

Séries entières

I. Définition des séries entières et lemme d'Abel

Une série entière généralise un polynôme : on autorise une infinité de coefficients. La question centrale est donc simple. Pour quelles valeurs de la variable la série converge-t-elle ? Ensuite, quelles propriétés possède sa somme ? Tout le chapitre repose sur un seul outil, le lemme d'Abel. En effet, la continuité, la dérivabilité et l'intégrabilité de la somme en découlent par convergence normale.

Définition :

Soit $(a_n)_n \geq 0$ une suite de nombres complexes. On appelle **série entière** de coefficients a_n la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, où la variable z décrit $\mathbb{C}$. Lorsque la série converge, sa **somme** est $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Par exemple, la série géométrique $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$, et sa somme vaut alors $\frac{1}{1-z}$. En revanche, la série $\sum n! z^n$ diverge pour tout $z \neq 0$, puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Lemme :

Lemme d'Abel. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors, pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Démonstration :

Soit M tel que $|a_n z_0^n| \leq M$ pour tout n . Si $|z| < |z_0|$, alors $z_0 \neq 0$ et on pose $q = |z|/|z_0| \in [0, 1[$. On a ainsi

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M q^n.$$

Or la série géométrique $\sum M q^n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |a_n z^n|$ converge donc.

Remarque :

L'hypothèse est faible : il suffit que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée. En particulier, c'est le cas dès que $\sum a_n z_0^n$ converge, car son terme général tend alors vers 0.

II. Rayon et disque de convergence

1. Définition du rayon

Le lemme d'Abel montre que l'ensemble des réels $r \geq 0$ tels que $(a_n r^n)$ soit bornée est un intervalle contenant 0. Sa borne supérieure joue donc un rôle décisif.

Définition :

Le **rayon de convergence** de $\sum a_n z^n$ est l'élément de $[0, +\infty]$ défini par

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n \geq 0} \text{ est bornée} \right\}.$$

Le **disque ouvert de convergence** est $D(0, R) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < R \right\}$. Pour une variable réelle, on parle d'intervalle ouvert de convergence $] -R, R[$.

Théorème :

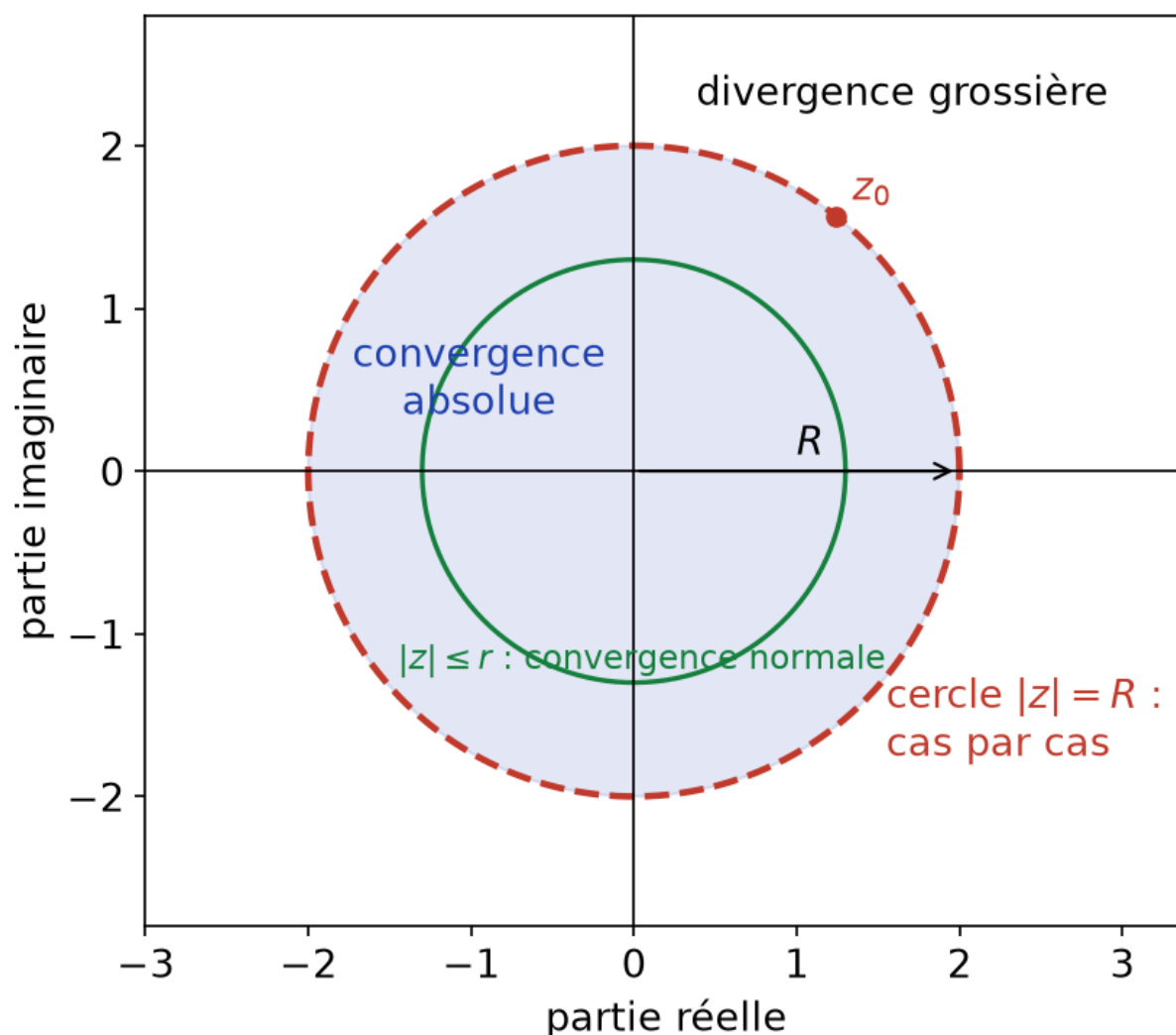
Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

