

Séries entières

Exercice 1 : Rayons par la règle de d'Alembert

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n} z^n$.

2. $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$.

3. $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$.

Exercice 2 : Séries entières lacunaires

Dans cet exercice, certains coefficients sont nuls, ce qui interdit d'utiliser directement le quotient a_{n+1}/a_n .

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{4^n}$ et calculer sa somme sur le disque ouvert de convergence.

2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} n 2^n z^{3n}$.

Exercice 3 : Rayons par comparaison

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ suivantes.

1. $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ pour $n \geq 1$.
2. $a_n = \left(2 + (-1)^n\right)^n$.
3. $a_n = d(n)$, le nombre de diviseurs positifs de l'entier $n \geq 1$.
4. $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

Exercice 4 : Lemme d'Abel et rayon de convergence

Soit (a_n) une suite complexe et R le rayon de $\sum a_n z^n$.

1. On suppose que $\sum a_n$ converge mais que $\sum |a_n|$ diverge. Montrer que $R = 1$.
2. On suppose que (a_n) est bornée mais ne tend pas vers 0. Montrer que $R = 1$.
3. En déduire, sans calcul, le rayon de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} z^n$ et celui de $\sum \cos(n) z^n$. On admettra que $\cos(n)$ ne tend pas vers 0.

Exercice 5 : Produit de Cauchy et rayon d'une somme

1. Montrer que, pour $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) x^n.$$

- Déterminer le rayon de convergence exact de cette série entière.
- Déterminer le rayon de $\sum (1 + 2^n) z^n$, puis celui de $\sum (2^n + (-2)^n) z^n$.

Exercice 6 : Somme de la série des $n^2 x^n$

- Déterminer le rayon R de $\sum n^2 x^n$.
- Calculer, pour $x \in]-R, R[$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$, puis $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$.
- En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Exercice 7 : Somme avec l'exponentielle

- Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{n^2 + 1}{n!} x^n$.
- En écrivant $n^2 + 1 = n(n-1) + n + 1$, calculer sa somme $S(x)$.
- En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{n!}$.

Exercice 8 : Éléments simples et logarithme

1. Développer en série entière $f(x) = \frac{1}{(1-x)(2-x)}$ et préciser le rayon.
2. Factoriser $1 + x - 2x^2$, puis développer $g(x) = \ln(1 + x - 2x^2)$ en série entière au voisinage de 0. Préciser le rayon.

Exercice 9 : Fonctions circulaires et hyperboliques

1. Développer $x \rightarrow \sin^2 x$ en série entière et donner le rayon.
2. Montrer que, pour tout réel x , $\cos x \operatorname{ch} x = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{(1+i)x} + e^{(-1+i)x}}{2} \right)$.
3. En déduire que

$$\cos x \operatorname{ch} x = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-4)^q}{(4q)!} x^{4q}.$$

4. Vérifier le coefficient de x^4 par un produit de développements limités.

Exercice 10 : Somme de la série des $x^{3n}/(3n)!$

On note $j = e^{2i\pi/3}$ et, pour x réel, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

1. Justifier que le rayon est infini.
2. Montrer que, pour tout entier k , $1 + j^k + j^{2k}$ vaut 3 si 3 divise k et 0 sinon.
3. En déduire que $S(x) = \frac{1}{3}(e^x + e^{jx} + e^{j^2x})$, puis une expression réelle de $S(x)$.
4. Vérifier que S est solution de l'équation différentielle $y''' = y$.

Exercice 11 : Développements par dérivation

1. Soit $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour $x \in]-1, 1[$. Calculer $f'(x)$, puis développer f en série entière.
2. Soit $g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Calculer $g'(x)$ et développer g en série entière sur $] -1, 1[$.

Exercice 12 : Série du binôme et coefficients binomiaux centraux

1. Montrer que, pour $|x| < \frac{1}{4}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

2. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8^n} \binom{2n}{n}$.

3. À l'aide d'un produit de Cauchy et de l'unicité des coefficients, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

