

Séries numériques

Corrigé de l'exercice 1 : Sommes partielles et séries télescopiques

1. Pour $k \geq 1$, on a $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. La somme partielle est donc télescopique :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, $S_n \rightarrow 1$. **La série converge et** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

2. Vérifions d'abord l'identité proposée. On a

$$\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2) - n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}.$$

Posons $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = \frac{1}{2} (a_1 - a_{n+1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right).$$

Cette quantité tend vers $\frac{1}{4}$. **La série converge et sa somme vaut $\frac{1}{4}$.**

3. Pour $n \geq 2$, on a $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} > 0$. Le logarithme transforme ce produit en somme :

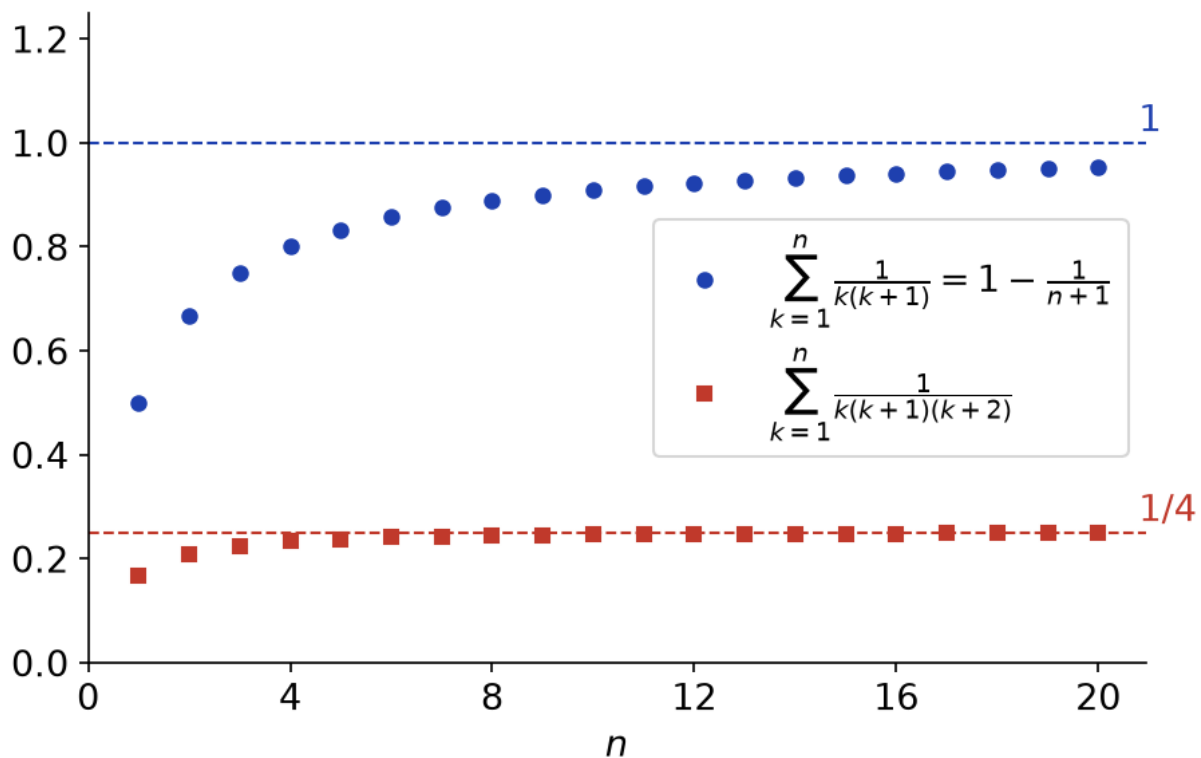
$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = (\ln(n-1) - \ln n) + (\ln(n+1) - \ln n).$$

Chaque parenthèse donne une somme télescopique. Pour $N \geq 2$, on obtient

$$\sum_{n=2}^N \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = (\ln 1 - \ln N) + (\ln(N+1) - \ln 2) = \ln \frac{N+1}{N} - \ln 2.$$

Or $\frac{N+1}{N} \rightarrow 1$, donc $\ln \frac{N+1}{N} \rightarrow 0$. **La série converge et sa somme vaut $-\ln 2$.**

La figure ci-dessous montre les sommes partielles des deux premières séries. Elles s'approchent de leurs limites respectives 1 et $\frac{1}{4}$, sans jamais les dépasser.



Point de méthode : découpez toujours la somme partielle avant de passer à la limite. En effet, séparer la série en deux séries divergentes, comme $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n+1}$, n'a pas de sens.

Corrigé de l'exercice 2 : Divergence grossière

1. D'abord, $\cos \frac{1}{n} \rightarrow \cos 0 = 1$ par continuité du cosinus. Ensuite, $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, donc $n \sin \frac{1}{n} \rightarrow 1$. Enfin, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$. Or $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$, car $\ln(1+x) \sim x$ en 0 . Donc ce terme tend vers e . **Aucun de ces termes généraux ne tend vers 0 : les trois séries divergent grossièrement.**

2. La suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite : ses termes pairs valent 1 et ses termes impairs valent -1. En particulier, elle ne tend pas vers 0. **La série $\sum (-1)^n$ diverge grossièrement.**
3. Posons $g(x) = x - \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$. Sa dérivée vaut $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. Elle est négative sur $] -1, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$. Donc g admet un minimum en 0, égal à $g(0) = 0$. **Ainsi, $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$.**
4. On a $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$. La somme est télescopique :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1).$$
D'après la question 3, appliquée à $x = \frac{1}{k}$, on a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$
En sommant, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$. Or $\ln(n+1) \rightarrow +\infty$. **Donc la série harmonique diverge, alors que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.**

Point de méthode : tester la divergence grossière est le premier réflexe, mais un terme général de limite nulle ne prouve rien.