- Si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée ; la série diverge alors grossièrement.

Démonstration :

D'abord, si $|z| < R$, on choisit r avec $|z| < r < R$ et $(a_n r^n)$ bornée, ce qui est possible par définition de la borne supérieure. Le lemme d'Abel appliqué à $z_0 = r$ donne la convergence absolue. Ensuite, si $|z| > R$, le réel $|z|$ n'appartient pas à l'ensemble définissant R . Par conséquent, $(a_n z^n)$ n'est pas bornée et ne tend pas vers 0.

Sur le cercle $|z| = R$, en revanche, tout peut arriver. La figure ci-dessous résume la situation : convergence absolue à l'intérieur, divergence grossière à l'extérieur, étude au cas par cas sur le bord.



Exemple :

Les trois séries $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$ ont toutes pour rayon 1. Pourtant, sur le cercle unité, la première diverge partout. La deuxième diverge en $z = 1$ mais converge en $z = -1$. Enfin, la troisième converge absolument en tout point du cercle, car $\left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$.

2. Règle de d'Alembert pour le rayon

Proposition :

Règle de d'Alembert. Supposons $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow \ell \in [0, +\infty]$. Alors $R = \frac{1}{\ell}$, avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Démonstration :

Soit $z \neq 0$. On applique la règle de d'Alembert des séries numériques à $u_n = |a_n z^n|$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| \longrightarrow \ell |z|.$$

Si $\ell |z| < 1$, la série converge absolument, donc $R \geq |z|$. Si $\ell |z| > 1$, la suite (u_n) croît à partir d'un certain rang et ne tend pas vers 0, donc $R \leq |z|$. Ainsi $R = 1/\ell$.

Méthode :

Pour déterminer un rayon de convergence :

- si le quotient $\left| a_{n+1}/a_n \right|$ a une limite simple, on applique la règle de d'Alembert ;
- si la série est lacunaire (par exemple $\sum a_n z^{2n}$), on applique d'Alembert au terme général complet $u_n(z)$, et non aux coefficients ;
- sinon, on encadre R : un point z_0 où $(a_n z_0^n)$ est bornée donne $R \geq |z_0|$, un point

où la série diverge donne $R \leq |z_0|$;

- on compare enfin aux séries connues : si $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$; si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Exemple :

Pour $\sum \frac{z^n}{n!}$, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, donc $R = +\infty$. Pour $\sum \frac{z^{2n}}{4^n}$, les coefficients d'indice impair sont nuls. On étudie donc $u_n(z) = \frac{z^{2n}}{4^n}$: le quotient $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|z|^2}{4}$ est strictement inférieur à 1 si et seulement si $|z| < 2$. Par conséquent, $R = 2$.

Proposition :

Les séries $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} z^n$ ont le même rayon de convergence.

