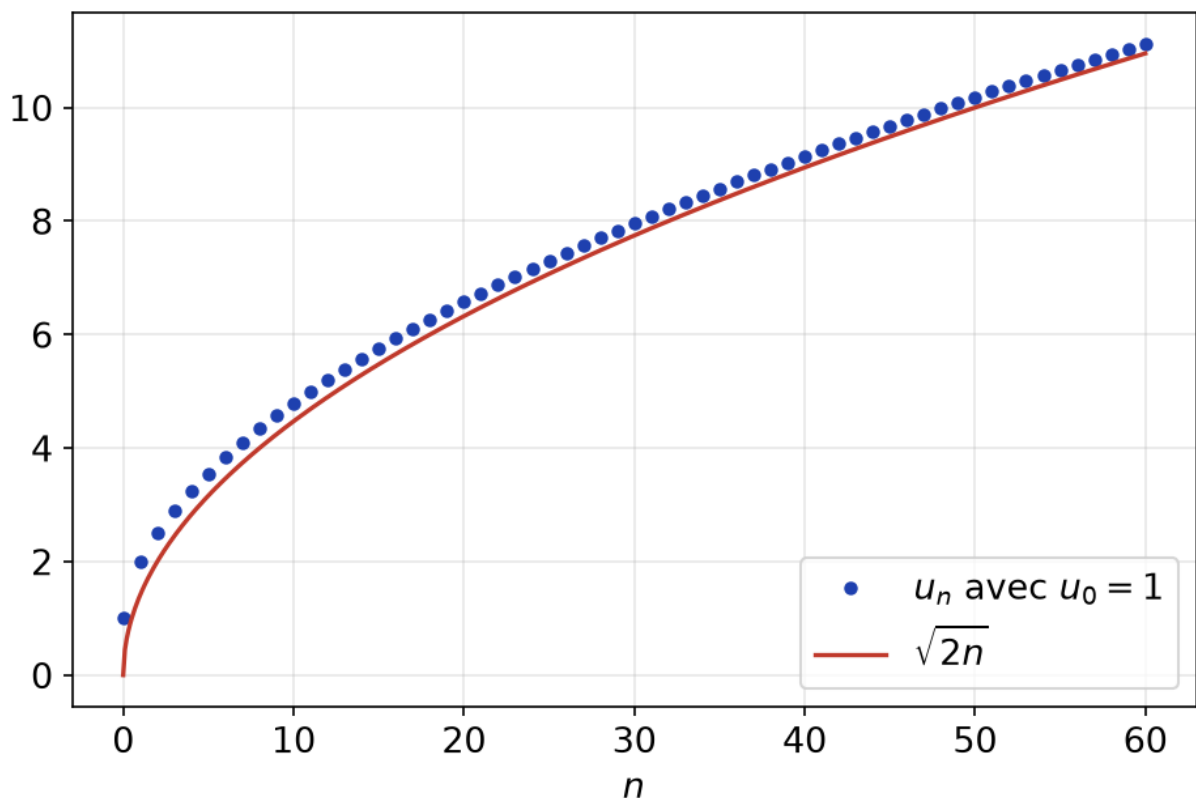
Corrigé de l'exercice 20 : Récurrence et sommation des équivalents

1. Par récurrence, si u_n est défini et $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ est défini et $u_{n+1} > u_n > 0$. La suite est donc bien définie, strictement positive et croissante. Supposons qu'elle soit majorée. Alors elle converge vers un réel $\ell \geq u_0 > 0$. Par passage à la limite, $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$, ce qui est impossible. **Donc** $u_n \rightarrow +\infty$, d'après le théorème de la limite monotone.
2. En élevant au carré, $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2}$. Donc $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \frac{1}{u_n^2} \rightarrow 2$. Le corollaire de Cesàro donne $\frac{u_n^2}{n} \rightarrow 2$. Comme $u_n > 0$, **on obtient** $u_n \sim \sqrt{2n}$.
3. Par télescopage, $u_n^2 = u_0^2 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$. Pour $k \geq 1$, on a $\frac{1}{u_k^2} \sim \frac{1}{2k}$, terme positif d'une série divergente. Par sommation des sommes partielles, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \sim \frac{1}{2} H_{n-1} \sim \frac{1}{2} \ln n$. Les constantes u_0^2 et $\frac{1}{u_0^2}$ sont des $o(\ln n)$. **Donc** $u_n^2 = 2n + \frac{1}{2} \ln n + o(\ln n)$.
4. On factorise : $u_n = \sqrt{2n} \sqrt{1 + \varepsilon_n}$, avec $\varepsilon_n = \frac{\ln n}{4n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \rightarrow 0$. Or $\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2)$, et $\varepsilon_n^2 = o\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right) = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. Ainsi,

$$u_n = \sqrt{2n} \left(1 + \frac{\ln n}{8n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \right) = \sqrt{2n} + \frac{\sqrt{2n} \ln n}{8n} + o\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

Enfin, $\frac{\sqrt{2n}}{8n} = \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{n}} = \frac{1}{4\sqrt{2n}}$. **Donc** $u_n = \sqrt{2n} + \frac{\ln n}{4\sqrt{2n}} + o\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$.

La figure ci-dessous compare les termes u_n , pour $u_0 = 1$, à la courbe $\sqrt{2n}$. Les points restent légèrement au-dessus, ce qui traduit le terme correctif positif en $\frac{\ln n}{4\sqrt{2n}}$.



