

Séries entières

Corrigé de l'exercice 1 : Rayons par la règle de d'Alembert

1. Posons $a_n = \frac{n^2}{3^n}$, non nul pour $n \geq 1$. On a

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \left[n \rightarrow +\infty \right] \frac{1}{3}.$$

D'après la règle de d'Alembert, **le rayon vaut** $R = 3$. On pouvait aussi remarquer que $\sum n^2 a_n z^n$ a le même rayon que $\sum (z/3)^n$.

2. Ici $a_n = \frac{n!}{n^n} > 0$. Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Or $n \ln(1 + 1/n) \rightarrow 1$, donc ce rapport tend vers e^{-1} . Par conséquent, $R = e$.

3. Avec $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, on obtient

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \left[n \rightarrow +\infty \right] 4.$$

Ainsi, $R = \frac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 2 : Séries entières lacunaires

1. Fixons $z \neq 0$ et posons $u_n = \frac{|z|^{2n}}{4^n}$. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|^2}{4}$ est constant. D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série converge absolument si $|z| < 2$. De plus, elle diverge grossièrement si $|z| > 2$, car alors $u_n \rightarrow +\infty$. Donc $R = 2$. Pour $|z| < 2$, c'est une série géométrique de raison $z^2/4$, d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{4^n} = \frac{1}{1 - z^2/4} = \boxed{\frac{4}{4 - z^2}}.$$

La somme vaut $\frac{4}{4 - z^2}$.

2. Fixons $z \neq 0$ et posons $u_n = n 2^n |z|^{3n}$ pour $n \geq 1$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} \cdot 2|z|^3 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2|z|^3.$$

La série converge donc si $2|z|^3 < 1$ et diverge grossièrement si $2|z|^3 > 1$. Autrement dit, $R = 2^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Corrigé de l'exercice 3 : Rayons par comparaison

- On a $\sin(1/n) \sim 1/n$. Les deux séries $\sum \sin(1/n) z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n}$ ont donc le même rayon. Or $\sum \frac{z^n}{n}$ a le même rayon que $\sum z^n$, c'est-à-dire 1. Finalement, $R = 1$.
- D'abord, $0 \leq a_n \leq 3^n$, donc $R \geq \frac{1}{3}$ par comparaison avec $\sum 3^n z^n$. Ensuite, en $z = \frac{1}{3}$, on a $a_{2p} z^{2p} = \frac{3^{2p}}{3^{2p}} = 1$. Le terme général ne tend pas vers 0, donc la série diverge en un point de module $\frac{1}{3}$: $R \leq \frac{1}{3}$. Par conséquent, $R = \frac{1}{3}$. Notons que d'Alembert échoue ici, car a_{n+1}/a_n n'a pas de limite.
- Tout entier $n \geq 1$ a au moins un diviseur, et ses diviseurs sont dans $\{1, \dots, n\}$. Ainsi $1 \leq d(n) \leq n$. D'une part, $d(n) = O(n)$, donc $R \geq 1$, rayon de $\sum n z^n$. D'autre part, $1 = O(d(n))$, donc $R \leq 1$, rayon de $\sum z^n$. En conclusion, $R = 1$.
- Comme $2^{-n} \rightarrow 0$, on a $\ln(1 + 2^{-n}) \sim 2^{-n}$. Or $\sum \frac{z^n}{2^n}$ a pour rayon 2. Par équivalence, $R = 2$.

Point de méthode : un encadrement de a_n entre deux suites de même rayon suffit toujours ; c'est la méthode la plus robuste quand les coefficients oscillent.

Corrigé de l'exercice 4 : Lemme d'Abel et rayon de convergence

1. La série $\sum a_n$ converge, donc $a_n \rightarrow 0$. En particulier, la suite $(a_n \cdot 1^n)$ est bornée, donc $R \geq 1$ par définition du rayon. Supposons par l'absurde $R > 1$. Alors 1 est dans le disque ouvert de convergence, où la convergence est absolue. Ainsi $\sum |a_n|$ convergerait, ce qui est exclu. Donc $R = 1$.
2. La suite (a_n) est bornée, donc $R \geq 1$ comme précédemment. Si l'on avait $R > 1$, la série convergerait en $z = 1$, donc $a_n \rightarrow 0$. C'est contraire à l'hypothèse. Par conséquent, $R = 1$.
3. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le critère des séries alternées, car $1/\sqrt{n}$ décroît vers 0 . En revanche, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann d'exposant $1/2$). D'après la question 1, **le rayon de** $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} z^n$ **vaut** 1 . De même, $(\cos n)$ est bornée et ne tend pas vers 0 . D'après la question 2, **le rayon de** $\sum \cos(n) z^n$ **vaut** 1 .

Corrigé de l'exercice 5 : Produit de Cauchy et rayon d'une somme

1. La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ a un rayon infini, et $\sum x^n$ a pour rayon 1 . Pour $|x| < 1$, les deux convergent absolument. Leur produit de Cauchy a pour coefficients

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot 1 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

D'après le théorème sur le produit de Cauchy, pour $|x| < 1$, $\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) x^n$.

