

Séries entières

Exercice 1 : Rayons de convergence par la règle de d'Alembert

Déterminez le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n} z^n$.

2. $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$.

3. $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} z^n$.

4. $\sum_{n \geq 0} \frac{z^{3n}}{8^n}$.

Exercice 2 : Rayons de convergence sans la règle de d'Alembert

Dans chaque cas, la règle de d'Alembert sur les coefficients ne s'applique pas. Déterminez le rayon de convergence en justifiant soigneusement.

1. $\sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n$. On admet que la suite $(\sin n)$ ne tend pas vers 0.

2. $\sum_{n \geq 0} z^{n^2}$.

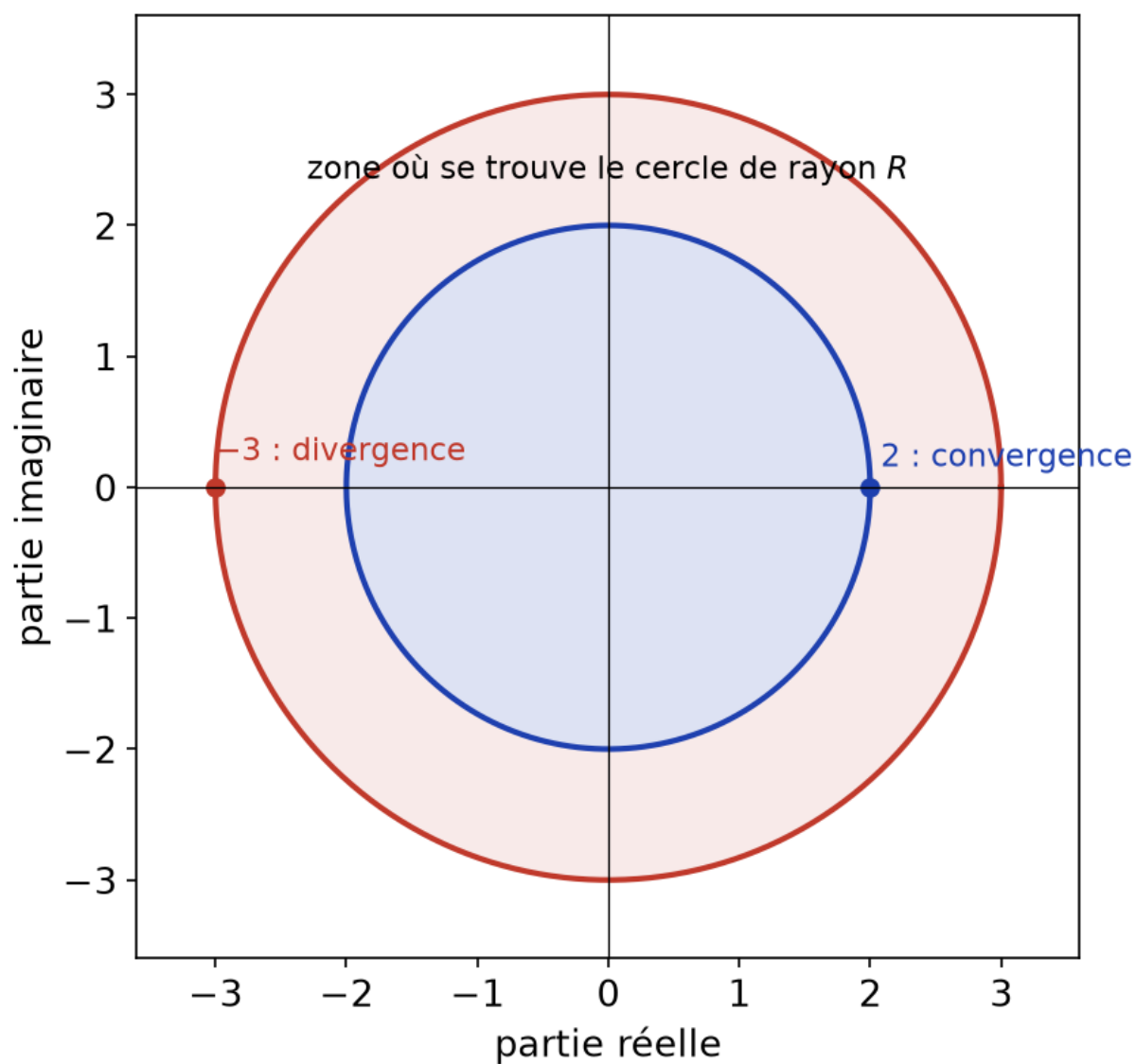
3. $\sum_{n \geq 0} 2^n z^{2n}$.