Corrigé de l'exercice 21 : Problème sur la formule de Stirling

1. On a $u_n = \ln(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n$. Donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(n+1) + 1 - \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln(n+1) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln n). \end{aligned}$$

On obtient $u_{n+1} - u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$

2. On a $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$ On multiplie par $n + \frac{1}{2}$:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1 + \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Donc $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$

3. Ainsi, $u_{n+1} - u_n = O(1/n^2)$, donc la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument. D'après le lien suite-série, (u_n) **converge vers un réel** ℓ . Par définition,

$n! = n^{n+1/2} e^{-n} e^{u_n}$, et $e^{u_n} \rightarrow e^\ell$. **En posant** $C = e^\ell > 0$, **on obtient**
 $n! \sim C n^{n+1/2} e^{-n}.$

Questions 4 à 6

4. Comme dans l'exercice 18, $u_n - \ell = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1})$. Les termes sont équivalents à $\frac{1}{12k^2}$, donc positifs à partir d'un certain rang. Par sommation des restes,

$$u_n - \ell \sim \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{12n}. \text{ **Donc** } u_n - \ell \sim \frac{1}{12n}.$$

5. D'après la question 3, on remplace $(2n)!$ et $n!$ par leurs équivalents :

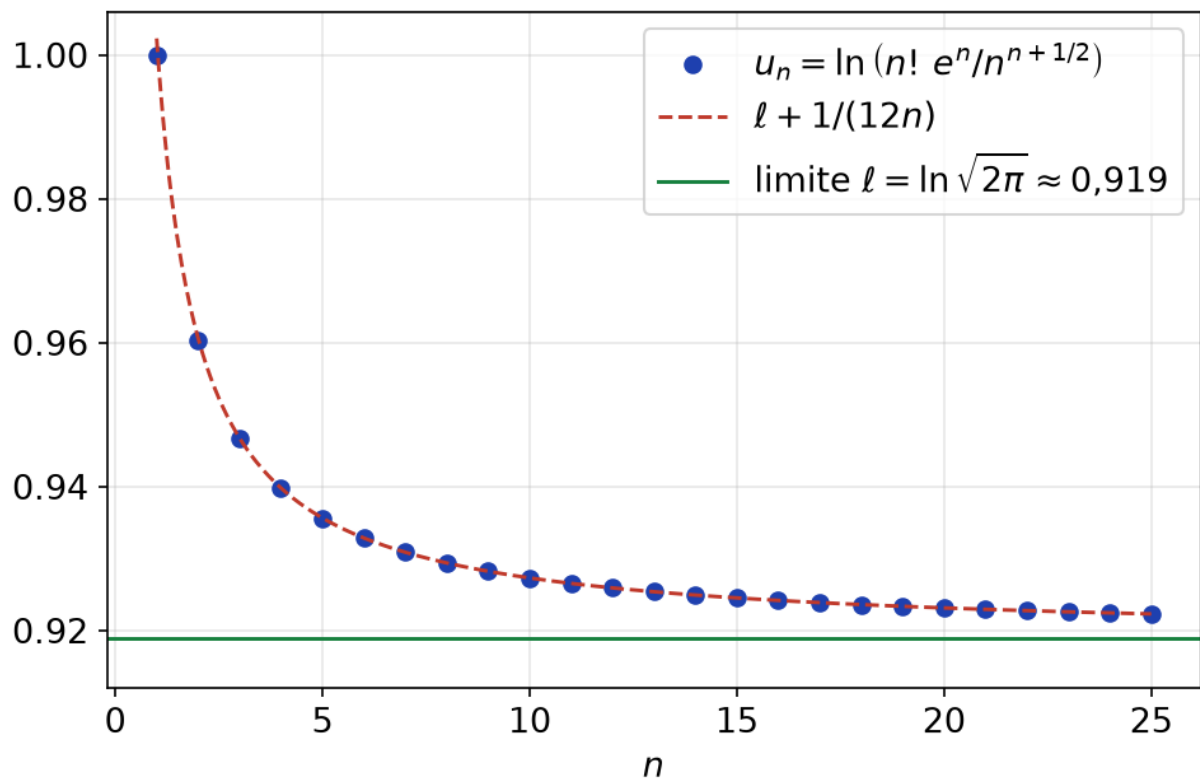
$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{C (2n)^{2n+1/2} e^{-2n}}{C^2 n^{2n+1} e^{-2n}} = \frac{2^{2n} \sqrt{2} n^{2n+1/2}}{C n^{2n+1}} = \frac{4^n \sqrt{2}}{C \sqrt{n}}.$$

Par unicité de la limite de $\binom{2n}{n} \sqrt{n} 4^{-n}$, on obtient $\frac{\sqrt{2}}{C} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. **Donc** $C = \sqrt{2\pi}$, et
 $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$

6. D'abord, $\frac{n! e^n}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n} \rightarrow +\infty$. **La série** $\sum \frac{n! e^n}{n^n}$ **diverge grossièrement**. Ensuite,
 $\binom{2n}{n} 4^{-n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} n^{1/2}}$, terme positif. Par comparaison aux séries de Riemann, **la série**
 $\sum \binom{2n}{n} 4^{-n}$ **diverge**, ce qui confirme l'exercice 4.

La figure ci-dessous montre la convergence de (u_n) vers $\ell = \ln\sqrt{2\pi}$. Les points suivent de très

près la courbe $\ell + \frac{1}{12n}$, comme le prévoit la question 4.



Point de méthode : pour trouver un équivalent d'une suite, étudiez la série de ses différences, puis summez les équivalents des restes pour obtenir le terme suivant du développement.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [séries numériques et vectorielles, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur séries numériques et vectorielles](#)
- À maîtriser avant : [Normes, espaces vectoriels normés et suites](#)

- Chapitre précédent : [Compacité, connexité par arcs et dimension finie](#)
- Chapitre suivant : [Suites de fonctions : convergence simple et uniforme](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)