Exercice 13 : Somme au bord et théorème d'Abel radial

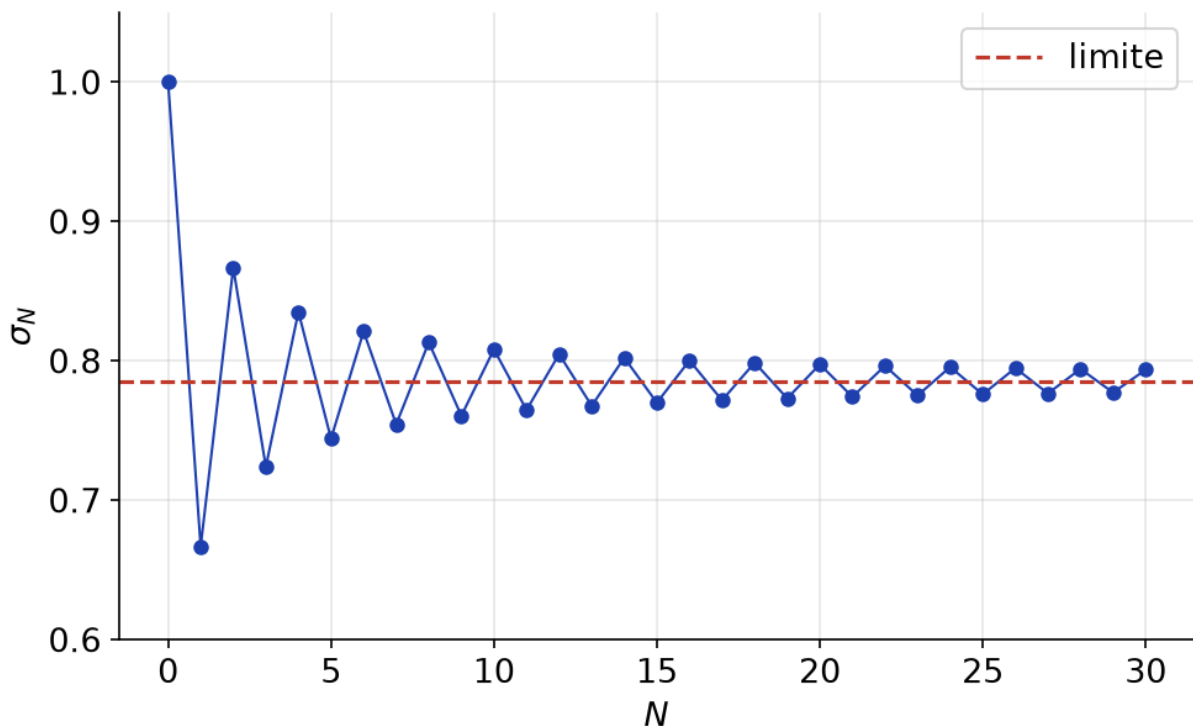
On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

1. Déterminer le rayon et montrer que la série converge normalement sur $[-1, 1]$.

2. Calculer $S(x)$ pour $x \in]-1, 1[$, $x \neq 0$.
3. En déduire $S(1)$ et $S(-1)$. Contrôler $S(1)$ par un calcul télescopique.

Exercice 14 : Calcul de $\pi/4$ et de $\ln 2$

La figure ci-dessous représente les premières sommes partielles $\sigma_N = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Elles oscillent autour d'une limite que l'on va identifier.



1. Justifier la convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
2. En utilisant les développements de Arctan et de $\ln(1+x)$, calculer leurs sommes.
3. Calculer de même $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ en l'écrivant comme limite de $\int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$.

Exercice 15 : Réciproque du théorème d'Abel

1. Donner une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon 1 dont la somme admet une limite finie en 1^- alors que $\sum a_n$ diverge.
2. On suppose désormais $a_n \geq 0$ pour tout n , le rayon au moins égal à 1, et la somme $S(x) = \sum a_n x^n$ bornée sur $[0, 1[$ par un réel M . Montrer que $\sum a_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x)$.
3. Application : montrer que $\sum \frac{x^n}{n}$ ne peut pas avoir de somme bornée sur $[0, 1[$, et retrouver ce fait avec la formule de la somme.

Exercice 16 : Continuité au bord sans dérivabilité

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

1. Déterminer le rayon, puis montrer que f est définie et continue sur $[-1, 1]$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $] -1, 1[$ et que $x f'(x) = -\ln(1-x)$.
3. Montrer que $\frac{f(1) - f(x)}{1-x} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 1^-$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 17 : Unicité des coefficients et identification

1. Déterminer toutes les fonctions f développables en série entière sur $] -r, r[$, avec $r > 0$, telles que $f(2x) = f(x) + x$ pour tout $x \in] -r/2, r/2[$.

2. Démontrer la formule de Vandermonde : pour $p, q, n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

3. Soit f la somme d'une série entière de rayon $R > 0$, telle que $f(-x) = -f(x)$ sur $]-R, R[$. Montrer que tous ses coefficients d'indice pair sont nuls.

Exercice 18 : Arcsin $x / \sqrt{1 - x^2}$ par une équation différentielle

On pose, pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \frac{\text{Arcsin } x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

- Montrer que f est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation $(1 - x^2) y' - x y = 1$.
- Déterminer les séries entières $\sum a_n x^n$ de rayon non nul solutions de cette équation et telles que $a_0 = 0$.
- Calculer le rayon et conclure que