Corrigé de l'exercice 3 : Séries géométriques et série exponentielle

1. Les séries $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $\sum \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ sont géométriques de raisons de valeur absolue strictement inférieure à 1. Elles convergent toutes les deux. Par linéarité,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = 3 + \frac{3}{4}.$$

La somme vaut $\frac{15}{4}$.

2. La série converge, car $\frac{1}{3} < 1$. On factorise le premier terme :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{9} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{3^j} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{6}.$$

De même, $R_n = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}$. **La somme vaut $\frac{1}{6}$ et $R_n = \frac{1}{2 \cdot 3^n}$.**

3. D'après le cours, la série exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout z . Avec $z = -2$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = e^{-2}$.

4. On écrit $\frac{n+1}{n!} = \frac{n}{n!} + \frac{1}{n!}$. Pour $n \geq 1$, $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$, et ce terme est nul pour $n = 0$.
Donc $\sum \frac{n}{n!}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e.$$

Les deux séries convergent, donc on peut les additionner. **La somme vaut $e + e = 2e$.**

Corrigé de l'exercice 4 : Comparaison avec les séries de Riemann

Tous les termes généraux sont positifs. On peut donc utiliser le critère des équivalents.

1. On a $n^2 + n + 1 \sim n^2$, donc $u_n \sim \frac{1}{n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$). **La série converge.**
2. On a $u_n \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$, avec $\frac{3}{2} > 1$. **La série converge.**
3. On a $u_n \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, et la série harmonique diverge. **La série diverge.**
4. On a $n(n+1) \sim n^2$, donc $\sqrt{n(n+1)} \sim n$ et $u_n \sim \frac{1}{n}$. **La série diverge.**
5. Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n^2} \in]0, 1]$, donc $u_n > 0$. De plus, $\sin x \sim x$ en 0 , donc $u_n \sim \frac{1}{n^2}$. **La série converge.**

Corrigé de l'exercice 5 : Nature par équivalents

1. Le terme est positif et $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ en 0 . Donc $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$. **La série converge.**
2. Le terme est positif et $e^x - 1 \sim x$ en 0 . Donc $u_n \sim \frac{1}{n}$. **La série diverge.**
3. Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, donc $u_n > 0$. De plus, $\tan x \sim x$ en 0 , d'où $u_n \sim \frac{1}{n^2}$. **La série converge.**
4. On écrit $n^{1/n} = e^{\ln n / n}$. Or $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ par croissances comparées. Donc $u_n \sim \frac{\ln n}{n}$, qui est positif. Ensuite, pour $n \geq 3$, $\ln n \geq 1$, donc $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$. Par comparaison avec la série harmonique, $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge. **Par équivalence, $\sum u_n$ diverge.**
5. On multiplie par la quantité conjuguée : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Or $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann, $\frac{1}{2} \leq 1$). Donc la série diverge. On le retrouve directement :
$$\sum_{k=1}^n u_k = \sqrt{n+1} - 1 \rightarrow +\infty$$
. **La série diverge.**

Corrigé de l'exercice 6 : Comparaison à une série de Riemann par domination

Tous les termes sont positifs. On utilise la règle : si $n^\alpha u_n \rightarrow 0$ avec $\alpha > 1$, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et la série converge.

1. Avec $\alpha = \frac{3}{2}$, on a $n^{3/2} \cdot \frac{\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ par croissances comparées. **La série converge.**
2. On calcule $n u_n = \frac{\sqrt{n}}{\ln n} \rightarrow +\infty$. Donc $u_n \geq \frac{1}{n}$ à partir d'un certain rang. **Par comparaison avec la série harmonique, la série diverge.**
3. On a $n^2 e^{-\sqrt{n}} = \exp(2 \ln n - \sqrt{n})$. Or $2 \ln n - \sqrt{n} \rightarrow -\infty$, car $\ln n = o(\sqrt{n})$. Ainsi

$e^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. **La série converge.**

4. De même, $n^2 \cdot n^3 e^{-n} = n^5 e^{-n} \rightarrow 0$. **La série converge.**

5. Pour $n \geq 3$, $(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \cdot \ln(\ln n)} = n^{\ln(\ln n)}$. Dès que $\ln(\ln n) \geq 2$, c'est-à-dire $n \geq e^{e^2}$, on a $u_n \leq \frac{1}{n^2}$. **Par comparaison avec $\sum \frac{1}{n^2}$, la série converge.**

Point de méthode : choisissez α strictement entre 1 et l'exposant « visible ». Ainsi, pour $\frac{\ln n}{n^2}$, tout $\alpha \in]1, 2[$ convient, car le logarithme est négligeable devant toute puissance.

Corrigé de l'exercice 7 : Convergence absolue

1. Pour $n \geq 1$, $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Par comparaison, $\sum \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ converge. **La série converge absolument, donc elle converge.**

2. On a $\left|\frac{(-1)^n n}{2^n}\right| = \frac{n}{2^n}$. Or $n^2 \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{n^3}{2^n} \rightarrow 0$ par croissances comparées. Donc $\frac{n}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. **La série converge absolument.**

3. On a $\left|\frac{e^{in\theta}}{n^{\sqrt{n}}}\right| = \frac{1}{n^{\sqrt{n}/2}}$, terme d'une série de Riemann convergente. **La série complexe converge absolument, donc converge.**

4. Posons $w_n = \frac{(-1)^n + \sin n}{n^2 + 1}$. Par l'inégalité triangulaire, $|w_n| \leq \frac{2}{n^2 + 1} \leq \frac{2}{n^2}$. Donc $\sum w_n$ converge absolument. Ensuite, le cours donne $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} w_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |w_n|$. Enfin, on compare terme à terme. **Ainsi,** $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} w_n\right| \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

5. On a $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$, et la série harmonique diverge. **La série n'est pas absolument convergente.** Elle converge pourtant, d'après le théorème des séries alternées : elle est semi-convergente.