Démonstration :

Notons R et R' les rayons de $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$. Comme $|a_n| \leq n |a_n|$ pour $n \geq 1$, on a $R \geq R'$. Réciproquement, soit $0 < r < \rho < R$. La suite $(a_n \rho^n)$ est bornée par un réel M . Alors $n |a_n| r^n \leq M n (r/\rho)^n$, qui tend vers 0 par croissances comparées. Ainsi $R' \geq r$ pour tout $r < R$, donc $R' \geq R$. Le troisième cas s'en déduit, car $\sum a_n z^n$ s'obtient à partir de $\sum \frac{a_n}{n+1} z^n$ en multipliant les coefficients par $n+1$.

III. Opérations sur les séries entières

Les séries entières se combinent comme les polynômes. Cependant, il faut toujours préciser le rayon du résultat.

Propriété :

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons R_a et R_b .

- **Somme** : le rayon R de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$, avec égalité si $R_a \neq R_b$. De plus, pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, la somme est $\sum a_n z^n + \sum b_n z^n$.
- **Produit de Cauchy** : on pose $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Le rayon de $\sum c_n z^n$ est au moins $\min(R_a, R_b)$, et pour $|z| < \min(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Démonstration :

Pour la somme, si $|z| < \min(R_a, R_b)$, les deux séries convergent, donc leur somme aussi. Supposons ensuite $R_a < R_b$ et prenons $R_a < |z| < R_b$. Si $\sum (a_n + b_n) z^n$ convergeait, alors $\sum a_n z^n$ convergerait aussi, par différence : c'est absurde. Pour le produit, les deux séries convergent absolument lorsque $|z| < \min(R_a, R_b)$. Le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes s'applique donc.

Exemple :

Le produit de Cauchy de $\sum z^n$ par elle-même a pour coefficients $c_n = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$.

Ainsi, pour $|z| < 1$, on obtient $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$.

Attention :

Si $R_a = R_b$, le rayon de la somme peut être strictement plus grand. Par exemple, $\sum z^n$ et $\sum (-1)^n z^n$ ont pour rayon 1, mais leur somme est la série nulle, de rayon $+\infty$.

IV. Convergence normale et continuité de la somme

Voici le cœur du chapitre. La convergence d'une série entière n'est pas uniforme sur tout le disque ouvert, en général. En revanche, elle est normale sur tout disque fermé strictement plus petit.

Théorème :

Soit $\sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$ et soit $0 \leq r < R$. La série converge **normalement** sur le disque fermé $\overline{D}(0, r)$. Par conséquent, elle converge normalement sur tout compact inclus dans $D(0, R)$.

Démonstration :

Pour $|z| \leq r$, on a $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$. Or $r < R$, donc la série numérique $\sum |a_n| r^n$ converge, d'après le théorème du paragraphe II. C'est exactement la convergence normale sur $\overline{D}(0, r)$. Enfin, un compact K de $D(0, R)$ est fermé et borné. La fonction continue

$z \rightarrow |z|$ atteint donc sur K un maximum $r < R$. Ainsi $K \subset \overline{D}(0, r)$.

Corollaire :