4. $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, où $a_n = 2^n$ si n est pair et $a_n = 1$ si n est impair.

Exercice 3 : Lemme d'Abel et encadrement du rayon

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R .

- On suppose que $\sum a_n 2^n$ converge et que $\sum a_n (-3)^n$ diverge. Montrez que $2 \leq R \leq 3$. La figure ci-dessous représente la situation.
- On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n z_0^n$ converge sans converger absolument. Montrez que $R = |z_0|$.
- Déterminez le rayon de $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n 3^n}$ grâce à la question précédente, en étudiant le point $z_0 = -3$.



Exercice 4 : Comportement sur le bord du disque

On considère, pour x réel, la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$.

1. Déterminez son rayon de convergence R .
2. Étudiez la nature de la série en $x = R$ et en $x = -R$.
3. Calculez sa somme $S(x)$ sur $] -R, R[$.

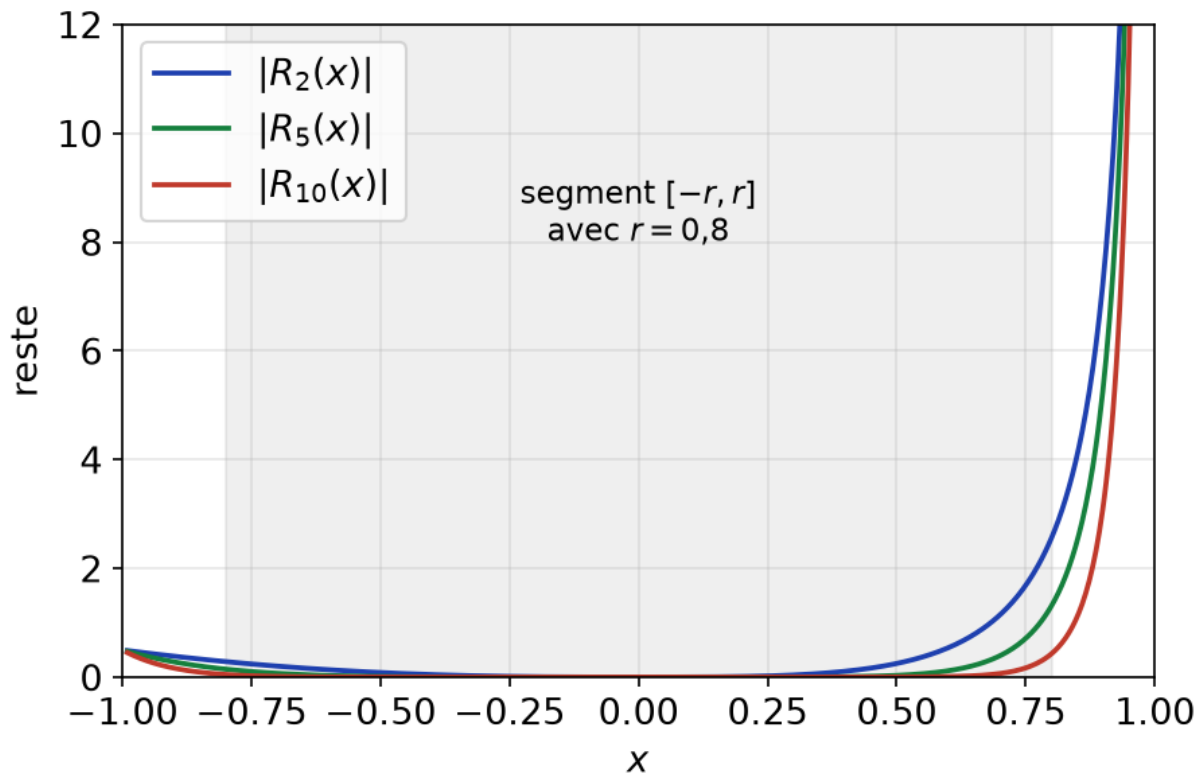
4. Montrez que la série converge uniformément sur $[-1, 0]$, en utilisant le critère des séries alternées. Déduisez-en la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 5 : Somme et produit de Cauchy de séries entières