Corrigé de l'exercice 8 : Séries alternées : premières applications

1. La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est positive, décroissante et tend vers 0. D'après le théorème des séries alternées, la série converge. Cependant, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann, $\frac{1}{2} \leq 1$). **La série converge, mais pas absolument.**
2. Pour $n \geq 2$, $\ln n > 0$. De plus, $\ln$ est croissante et tend vers $+\infty$. Donc $\left(\frac{1}{\ln n}\right)_{n \geq 2}$ est positive, décroissante et de limite nulle. **La série converge d'après le théorème des séries alternées.**
3. Posons $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$. On a $h'(x) = \frac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. Donc h est décroissante sur $[1, +\infty[$. Par ailleurs, $h(n) \geq 0$ et $h(n) \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0$. **La série converge d'après le théorème des séries alternées.**
4. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ décroît vers 0. Le théorème donne $|R_n| \leq \frac{1}{n+1}$. Il suffit donc que $n+1 \geq 100$. Par ailleurs, le reste a le signe de son premier terme, $\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$. Pour n pair, ce terme est positif, donc $\ln 2 - S_n = R_n \geq 0$. **Le rang $n = 99$ convient ; pour n pair, S_n est une valeur approchée par défaut.**

Corrigé de l'exercice 9 : Encadrement de la série harmonique et constante d'Euler

1. Pour $t \in [k, k+1]$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$, car $t \rightarrow \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. On intègre sur un segment de longueur 1. **Par croissance de l'intégrale,** $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.
2. Sommons l'inégalité de droite pour k de 1 à n . Par la relation de Chasles,
$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n.$$
 Ensuite, sommons l'inégalité de gauche pour k de 1 à $n-1$:

$H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n$. Ainsi, $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$. Divisons par $\ln n$ pour $n \geq 2$. D'une part, $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n} \rightarrow 1$. D'autre part, $\frac{1 + \ln n}{\ln n} \rightarrow 1$. **Par encadrement, $H_n \sim \ln n$.**

3. On calcule $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$. D'après la question 1, cette différence est négative. De plus, $u_n \geq \ln(n+1) - \ln n > 0$ d'après la question 2. **La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.**
4. D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel γ . Comme $0 \leq u_n \leq u_1 = 1$, on a $\gamma \in [0, 1]$. **Ainsi, $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.** (Numériquement, $\gamma \approx 0,577$.)
5. La convergence de (u_n) équivaut à celle de la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$. **La série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$ converge, et sa somme vaut $\gamma - 1$.** On peut le vérifier : ce terme est négatif et équivaut à $-\frac{1}{2n^2}$.

Corrigé de l'exercice 10 : Séries de Bertrand particulières

1. La fonction $\varphi : t \rightarrow t \ln t$ est dérivable sur $]1, +\infty[$, de dérivée $\ln t + 1 > 0$. Elle est donc strictement croissante et strictement positive sur cet intervalle. **Par conséquent, $f = \frac{1}{\varphi}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$.**
2. Une primitive de $\frac{1}{t \ln t} = \frac{1/t}{\ln t}$ est $\ln(\ln t)$ sur $]1, +\infty[$. Donc $\int_2^x \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2)$. Par décroissance de f , $f(k) \geq \int_k^{k+1} f$ pour $k \geq 2$. En sommant,
- $$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$
- La série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge.**

3. Notons $T_n = \sum_{k=2}^n f(k)$. Pour $k \geq 3$, $f(k) \leq \int_{k-1}^k f$. En sommant pour k de 3 à n , on obtient $T_n \leq f(2) + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$. Avec la question 2, on a donc

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq T_n \leq \ln(\ln n) + f(2) - \ln(\ln 2).$$

Or $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, donc $\ln(n+1) \sim \ln n$ et $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) \rightarrow 0$. En divisant l'encadrement par $\ln(\ln n) \rightarrow +\infty$, les deux bornes tendent vers 1. **Ainsi**, $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$.

4. La fonction $g : t \rightarrow \frac{1}{t (\ln t)^2}$ est positive et décroissante sur $]1, +\infty[$, pour la même raison qu'en question 1. Une primitive est $-\frac{1}{\ln t}$. Pour $k \geq 3$, $g(k) \leq \int_{k-1}^k g$. En sommant,

$$\sum_{k=3}^n g(k) \leq \int_2^n g(t) dt = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln 2}.$$

Les sommes partielles de cette série à termes positifs sont majorées. **La série** $\sum \frac{1}{n (\ln n)^2}$ **converge**.

5. Pour $\alpha > 1$, $n^\alpha \cdot \frac{1}{n (\ln n)^2} = \frac{n^{\alpha-1}}{(\ln n)^2} \rightarrow +\infty$. De plus, $n u_n = \frac{1}{(\ln n)^2} \rightarrow 0$, donc la règle de divergence ne s'applique pas non plus. **Ces séries sont « à la frontière » de la série harmonique : seule la comparaison série-intégrale conclut.**

Corrigé de l'exercice 11 : Équivalent du reste d'une série de Riemann

1. La fonction $t \rightarrow t^{-\alpha}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour $k \geq 2$, on a donc

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}. \text{ Sommons pour } k \text{ de } n+1 \text{ à } N, \text{ avec } N > n \geq 1 :$$

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Or $\int_a^b \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha} - b^{1-\alpha}}{\alpha-1}$, et $b^{1-\alpha} \rightarrow 0$ quand $b \rightarrow +\infty$, car $1-\alpha < 0$. Faisons tendre N vers $+\infty$. **On obtient** $\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

2. Le quotient des deux bornes vaut $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \rightarrow 1$. Divisons l'encadrement par la borne de droite : le rapport tend vers 1 par encadrement. **Donc** $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

3. Pour $\alpha = 2$, on a $0 \leq R_n \leq \frac{1}{n}$. Il suffit donc que $\frac{1}{n} \leq 10^{-3}$. **Le rang** $n = 1000$ **convient**. Cette convergence est lente, car $R_n \sim \frac{1}{n}$.