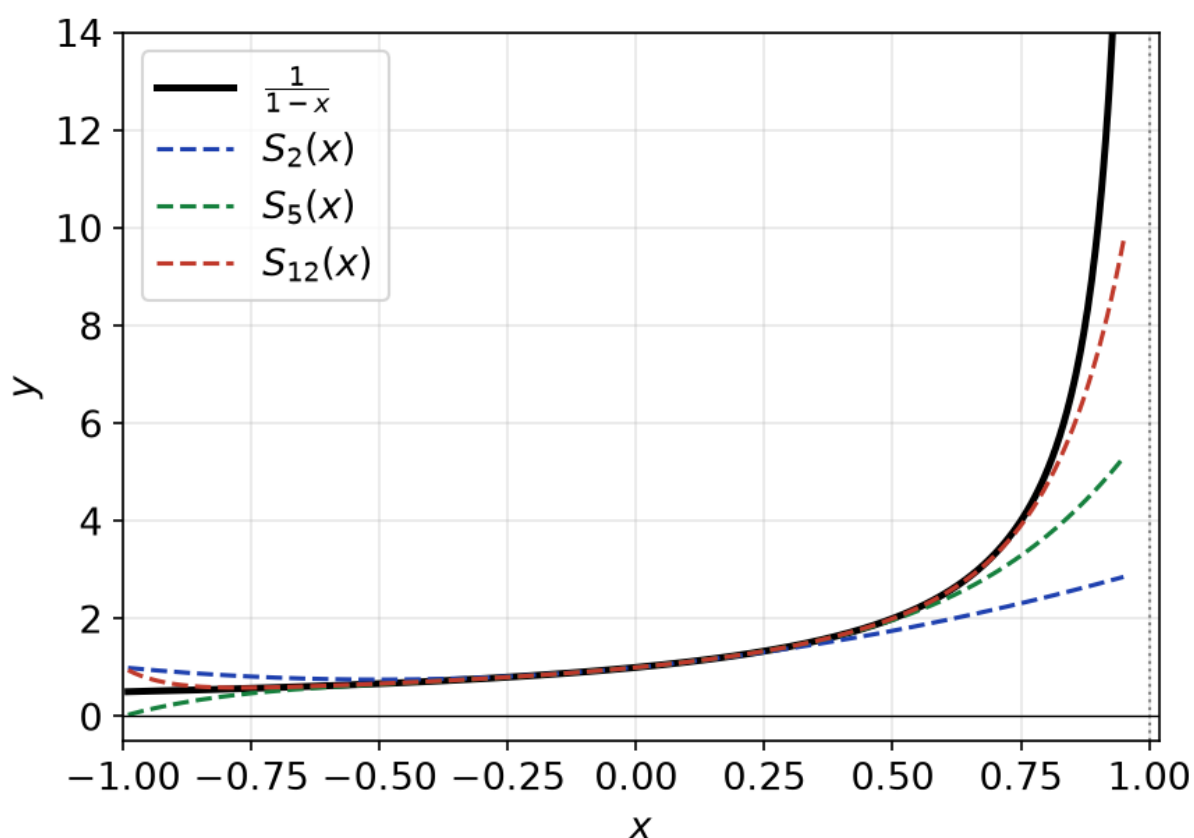
La somme f d'une série entière de rayon $R > 0$ est **continue** sur le disque ouvert $D(0, R)$.

Démonstration :

Soit z_0 avec $|z_0| < R$. On choisit r tel que $|z_0| < r < R$. Chaque fonction $z \rightarrow a_n z^n$ est continue. Or la série converge normalement, donc uniformément, sur $\overline{D}(0, r)$. D'après le théorème de continuité d'une somme uniformément convergente, f est continue sur $\overline{D}(0, r)$, qui est un voisinage de z_0 . Ainsi f est continue en z_0 .

La figure suivante illustre ce phénomène pour la série géométrique. Les sommes partielles

$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ collent à $\frac{1}{1-x}$ sur tout segment $[-r, r]$. Cependant, elles s'en écartent toujours au voisinage de 1.



Remarque :

Pour la série géométrique, le reste vaut $\frac{x^{n+1}}{1-x}$. Il n'est pas borné sur $] -1, 1[$, donc la convergence n'est pas uniforme sur tout l'intervalle ouvert. C'est pourquoi on raisonne toujours sur un segment $[-r, r]$ avec $r < R$, puis on conclut point par point.

Remarque :

Lorsque la série $\sum |a_n| R^n$ converge, la convergence est normale sur le disque fermé $\overline{D}(0, R)$ tout entier. Dans ce cas, la somme est continue jusqu'au bord. C'est par exemple le cas de $\sum \frac{z^n}{n^2}$.

V. Dérivation et intégration terme à terme

Dans cette partie, la variable x est réelle et la série $\sum a_n x^n$ a un rayon $R > 0$. On note f sa somme sur $] -R, R[$.

Théorème :

Intégration terme à terme. La fonction f admet sur $] -R, R[$ la primitive nulle en 0 suivante :

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

et cette série entière a encore pour rayon R .

Démonstration :

Soit $x \in] -R, R[$. Le segment d'extrémités 0 et x est inclus dans $[-|x|, |x|]$, sur lequel la série converge normalement. D'après le théorème d'intégration d'une série uniformément convergente sur un segment, on peut intervertir somme et intégrale. Par ailleurs, le rayon est conservé d'après la proposition du paragraphe II.

Théorème :

Dérivation terme à terme. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$, et ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

En particulier, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout n .

Démonstration :

La série dérivée $\sum n a_n x^{n-1}$ a pour rayon R . Elle converge donc normalement sur tout segment $[-r, r]$ avec $r < R$. De plus, la série $\sum a_n x^n$ converge en 0 . Le théorème de dérivation des séries de fonctions s'applique donc sur $[-r, r]$: f y est de classe $\mathcal{C}^1$ et f' est la somme de la série dérivée. Comme r est arbitraire, cela vaut sur $] -R, R[$. Enfin, une récurrence sur k donne la classe $\mathcal{C}^\infty$. En évaluant $f^{(n)}$ en 0 , seul le terme d'indice n subsiste, ce qui donne $f^{(n)}(0) = n! a_n$.