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

Exercice 19 : Résolution d'une équation différentielle par une série entière

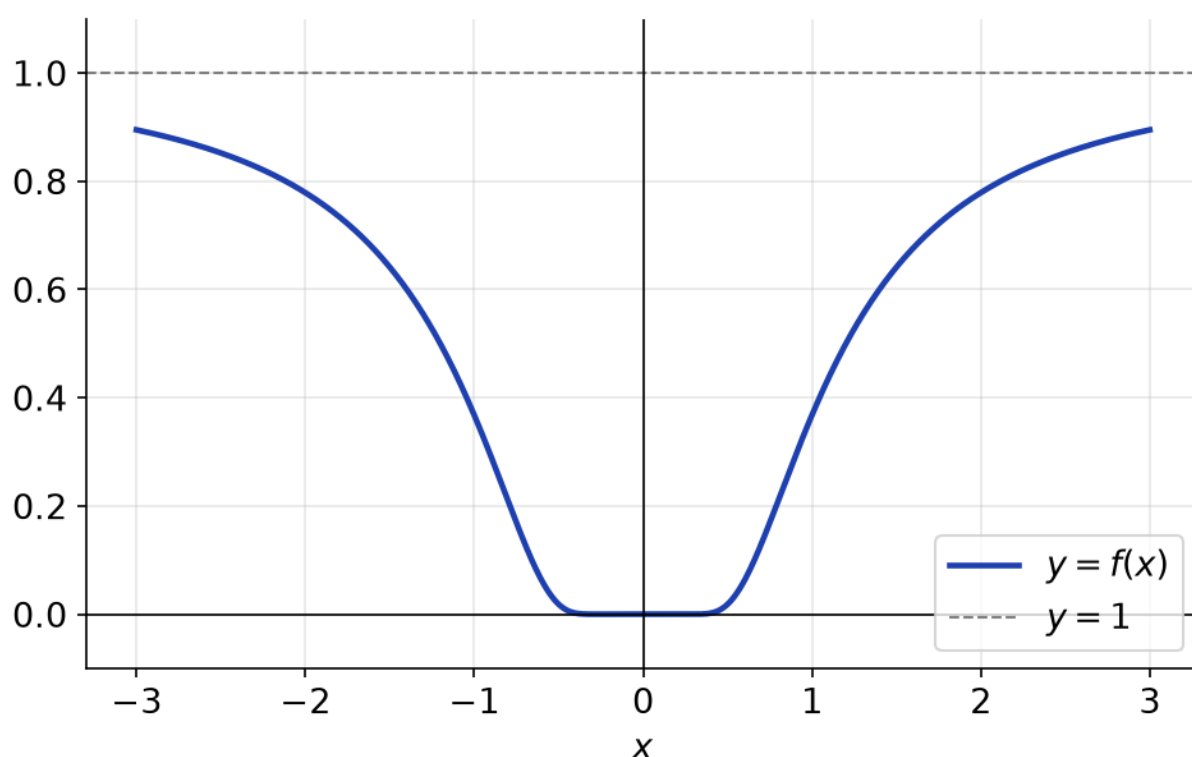
On considère l'équation différentielle $(E): 4x y'' + 2 y' - y = 0$.

- Déterminer les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0 , et leur rayon.
- Exprimer leur somme à l'aide des fonctions usuelles, séparément sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

3. Vérifier que $x \rightarrow \operatorname{sh} \sqrt{x}$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$. Pourquoi n'a-t-elle pas été trouvée à la première question ?

Exercice 20 : Une fonction C^∞ non développable en série entière

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Son graphe, très aplati près de l'origine, est représenté ci-dessous.



1. Montrer par récurrence que, pour tout n , il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$ pour $x \neq 0$.
2. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n .
3. Montrer que f n'est développable en série entière sur aucun intervalle $] -r, r[$.

Exercice 21 : Problème : suite de Fibonacci et série génératrice

On définit $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. Montrer que $0 \leq F_n \leq 2^n$, puis que le rayon R de $\sum F_n x^n$ vérifie $R \geq \frac{1}{2}$.
2. On note $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$ pour $|x| < \frac{1}{2}$. Montrer que $(1 - x - x^2) G(x) = x$.
3. Vérifier que $1 - x - x^2 = (1 - \varphi x)(1 - \psi x)$, puis décomposer G en éléments simples.
4. En déduire, par unicité des coefficients, que $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.
5. Déterminer le rayon exact R , puis la limite de F_{n+1}/F_n .

Exercice 22 : Problème : nombre de dérangements

Un dérangement de $\{1, \dots, n\}$ est une permutation sans point fixe. On note D_n leur nombre, avec la convention $D_0 = 1$.

1. Calculer D_1 , D_2 et D_3 .
2. En classant les permutations de $\{1, \dots, n\}$ selon leur ensemble de points fixes, montrer que
$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k.$$
3. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$. Montrer que son rayon est au moins 1.
4. Montrer que $e^x f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in]-1, 1[$.

5. En déduire que $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$, puis la limite de la proportion $D_n/n!$ de dérangements.
6. Vérifier la formule pour $n = 4$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [séries entières, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Séries de fonctions](#)
- Chapitre précédent : [Séries de fonctions](#)
- Chapitre suivant : [Fonctions vectorielles d'une variable réelle](#)
- Le même thème en L2 : [séries entières, exercices de maths en L2](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)