4. Notons S la somme. On a $S = S_n + R_n$ et $\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$. Donc $S_n + \frac{1}{n+1} \leq S \leq S_n + \frac{1}{n}$. La longueur de cet intervalle vaut $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. Pour $n = 100$, elle vaut $\frac{1}{10 \cdot 100} \approx 9,9 \times 10^{-5}$. **En prenant le milieu de l'encadrement, on obtient** S **à environ** 5×10^{-5} **près avec seulement cent termes.**

Point de méthode : pour une somme infinie, somme de $n+1$ à N , puis faites tendre N vers l'infini. On évite ainsi de manipuler une intégrale généralisée.

Corrigé de l'exercice 12 : Sommes partielles de séries divergentes

1. La fonction racine est croissante sur $[0, +\infty[$. Pour $k \geq 1$, on a donc

$$\int_{k-1}^k \sqrt{t} dt \leq \sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{t} dt. \text{ Sommons pour } k \text{ de } 1 \text{ à } n \text{ avec la relation de Chasles :}$$

$$\int_0^n \sqrt{t} \, dt \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{t} \, dt.$$

Une primitive de $\sqrt{t}$ est $\frac{2}{3}t^{3/2}$. On obtient $\frac{2}{3}n^{3/2} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \frac{2}{3}((n+1)^{3/2} - 1)$.

2. On a $(n+1)^{3/2} = n^{3/2}(1 + \frac{1}{n})^{3/2} \sim n^{3/2}$. Les deux bornes, divisées par $\frac{2}{3}n^{3/2}$, tendent donc vers 1. **Par encadrement**, $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3}n^{3/2}$.

3. La fonction $\ln$ est croissante. Pour $k \geq 2$, on a $\int_{k-1}^k \ln t \, dt \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \, dt$.

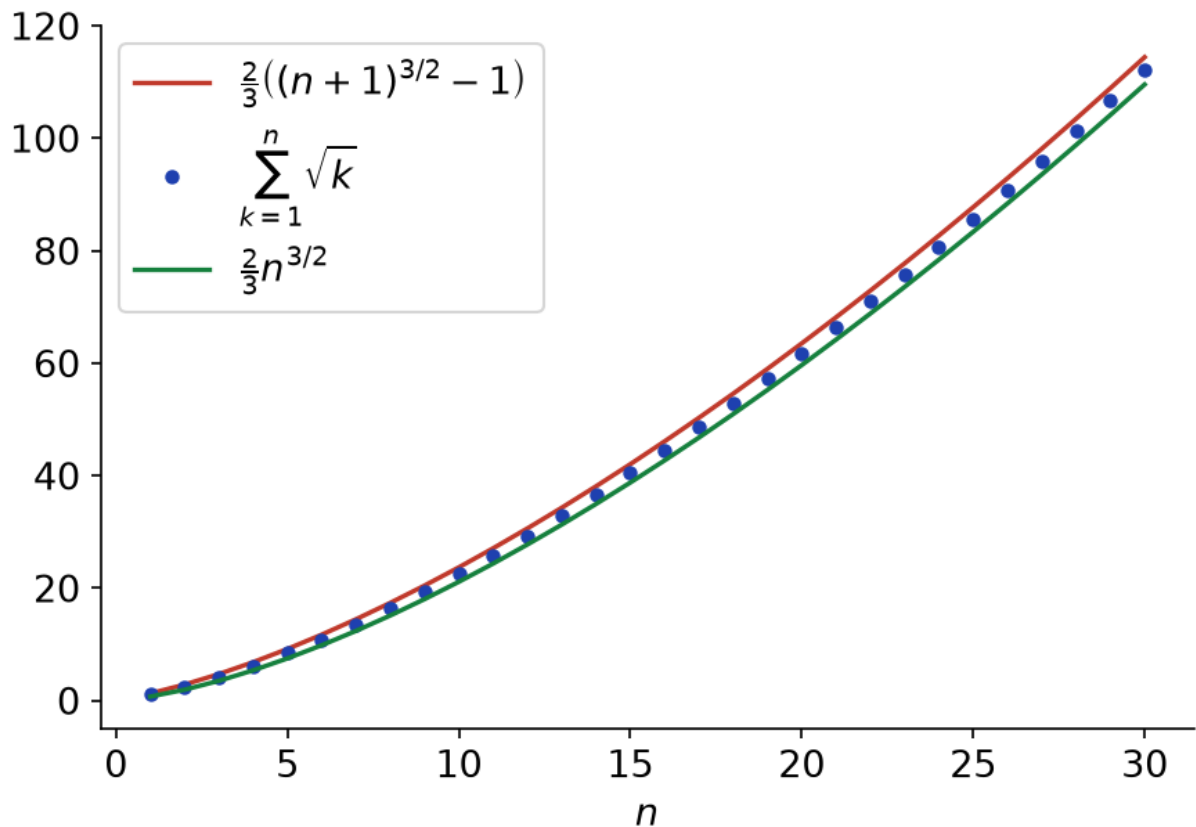
Sommons pour k de 2 à n , en remarquant que $\ln(n!) = \sum_{k=2}^n \ln k$:

$$\int_1^n \ln t \, dt \leq \ln(n!) \leq \int_2^{n+1} \ln t \, dt.$$

Une primitive de $\ln$ est $t \ln t - t$. À gauche, on obtient $n \ln n - n + 1$. À droite, on obtient $(n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2$. **Donc**
 $n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln 2 + 1$.

4. Divisons par $n \ln n$. La borne de gauche donne $1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n \ln n} \rightarrow 1$. À droite, $(n+1)\ln(n+1) = (n+1)(\ln n + \ln(1 + \frac{1}{n})) \sim n \ln n$, et les autres termes sont négligeables devant $n \ln n$. **Par encadrement**, $\ln(n!) \sim n \ln n$.

La figure ci-dessous compare $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$ à ses deux bornes intégrales. Les trois courbes sont presque confondues à grande échelle, ce qui traduit l'équivalence obtenue.