Corollaire :

Unicité des coefficients. Si $\sum a_n x^n = \sum b_n x^n$ pour tout x d'un intervalle $] -r, r[$ avec $r > 0$, alors $a_n = b_n$ pour tout n .

Exemple :

Pour $|x| < 1$, on a $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$. En intégrant terme à terme, on obtient $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. De même, $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ donne $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$. Ces deux développements ont pour rayon 1 .

Méthode :

Pour calculer la somme d'une série entière :

- on détermine d'abord le rayon R ;
- on reconnaît une série usuelle, éventuellement après décomposition des coefficients (par exemple $n^2 = n(n-1) + n$, ou une décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$) ;
- on fait apparaître des facteurs n par dérivation, via $x f'(x) = \sum n a_n x^n$, et des facteurs $\frac{1}{n+1}$ par intégration ;
- enfin, on précise l'ensemble de validité et on traite à part les valeurs particulières, comme $x = 0$.

VI. Fonctions développables en série entière

1. Série de Taylor

Définition :

Une fonction f définie au voisinage de 0 est **développable en série entière** (DSE) sur $]-r, r[$, avec $r > 0$, s'il existe une série entière de rayon au moins r telle que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ pour tout } x \in]-r, r[.$$

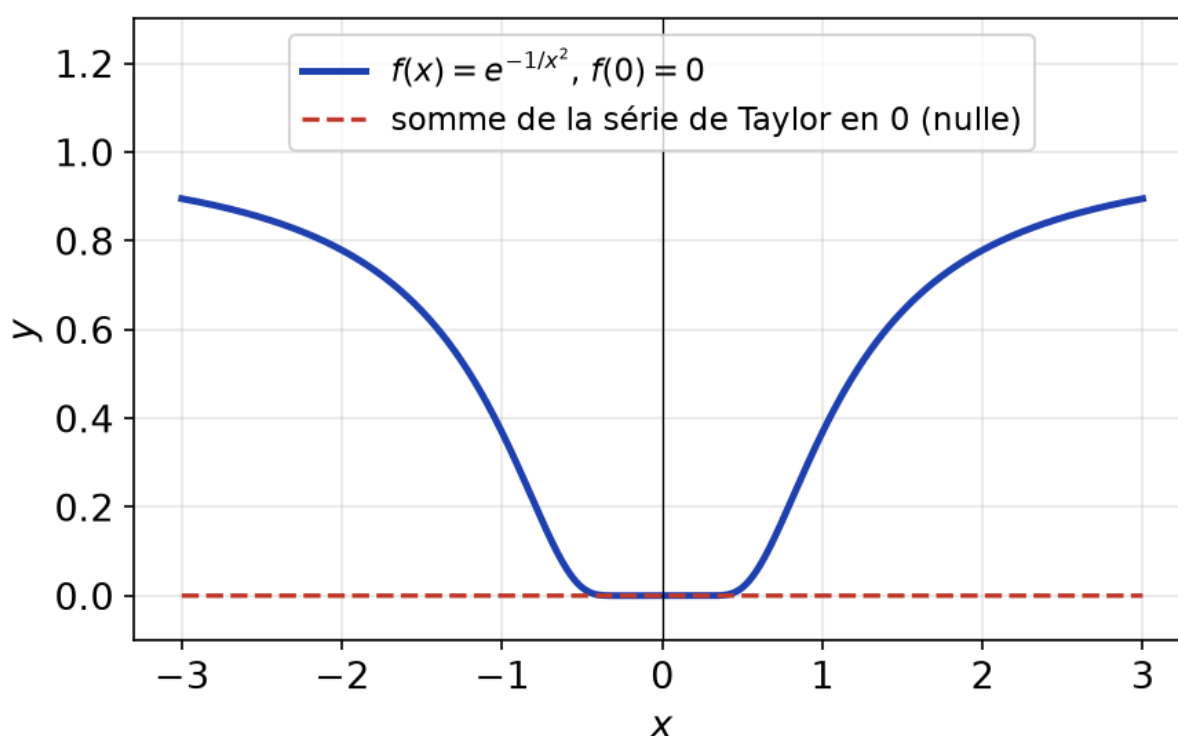
Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 , sa **série de Taylor** en 0 est $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

D'après le paragraphe V, une fonction DSE est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et son développement est nécessairement sa série de Taylor. Toutefois, la réciproque est fautive, comme le montre l'exemple suivant.