2. Le théorème donne seulement $R \geq 1$. Cependant, $c_n \rightarrow e$, qui est non nul, donc $c_n \sim e$.

Par comparaison avec $\sum e z^n$, le rayon est celui de la série géométrique. Ainsi, $R = 1$. Ce résultat est cohérent avec la divergence de $\frac{e^x}{1-x}$ en 1.

3. La série $\sum z^n$ a pour rayon 1 et $\sum 2^n z^n$ a pour rayon $\frac{1}{2}$. Ces rayons sont distincts, donc le rayon de la somme est leur minimum : $R = \frac{1}{2}$ pour $\sum (1 + 2^n) z^n$. Pour la seconde série, les deux rayons valent $\frac{1}{2}$: le cours donne seulement $R \geq \frac{1}{2}$. Calculons donc les coefficients. Ils valent 2^{n+1} si n est pair et 0 sinon. La série s'écrit $\sum_p 2 (4z^2)^p$. Elle converge si et seulement si $|4z^2| < 1$. Par conséquent, **son rayon vaut aussi $\frac{1}{2}$** .

Corrigé de l'exercice 6 : Somme de la série des $n^2 x^n$

1. La série $\sum n^2 x^n$ a le même rayon que $\sum x^n$, d'après le résultat sur $\sum n^\alpha a_n x^n$. Donc $R = 1$.

2. Pour $x \in]-1, 1[$, on dérive terme à terme la série géométrique : $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

En multipliant par x , on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$. On dérive de nouveau, ce qui est permis sur $] -1, 1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Enfin, on multiplie par x . **Pour $|x| < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ et**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

3. Comme $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, on remplace x par $\frac{1}{2}$: $\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$. Ainsi, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$.

Corrigé de l'exercice 7 : Somme avec l'exponentielle

1. Posons $a_n = \frac{n^2+1}{n!} > 0$. Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 + 1}{(n^2 + 1)(n+1)} \sim \frac{n^2}{n^3} \rightarrow 0.$$

D'après la règle de d'Alembert, **le rayon est infini**.

2. On a bien $n(n-1) + n + 1 = n^2 + 1$. Toutes les séries écrites ci-dessous ont un rayon infini, donc on peut les séparer. D'une part,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} = x^2 e^x.$$

D'autre part, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n = x e^x$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. Par conséquent,

$$S(x) = (x^2 + x + 1) e^x \text{ pour tout réel } x.$$

3. En $x = 1$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!} = 3e$.

Corrigé de l'exercice 8 : Éléments simples et logarithme

1. On cherche A et B tels que $\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{2-x}$. En multipliant par $1-x$ puis en faisant $x = 1$, on trouve $A = 1$. De même, $B = \frac{1}{1-2} = -1$. Ensuite, pour $|x| < 2$,

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}.$$

Donc, pour $|x| < 1$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$, de rayon $R = 1$, car les rayons 1 et 2 sont distincts.

2. On vérifie que $(1-x)(1+2x) = 1 + 2x - x - 2x^2 = 1 + x - 2x^2$. Pour $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, les deux facteurs sont strictement positifs, donc $g(x) = \ln(1-x) + \ln(1+2x)$. Or $\ln(1-x) = -\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ pour $|x| < 1$. De plus, $\ln(1+2x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n} x^n$ pour $|2x| < 1$. Ainsi, **pour** $|x| < \frac{1}{2}$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n - 1}{n} x^n$, **avec un rayon** $R = \frac{1}{2}$ (rayons 1 et $\frac{1}{2}$ distincts).

Corrigé de l'exercice 9 : Fonctions circulaires et hyperboliques

1. On linéarise : $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Or $\cos 2x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!}$ pour tout réel x . Le terme d'indice 0 vaut 1 et se simplifie. Donc $\sin^2 x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, **de rayon infini**. Pour $n = 1$, on retrouve bien $\sin^2 x \sim x^2$.
2. On a $e^{(1+i)x} + e^{(-1+i)x} = (e^x + e^{-x}) e^{ix} = 2 \operatorname{ch} x e^{ix}$. Comme $\operatorname{ch} x$ est réel, **la partie réelle de la demi-somme vaut** $\operatorname{ch} x \cos x$.
3. Par le développement de l'exponentielle complexe,

$$e^{(1+i)x} + e^{(-1+i)x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n + (i-1)^n}{n!} x^n.$$

Or $(i-1)^n = (-1)^n (1-i)^n = (-1)^n \overline{(1+i)^n}$. Pour x réel, la partie réelle d'une série convergente est la série des parties réelles. Le coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ dans $\cos x \operatorname{ch} x$ vaut donc $\frac{1 + (-1)^n}{2} \operatorname{Re}((1+i)^n)$. Il est nul pour n impair. Pour $n = 2p$, $(1+i)^{2p} = (2i)^p$, dont la partie réelle est nulle si p est impair. Enfin, pour $p = 2q$, $(2i)^{2q} = (-4)^q$. Par conséquent, $\cos x \operatorname{ch} x = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-4)^q}{(4q)!} x^{4q}$ **pour tout réel** x .