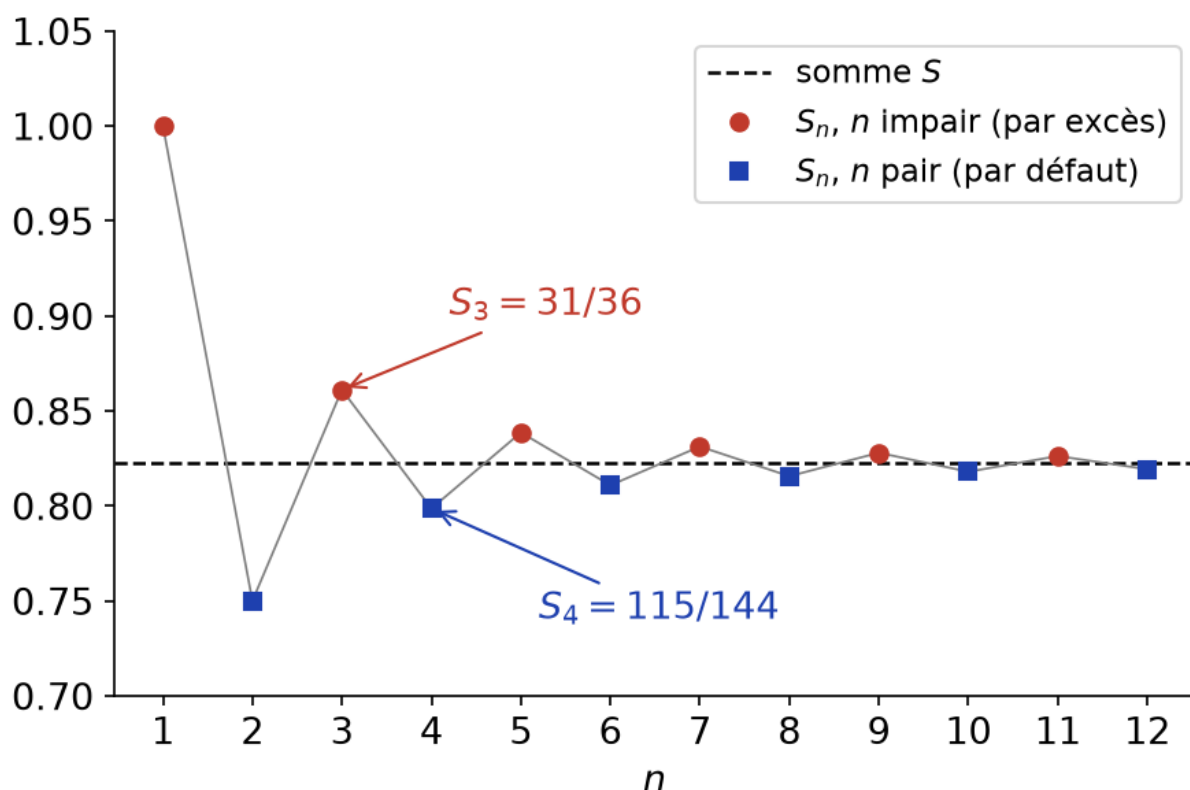


Corrigé de l'exercice 13 : Somme approchée d'une série alternée

- On a $\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$, terme d'une série de Riemann convergente. **La série converge absolument.**
- La suite $a_n = \frac{1}{n^2}$ est positive, décroissante et tend vers 0. Le théorème des séries alternées s'applique. Le reste R_n a le signe de son premier terme $\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^2}$, c'est-à-dire le signe de $(-1)^n$. **Ainsi, $R_n \geq 0$ si n est pair, $R_n \leq 0$ si n est impair, et $|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$.**
- On calcule $S_3 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{36 - 9 + 4}{36} = \frac{31}{36}$. Puis $S_4 = \frac{31}{36} - \frac{1}{16} = \frac{124 - 9}{144} = \frac{115}{144}$. D'après la question 2, $R_4 \geq 0$ et $R_3 \leq 0$, donc $S_4 \leq S \leq S_3$. **Ainsi, $\frac{115}{144} \leq S \leq \frac{31}{36}$, soit $0,798 \leq S \leq 0,862$.**
- Le théorème garantit $|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$. Cette majoration est inférieure à 10^{-2} si et seulement

si $(n+1)^2 \geq 100$, c'est-à-dire $n \geq 9$. **Le plus petit rang est $n = 9$.**

La figure ci-dessous illustre la solution. Les sommes partielles d'indice impair décroissent, celles d'indice pair croissent, et la somme S reste coincée entre elles.



Corrigé de l'exercice 14 : Développement asymptotique d'une série alternée perturbée

1. Pour $n \geq 2$, $\sqrt{n} + (-1)^n \geq \sqrt{2} - 1 > 0$, donc u_n est bien défini. Posons

$x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, qui tend vers 0. On factorise par $\sqrt{n}$: $u_n = \frac{x_n}{1+x_n}$. Or

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2)$ en 0. Donc

$$u_n = x_n - x_n^2 + O(x_n^3) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Le développement demandé est établi.

2. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (théorème des séries alternées). Le terme $o(n^{-3/2})$ définit une série absolument convergente (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$). Leur somme est une série convergente. En revanche, $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Or une série convergente plus une série divergente donne une série divergente. **Donc $\sum u_n$ diverge.**
3. D'après la question 1, $u_n - x_n = o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = o(x_n)$, car $|x_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$. **Donc $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.** Il n'y a pas de contradiction : le critère des équivalents ne vaut que pour des termes de signe constant, et x_n change de signe.
4. Pour $n \geq 2$, $1 + x_n \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$ (le cas le pire est $n = 3$). Donc v_n est bien défini. Ensuite, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$, d'où

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Le même raisonnement qu'en question 2 s'applique. **La série $\sum v_n$ diverge (ses sommes partielles tendent vers $-\infty$).**