- Déterminez le rayon de $\sum (1 + 2^n) z^n$ et calculez sa somme.
- On pose $a_n = 1$ et $b_n = \frac{1}{n!} - 1$. Déterminez les rayons de $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum (a_n + b_n) z^n$. Que constatez-vous ?
- À l'aide d'un produit de Cauchy, montrez que $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$ pour $|z| < 1$.
- Soit $\sum a_n z^n$ de rayon $R_a > 0$ et $S_n = a_0 + \dots + a_n$. Montrez que, pour $|z| < \min(1, R_a)$, on a $\frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n$.
- Application : développez $\frac{e^z}{1-z}$ en série entière et déterminez exactement le rayon obtenu.

Exercice 6 : Convergence normale sur les compacts du disque

On note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$ le reste d'ordre n de la série géométrique, pour $x \in]-1, 1[$. La figure ci-dessous représente $|R_n|$ pour quelques valeurs de n .



1. Soit $r \in]0, 1[$. Montrez que $\sum x^n$ converge normalement sur $[-r, r]$.
2. Calculez $R_n(x)$, puis montrez que la convergence n'est pas uniforme sur $] -1, 1[$.
3. Expliquez pourquoi la somme est malgré tout continue sur $] -1, 1[$.
4. Plus généralement, soit $\sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$ et $0 < r < R$. Montrez la convergence normale sur $\overline{D}(0, r)$ en utilisant uniquement le lemme d'Abel.

Exercice 7 : Sommes obtenues par dérivation terme à terme

1. Justifiez que, pour $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.
2. Déduisez-en $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$ pour $x \in]-1, 1[$.

3. Calculez $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$.

Exercice 8 : Sommes obtenues par intégration terme à terme

On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

1. Déterminez le rayon de convergence de cette série entière.
2. Calculez $S'(x)$, puis exprimez $S(x)$ à l'aide du logarithme.
3. Déduisez-en la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1) 4^n}$.

Exercice 9 : Somme d'une série à coefficients rationnels

On considère $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$.

1. Déterminez le rayon de convergence et montrez que la série converge normalement sur $[-1, 1]$.
2. Décomposez $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ en éléments simples.
3. Calculez $S(x)$ pour $x \in]-1, 1[$, en distinguant $x = 0$.

4. Justifiez la continuité de S sur $[-1, 1]$, puis calculez $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$.

Exercice 10 : Somme à l'aide de la série exponentielle

1. Déterminez le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 1}{n!} x^n$.
2. Écrivez $n^2 + 1$ à l'aide de $n(n-1)$, n et 1 , puis calculez la somme de la série.
3. Déduisez-en $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{n!}$.

Exercice 11 : Série entière trigonométrique

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \notin \pi \mathbb{Z}$. On considère les séries $\sum \cos(n\theta) x^n$ et $\sum \sin(n\theta) x^n$, pour x réel.

1. Montrez que $(\cos(n\theta))$ ne tend pas vers 0 . Déduisez-en que le rayon de $\sum \cos(n\theta) x^n$ vaut 1 .
2. Calculez, pour $x \in]-1, 1[$, $C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\theta) x^n$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta) x^n$.
3. Calculez $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{2^n}$.

Exercice 12 : Développements par décomposition en éléments simples

Développez en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes, en précisant le rayon de

convergence obtenu.

1. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.
2. $g(x) = \ln(1 + x - 2x^2)$.
3. $h(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}$. Indication : multipliez numérateur et dénominateur par $1 - x$.

Exercice 13 : Développement en série entière de arcsinus

1. Montrez que, pour $|x| < 1$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$.
2. Déduisez-en le développement de $\arcsin$ sur $] -1, 1[$ et son rayon.
3. Écrivez $\frac{\pi}{6}$ comme somme d'une série numérique.
4. On admet que $\binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Montrez que le développement de $\arcsin$ reste vrai en $x = 1$ et écrivez $\frac{\pi}{2}$ comme somme d'une série.