Attention :

La fonction f définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et toutes ses dérivées sont nulles en 0 . Sa série de Taylor est donc nulle. Or $f(x) > 0$ pour $x \neq 0$: ainsi, f n'est pas DSE en 0 .

La figure ci-dessous montre cette fonction extrêmement plate en 0 , à côté de la somme nulle de sa série de Taylor.



Théorème :

Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -r, r[$. Alors f est DSE sur $] -r, r[$ si et seulement si, pour tout

$x \in]-r, r[$, le reste de Taylor tend vers 0 :

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

C'est notamment le cas s'il existe M tel que $|f^{(n)}(t)| \leq M$ pour tout n et tout $t \in]-r, r[$.

Démonstration :

L'équivalence traduit la définition : la série de Taylor converge vers $f(x)$ si et seulement si $R_n(x) \rightarrow 0$. Sous l'hypothèse de majoration, on obtient

$|R_n(x)| \leq M \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} dt \right| = \frac{M |x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Ce majorant tend vers 0 par croissances comparées.

2. Développements usuels

Propriété :

Les développements suivants sont valables sur $\mathbb{R}$ (rayon infini) :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

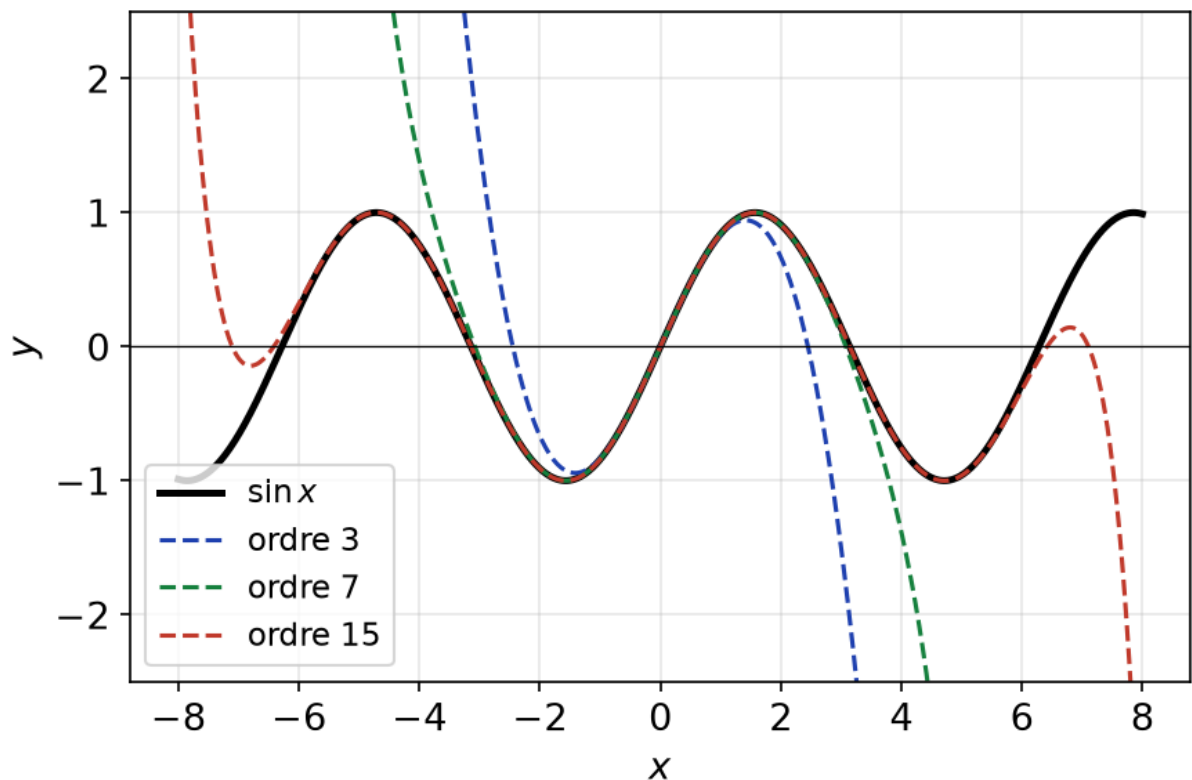
$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Les suivants sont valables sur $] -1, 1[$ (rayon 1, sauf si $\alpha \in \mathbb{N}$) :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Pour l'exponentielle, les fonctions trigonométriques et hyperboliques, le théorème précédent s'applique directement. En effet, sur $] -r, r[$, toutes les dérivées de $\sin$ et $\cos$ sont bornées par 1, et celles de e^x par e^r . La figure ci-dessous montre les sommes partielles de la série du sinus : elles approchent $\sin$ sur un intervalle de plus en plus grand.