Corrigé de l'exercice 15 : Une série trigonométrique à terme oscillant

1. On factorise : $\sqrt{n^2+1} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$. Or $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} + O(h^2)$ en 0. Avec $h = \frac{1}{n^2}$, on obtient $\sqrt{n^2+1} = n\left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$. **Donc**
 $\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
2. Posons $\varepsilon_n = \pi\sqrt{n^2+1} - \pi n = \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Pour tout réel x , $\sin(\pi n + x) = (-1)^n \sin x$. Donc $u_n = (-1)^n \sin \varepsilon_n$. Ensuite, $\sin x = x + O(x^3)$, et $\varepsilon_n^3 = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Ainsi $\sin \varepsilon_n = \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. **On obtient**
 $u_n = (-1)^n \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

3. La série $\sum (-1)^n \frac{\pi}{2^n}$ converge, d'après le théorème des séries alternées. De plus, le reste $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ est le terme d'une série absolument convergente. **Par somme, $\sum u_n$ converge.**
4. D'après la question 2, $|u_n| \sim \frac{\pi}{2^n}$. Les termes $|u_n|$ sont positifs, et $\sum \frac{1}{n}$ diverge. **La série n'est donc pas absolument convergente : elle est semi-convergente.**

Corrigé de l'exercice 16 : Séries dépendant d'un paramètre

1. En 0 , $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Donc $e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$, qui est positif. Le terme général vérifie ainsi $u_n \sim \frac{1}{2n^{2-a}}$. Par comparaison avec une série de Riemann, la série converge si et seulement si $2 - a > 1$. **La série converge si et seulement si $a < 1$.**
2. On a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Le terme général est positif et équivaut à $\frac{1}{2n^a + 1/2}$. La série converge si et seulement si $a + \frac{1}{2} > 1$. **Elle converge si et seulement si $a > \frac{1}{2}$.**
3. Si $|a| \leq 1$, alors $\left|\frac{a^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, donc la série converge absolument. Si $|a| > 1$, alors $\left|\frac{a^n}{n^2}\right| = \frac{|a|^n}{n^2} \rightarrow +\infty$ par croissances comparées. Dans ce cas, la série diverge grossièrement. **La série converge si et seulement si $|a| \leq 1$.**

Corrigé de l'exercice 17 : Comparaison logarithmique

1. Pour $n \geq n_0$, l'hypothèse s'écrit $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$, car u_n et v_{n+1} sont strictement positifs. La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ est donc décroissante. Par conséquent, $0 < \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$ pour $n \geq n_0$. **Ainsi, $u_n \leq M v_n$ avec $M = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$, donc $u_n = O(v_n)$.**
2. Les suites sont positives. **D'après le critère de domination, si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.**
3. On calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1) n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$

4. D'après la formule du binôme, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$, car tous les termes sont positifs.

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$. Posons $v_n = \frac{1}{2^n}$: on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$. La question 1 s'applique avec $n_0 = 1$, et $\sum v_n$ converge. **Donc la série $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge.**

Corrigé de l'exercice 18 : Série exponentielle et irrationalité de e

1. La formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à $\exp$ entre 0 et 1, donne

$$e - S_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt.$$

L'intégrande est positif, donc $e - S_n \geq 0$. De plus, $e^t \leq e$ sur $[0, 1]$, et

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} dt = \frac{1}{(n+1)!}. \text{ Ainsi, } 0 \leq e - S_n \leq \frac{e}{(n+1)!}, \text{ et donc } S_n \rightarrow e.$$

2. Pour $k \geq n+1$, on a $k! = (n+1)! \times (n+2)(n+3) \dots k$. Ce produit comporte $k - n - 1$ facteurs, tous supérieurs ou égaux à $n+1$. D'où $k! \geq (n+1)! (n+1)^{k-n-1}$. Ensuite,

$$e - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \text{ est une somme de termes strictement positifs, donc } e - S_n > 0.$$

Enfin, pour $n \geq 1$,

$$e - S_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^j} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n \cdot n!}.$$

On a bien $0 < e - S_n \leq \frac{1}{n \cdot n!}.$

3. Pour $n \geq 2$, $\frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$, et ce terme est nul pour $n \in \{0, 1\}$. Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e.$$

De même, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = e$ (exercice 3). Les deux séries convergent, donc par linéarité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e.$$

4. Supposons $e = \frac{p}{q}$ avec $q \geq 2$. D'une part, $q!e = p(q-1)!$ est un entier. D'autre part,

$$q!S_q = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}$$

est un entier, car $k!$ divise $q!$. Donc $N = q!(e - S_q)$ est un entier.

Or la question 2 donne $0 < N \leq \frac{q!}{q \cdot q!} = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$. Aucun entier n'est dans $]0, \frac{1}{2}]$: c'est absurde. Si $q = 1$, on écrit $e = \frac{2p}{2}$ et on se ramène au cas $q = 2$. **Le nombre e est irrationnel.**

Corrigé de l'exercice 19 : Série alternée logarithmique à paramètre

- Si n est pair, $1 + \frac{1}{n^\alpha} > 0$. Si n est impair, alors $n \geq 3$ et $n^\alpha > 1$ puisque $\alpha > 0$. Donc $1 - \frac{1}{n^\alpha} > 0$. **Dans tous les cas, u_n est bien défini.**
- Posons $x_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, qui tend vers 0. En 0, $\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc $\ln(1+x) - x \sim -\frac{x^2}{2}$. Comme $x_n^2 = \frac{1}{n^{2\alpha}}$, on obtient $w_n \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$.
- La suite $(-w_n)$ est positive à partir d'un certain rang et équivaut à $\frac{1}{2n^{2\alpha}}$. Donc $\sum w_n$ converge si et seulement si $2\alpha > 1$. Par ailleurs, $\sum x_n$ converge pour tout $\alpha > 0$ (théorème des séries alternées). Or $u_n = x_n + w_n$. Si $\alpha > \frac{1}{2}$, $\sum u_n$ est la somme de deux séries convergentes. Si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, c'est la somme d'une série convergente et d'une série divergente. **La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.**
- On a $|u_n| = |\ln(1+x_n)| \sim |x_n| = \frac{1}{n^\alpha}$, car $\ln(1+x) \sim x$ en 0. Par comparaison avec les séries de Riemann, $\sum u_n$ **converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$** . Pour $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$, la série est donc semi-convergente.