Exercice 14 : Développement par une équation différentielle

On pose $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in]-1, 1[$.

1. Montrez que f est solution sur $] -1, 1[$ de l'équation $(1-x^2)y' - xy = 1$ et calculez $f(0)$.
2. On cherche une solution $y(x) = \sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$ avec $y(0) = 0$. Établissez une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_{n-1} .

3. Calculez a_n pour tout n et déterminez le rayon de la série obtenue.

4. Justifiez que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ sur $] -1, 1[$.

Exercice 15 : Une fonction de classe C infini non développable

On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

- Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(1/x) e^{-1/x^2}$ pour $x \neq 0$. Donnez une relation entre P_{n+1} et P_n .
- Montrez que, pour tout polynôme P , $P(1/x) e^{-1/x^2} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.
- Montrez par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$, pour tout n .
- Concluez que f n'est pas développable en série entière en 0 .

Exercice 16 : Critère de développabilité par Taylor

Soit $a > 0$ et f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -a, a[$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $|f^{(n)}(x)| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in] -a, a[$.

- Rappelez la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n en 0 .
- Montrez que f est développable en série entière sur $] -a, a[$.
- Déduisez-en les développements de $\cos$ et de $\sinh$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 : Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre

On considère l'équation $(E): 4x y'' + 2 y' - y = 0$.

1. Déterminez les solutions de (E) développables en série entière sur un intervalle $] -R, R[$, et précisez R .
2. Exprimez ces solutions à l'aide de fonctions usuelles sur $]0, +\infty[$.
3. Vérifiez que $y_2(x) = \operatorname{sh}\sqrt{x}$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$. Est-elle développable en série entière en 0 ?
4. Déduisez-en toutes les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 18 : Équation différentielle du premier ordre avec second membre

On pose $f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrez que f est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème $y' = 2xy + 1$, $y(0) = 0$.
2. Justifiez que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, puis que f est impaire.
3. Déterminez les coefficients du développement de f .

Exercice 19 : Problème : dénombrement des dérangements

Un dérangement de $\{1, \dots, n\}$ est une permutation sans point fixe. On note D_n leur nombre pour

$n \geq 1$, et on pose $D_0 = 1$.

1. Calculez D_1 , D_2 et D_3 .

2. En classant les permutations selon leur ensemble de points fixes, montrez que

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k \text{ pour tout } n \geq 0.$$

3. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$. Montrez que son rayon est au moins 1.

4. Montrez que $e^x f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in]-1, 1[$.

5. Déduisez-en que $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$, puis calculez D_4 et D_5 .

6. Déterminez la limite de $\frac{D_n}{n!}$, puis montrez que, pour $n \geq 1$, D_n est l'entier le plus proche de $\frac{n!}{e}$.

Exercice 20 : Problème : suite récurrente linéaire d'ordre deux

On définit (u_n) par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour $n \geq 0$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

1. Montrez que $0 \leq u_n \leq 2^n$ pour tout n . Déduisez-en que le rayon R de la série vérifie $R \geq \frac{1}{2}$.

2. Montrez que $(1 - x - x^2) f(x) = x$ pour $|x| < \frac{1}{2}$.

3. On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Vérifiez que $1 - x - x^2 = (1 - \varphi x)(1 - \psi x)$, puis décomposez f en éléments simples.

4. Déduisez-en une expression de u_n en fonction de n .

5. Déterminez exactement R .

Exercice 21 : Régularité d'une somme au bord du disque

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

1. Déterminez le rayon et montrez que f est définie et continue sur $[-1, 1]$.
2. Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ et que $f'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ pour $x \in] -1, 1[$ non nul.
3. Montrez que f n'est pas dérivable à gauche en 1 .
4. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculez $f(-1)$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [séries entières, cours de maths en L2](#)
- À maîtriser avant : [Suites et séries de fonctions](#)
- Chapitre précédent : [Suites et séries de fonctions](#)
- Chapitre suivant : [Intégrales dépendant d'un paramètre](#)
- Le même thème en maths spé : [séries entières, exercices de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)