Démonstration :

Établissons le développement de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}$. On pose $c_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$, de sorte que $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\alpha-n}{n+1} \rightarrow -1$. Le rayon de $S(x) = \sum c_n x^n$ vaut donc 1. De plus, $(n+1)c_{n+1} + nc_n = \alpha c_n$. Par dérivation terme à terme, on en déduit $(1+x)S'(x) = \alpha S(x)$ sur $] -1, 1[$, avec $S(0) = 1$. Or $g(x) = (1+x)^\alpha$ vérifie le même problème de Cauchy. Ensuite, $(S(x)(1+x)^{-\alpha})' = 0$, donc $S(x) = (1+x)^\alpha$.

Méthode :

Pour développer une fonction en série entière, on privilégie dans l'ordre :

- les **opérations** sur les développements usuels : somme, produit, décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle ;

- la **dérivation ou l'intégration** : on développe f' , puis on intègre terme à terme (cas de $\ln$, $\arctan$, $\arcsin$);
- une **équation différentielle** vérifiée par f (voir la partie suivante);
- en dernier recours, la majoration du reste de Taylor.

VII. Résolution d'équations différentielles par séries entières

Pour une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux, on cherche des solutions sous la forme $y(x) = \sum a_n x^n$. L'équation se traduit alors par une relation de récurrence entre les coefficients.

Méthode :

- On suppose $y(x) = \sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$, puis on calcule y' et y'' terme à terme.
- On reporte dans l'équation, on réindexe pour faire apparaître x^n partout, puis on identifie les coefficients grâce à l'unicité.
- On résout la récurrence obtenue, en tenant compte des conditions initiales.
- Réciproquement, on vérifie que la série trouvée a un rayon $R > 0$: c'est indispensable, car les calculs précédents la supposaient convergente.
- Enfin, on reconnaît si possible une fonction usuelle et on conclut par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

Exemple :

Cherchons la solution de $y'' + x y' + y = 0$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Avec $y = \sum a_n x^n$, on obtient

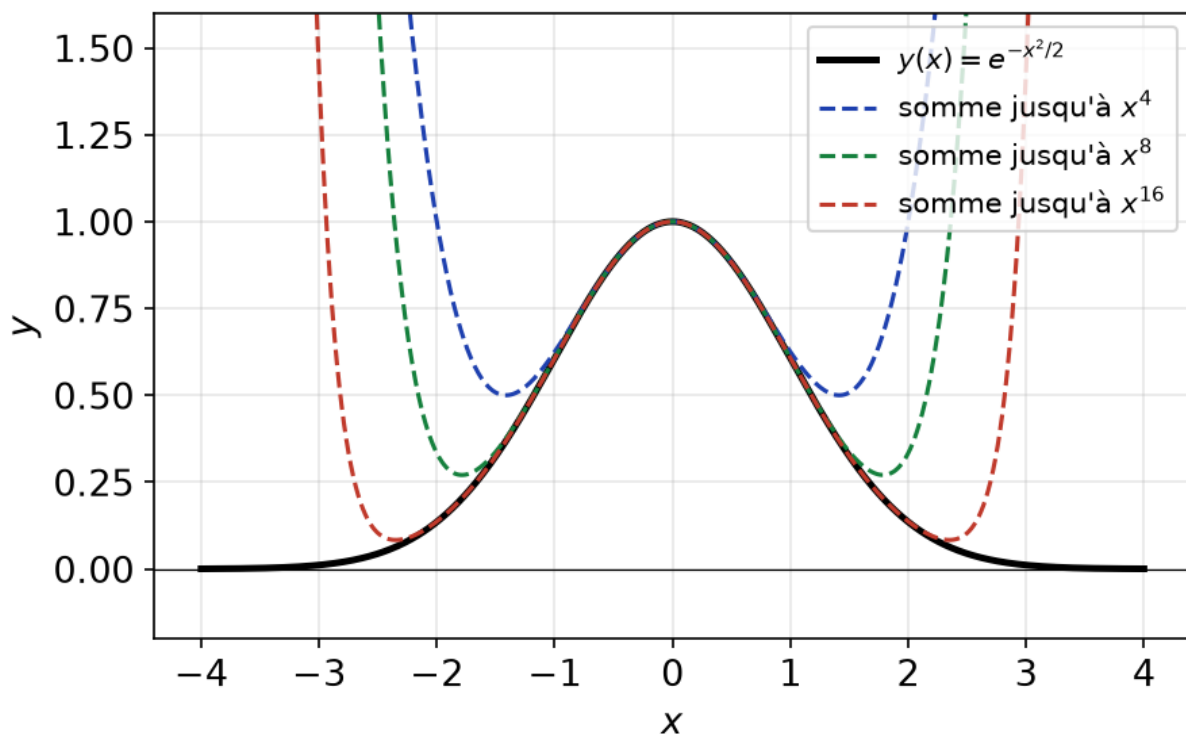
$$y'' + x y' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n \right] x^n.$$