Corrigé de l'exercice 20 : Formule de Stirling faible : lien suite-série

1. On a $b_n = \ln(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n$. Donc

$$b_{n+1} - b_n = \ln(n+1) + 1 - \left(n + \frac{3}{2}\right)\ln(n+1) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n.$$

On regroupe les logarithmes de $n+1$: $\ln(n+1) - \left(n + \frac{3}{2}\right)\ln(n+1) = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n+1)$.

Ainsi, $b_{n+1} - b_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

2. En 0, $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + O(h^4)$. Avec $h = \frac{1}{n}$, on obtient

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}\right) + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1 + \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Donc $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

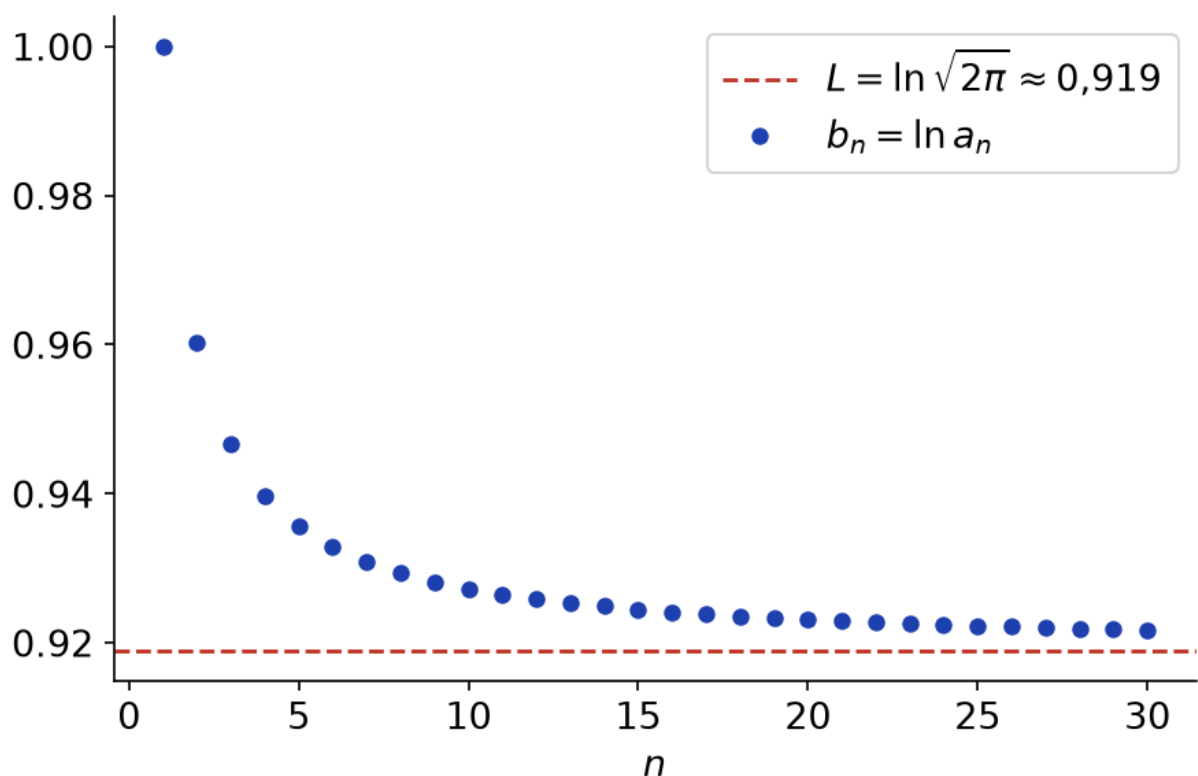
3. On en déduit $b_{n+1} - b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum (b_{n+1} - b_n)$ converge donc absolument.

D'après le lien suite-série, la suite (b_n) converge vers un réel L . Par continuité de

l'exponentielle, $a_n \rightarrow e^L = C > 0$. **Ainsi,** $n! \sim C n^n e^{-n\sqrt{n}}$. (On montre ailleurs que $C = \sqrt{2\pi}$.)

4. D'après la question 2, $b_{n+1} - b_n \sim -\frac{1}{12n^2}$. Deux suites équivalentes ont le même signe à partir d'un certain rang. Donc $b_{n+1} - b_n < 0$ pour n assez grand. **La suite (b_n) , et donc $(a_n) = (e^{b_n})$, est décroissante à partir d'un certain rang.**

La figure ci-dessous représente $b_n = \ln a_n$ pour les premières valeurs de n . La suite décroît et se stabilise rapidement vers sa limite $L = \ln\sqrt{2\pi} \approx 0,919$.



Corrigé de l'exercice 21 : Problème : série harmonique alternée

- La suite $\left(\frac{1}{k}\right)$ est positive, décroissante et tend vers 0. **D'après le théorème des séries alternées, la série converge.**
- Dans A_{2n} , les termes d'indice impair sont positifs et ceux d'indice pair sont négatifs. On ajoute puis on retranche les termes pairs :

$$A_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j} = H_{2n} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

Donc $A_{2n} = H_{2n} - H_n$.

- On utilise le développement admis :

$A_{2n} = (\ln(2n) + \gamma + o(1)) - (\ln n + \gamma + o(1)) = \ln 2 + o(1)$. La suite (A_n) converge d'après la question 1. Sa limite est donc celle de la suite extraite (A_{2n}) . **Ainsi,**

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$

4. On réduit au même dénominateur : $\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} = \frac{2n+1-2n}{n(2n+1)} = \frac{1}{n(2n+1)}$. Ensuite,
 $\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} = 2\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$. Or

$$A_{2N+1} = 1 - \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

On en déduit $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(2n+1)} = 2(1 - A_{2N+1})$.

5. La suite (A_{2N+1}) est extraite de (A_n) , donc elle tend vers $\ln 2$. **Par conséquent,**
 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2(1 - \ln 2) \approx 0,614$.

6. On a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{m=n+1}^{2n} \frac{1}{m} = H_{2n} - H_n = A_{2n}$. **Donc** $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \rightarrow \ln 2$. On retrouve aussi ce résultat comme somme de Riemann de $t \rightarrow \frac{1}{1+t}$ sur $[0, 1]$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2.$$

Point de méthode : pour une série convergente, il suffit de connaître la limite d'une suite extraite de sommes partielles, comme (A_{2n}) , pour obtenir la somme.

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : une suite récurrente et deux séries

- Montrons par récurrence que $u_n \in]0, 1[$. C'est vrai pour $n = 0$. Si $u_n \in]0, 1[$, alors $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ est un produit de deux réels de $]0, 1[$, donc $u_{n+1} \in]0, 1[$. Ensuite, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$, donc la suite est décroissante. Elle est minorée par 0, donc elle converge vers un réel $\ell \in [0, u_0]$. Par continuité de f , on a $\ell = \ell - \ell^2$, donc $\ell = 0$. **La suite (u_n) décroît et converge vers 0.**
- On a $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$. La série $\sum u_n^2$ est donc télescopique, et

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 = u_0 - u_{n+1} \rightarrow u_0. \text{ La série } \sum u_n^2 \text{ converge et sa somme vaut } u_0.$$

3. On calcule

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n(1-u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{1-(1-u_n)}{u_n(1-u_n)} = \frac{1}{1-u_n}.$$

L'identité est démontrée.

4. Comme $0 < u_k \leq u_0 < 1$, on a $1 \leq \frac{1}{1-u_k} \leq \frac{1}{1-u_0}$. Sommons pour k de 0 à $n-1$: la somme de gauche est télescopique. On obtient $n \leq \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \leq \frac{n}{1-u_0}$. Donc

$$u_n \geq \frac{1}{\frac{n}{1-u_0} + \frac{1}{u_0}} \sim \frac{1-u_0}{n}.$$

Le minorant est positif et équivalent à un multiple de $\frac{1}{n}$, terme d'une série divergente. **Par comparaison, la série $\sum u_n$ diverge.**

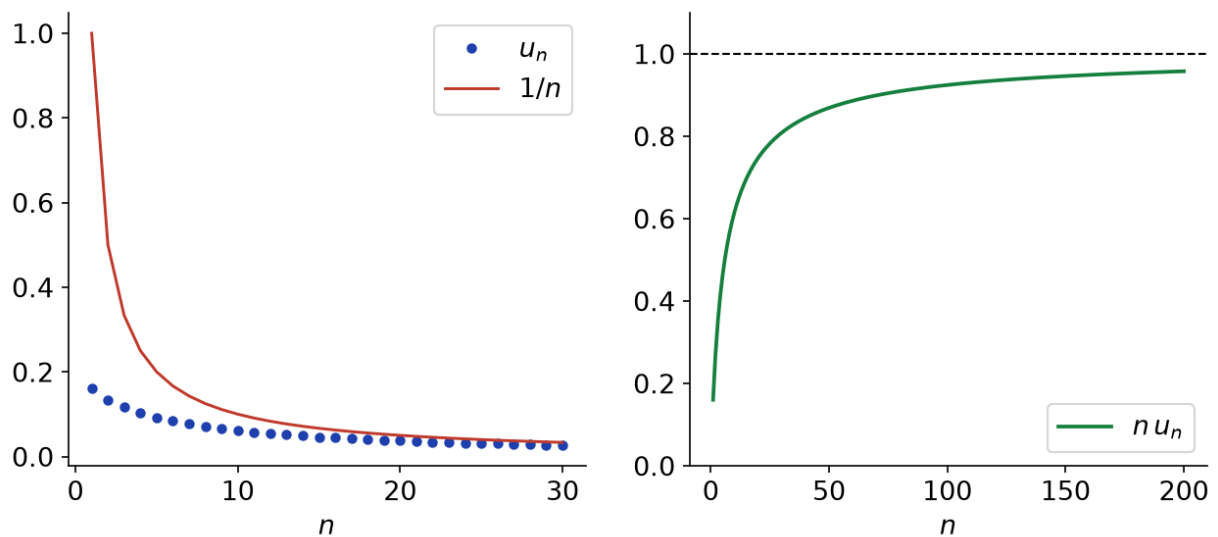
5. On a $\frac{1}{1-u_k} = 1 + \frac{u_k}{1-u_k} \leq 1 + \frac{u_k}{1-u_0}$. La question 4 donne aussi $u_k \leq \frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$. En sommant pour k de 0 à $n-1$, avec $n \geq 2$,

$$n \leq \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \leq n + \frac{1}{1-u_0} \left(u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) \leq n + \frac{1}{1-u_0} (u_0 + 1 + \ln n).$$

On a utilisé $H_{n-1} \leq 1 + \ln n$. Ainsi, $\frac{1}{u_n} = n + O(\ln n)$. Enfin,

$$n u_n = \frac{n}{n + O(\ln n)} = \frac{1}{1 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)} \rightarrow 1. \text{ Donc } u_n \sim \frac{1}{n}.$$

La figure ci-dessous compare u_n et $\frac{1}{n}$ pour $u_0 = 0,8$, puis trace le produit $n u_n$. Les deux suites se rapprochent en proportion, conformément à l'équivalent obtenu.



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [séries numériques, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur séries numériques](#)
- À maîtriser avant : [Relations de comparaison : domination, équivalents](#), [Intégration sur un segment](#)
- Chapitre précédent : [Intégration sur un segment](#)
- Chapitre suivant : [Familles sommables](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)