Par unicité des coefficients, $a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$. Ainsi $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ donnent

$a_{2k+1} = 0$ et $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^k k!}$. Cette série a un rayon infini, et sa somme vaut

$\sum \frac{(-x^2/2)^k}{k!} = e^{-x^2/2}$. Réciproquement, cette fonction est solution du problème de Cauchy, qui possède une unique solution : c'est donc la solution cherchée.

Comme le montre la figure ci-dessous, les sommes partielles de cette série approchent $e^{-x^2/2}$ de mieux en mieux, sur un intervalle de plus en plus large.



Remarque :

Toutes les solutions ne sont pas développables en série entière. Par exemple, l'équation $4x y'' + 2y' - y = 0$ admet sur $]0, +\infty[$ la solution $\sinh\sqrt{x}$, qui n'est pas dérivable en 0 . La méthode fournit alors seulement une partie des solutions.

Ce qu'il faut retenir

- Le lemme d'Abel : si $(a_n z_0^n)$ est bornée, la série converge absolument pour $|z| < |z_0|$.
- Le rayon R sépare la convergence absolue ($|z| < R$) de la divergence grossière ($|z| > R$) ; sur le cercle, on étudie au cas par cas.
- La règle de d'Alembert donne $R = 1/\ell$; pour une série lacunaire, on l'applique au terme général complet.
- Somme : rayon au moins $\min(R_a, R_b)$, égal si $R_a \neq R_b$. Produit de Cauchy : rayon au moins $\min(R_a, R_b)$.
- La convergence est normale sur tout disque fermé $\overline{D}(0, r)$ avec $r < R$, donc sur tout compact du disque ouvert.
- Par conséquent, la somme est continue sur le disque ouvert, et $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ en variable réelle.
- On dérive et on intègre terme à terme sans changer le rayon ; de plus, $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.
- Une fonction DSE est égale à sa série de Taylor, mais une fonction $\mathcal{C}^\infty$ n'est pas toujours DSE.
- Les développements usuels (exponentielle, trigonométriques, $\ln(1+x)$, $\arctan$, $(1+x)^\alpha$) sont à connaître avec leur rayon.
- Pour une équation différentielle, on obtient une récurrence sur les coefficients, puis on vérifie que le rayon est non nul.

Questions fréquentes sur séries entières

Quelle différence entre le rayon de convergence et le domaine de convergence ?

Le rayon R donne le disque ouvert où la série converge absolument, et l'extérieur où elle diverge grossièrement. Le domaine de convergence contient ce disque ouvert, plus éventuellement certains points du cercle $|z| = R$. Ces points s'étudient un par un, sans théorème général.

Pourquoi ne peut-on pas toujours utiliser la règle de d'Alembert ?

Elle exige que le quotient $|a_{n+1}/a_n|$ ait une limite. Pour une série lacunaire ou à coefficients oscillants, ce n'est pas le cas. On encadre alors le rayon avec le lemme d'Abel, ou on applique d'Alembert au terme général complet.

Une fonction de classe C infini est-elle toujours développable en série entière ?

Non. La fonction égale à e^{-1/x^2} pour $x \neq 0$ et à 0 en 0 est de classe C^∞ , mais sa série de Taylor est nulle. Pour conclure, il faut montrer que le reste de Taylor tend vers 0 .

La somme d'une série entière est-elle continue sur le cercle de convergence ?

Pas forcément, et elle n'y est parfois même pas définie. Si la série $\sum |a_n| R^n$ converge, la convergence est normale sur le disque fermé et la somme y est continue. Sinon, il faut un argument spécifique, comme le critère des séries alternées.

Pour aller plus loin en L2

- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur séries entières](#)
- À maîtriser avant : [Suites et séries de fonctions](#)
- Chapitre précédent : [Suites et séries de fonctions](#)
- Chapitre suivant : [Intégrales dépendant d'un paramètre](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)

- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)