4. On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. Le coefficient de x^2 du produit vaut 0. Celui de x^4 vaut $\frac{1}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{6}$. De son côté, la formule donne $\frac{-4}{4!} = -\frac{1}{6}$. **Les deux calculs concordent.**

Corrigé de l'exercice 10 : Somme de la série des $x^{3n}/(3n)!$

- À $x \neq 0$ fixé, posons $u_n = \frac{|x|^{3n}}{(3n)!}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \rightarrow 0$. La série converge donc pour tout x : **le rayon est infini**.
- Si $k = 3m$, alors $j^k = (j^3)^m = 1$, et la somme vaut 3. Sinon, $\omega = j^k$ vérifie $\omega \neq 1$ et $\omega^3 = 1$. Ainsi, $1 + \omega + \omega^2 = \frac{1 - \omega^3}{1 - \omega} = 0$. **La somme vaut donc 3 ou 0 selon que 3 divise k ou non.**
- Les trois séries exponentielles ont un rayon infini, donc

$$e^x + e^{jx} + e^{j^2x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 + j^k + j^{2k}) \frac{x^k}{k!} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

De plus, $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = \bar{j}$. Pour x réel,
 $e^{jx} + e^{\bar{j}x} = 2 \operatorname{Re}(e^{jx}) = 2 e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. Finalement,
 $S(x) = \frac{1}{3} \left(e^x + 2 e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right).$

- On dérive trois fois terme à terme, ce qui est légitime car le rayon est infini. Le terme constant disparaît, et

$$S'''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^{3m}}{(3m)!} = S(x).$$

Donc S est solution de $y''' = y$, avec $S(0) = 1$ et $S'(0) = S''(0) = 0$.

Corrigé de l'exercice 11 : Développements par dérivation

- Posons $u(x) = \frac{1+x}{1-x}$, dérivable sur $] -1, 1[$ avec $u'(x) = \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$.
Ensuite, $1 + u^2 = \frac{(1-x)^2 + (1+x)^2}{(1-x)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x)^2}$. Ainsi $f'(x) = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{1}{1+x^2}$. Or,
pour $|x| < 1$, $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$. On intègre terme à terme de 0 à x , avec

$f(0) = \text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{4}$. Pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, de rayon 1. Autrement dit, $f(x) = \frac{\pi}{4} + \text{Arctan } x$ sur cet intervalle.

2. On calcule

$$g'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} (x + \sqrt{1+x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Appliquons la série du binôme avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $u = x^2$, valable pour $|x| < 1$. Le coefficient de u^n vaut

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \dots (-\frac{2n-1}{2})}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2},$$

car $1 \cdot 3 \dots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$. Comme $g(0) = \ln 1 = 0$, l'intégration terme à terme donne

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \text{ pour } |x| < 1, \text{ soit } g(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \dots$$

Corrigé de l'exercice 12 : Série du binôme et coefficients binomiaux centraux

1. La série du binôme d'exposant $-\frac{1}{2}$ s'applique à $u = -4x$ lorsque $|u| < 1$, c'est-à-dire $|x| < \frac{1}{4}$. D'après le calcul de l'exercice précédent, le coefficient de u^n vaut $\frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2}$. En multipliant par $(-4)^n$, le coefficient de x^n vaut $\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$. **Donc**

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n \text{ pour } |x| < \frac{1}{4}, \text{ ce qui est cohérent avec le rayon } \frac{1}{4} \text{ trouvé à l'exercice 1.}$$

2. Comme $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$, on remplace x par $\frac{1}{8}$: $\frac{1}{\sqrt{1-1/2}} = \sqrt{2}$. Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8^n} \binom{2n}{n} = \sqrt{2}$.

3. Pour $|x| < \frac{1}{4}$, le produit de Cauchy de la série précédente par elle-même converge et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \right) x^n.$$

Par ailleurs, ce carré vaut $\frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^n x^n$. Les deux séries ont la même somme sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$. Par unicité des coefficients, $\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} 2^{n-2k} = 4^n$ pour tout n . Pour $n = 2$, on vérifie $6 + 2 \cdot 2 + 6 = 16$.

Corrigé de l'exercice 13 : Somme au bord et théorème d'Abel radial

1. On a $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, donc le rayon est celui de $\sum \frac{x^n}{n^2}$, soit $R = 1$. De plus, pour $|x| \leq 1$, $\left| \frac{x^n}{n(n+1)} \right| \leq \frac{1}{n(n+1)}$, terme général d'une série convergente. **La convergence est donc normale sur $[-1, 1]$** , et S y est continue.

2. Décomposons : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Pour $|x| < 1$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$. Ensuite, pour $x \neq 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{x^m}{m} = \frac{1}{x} (-\ln(1-x) - x).$$

Les deux séries convergent, donc on peut soustraire. Il vient

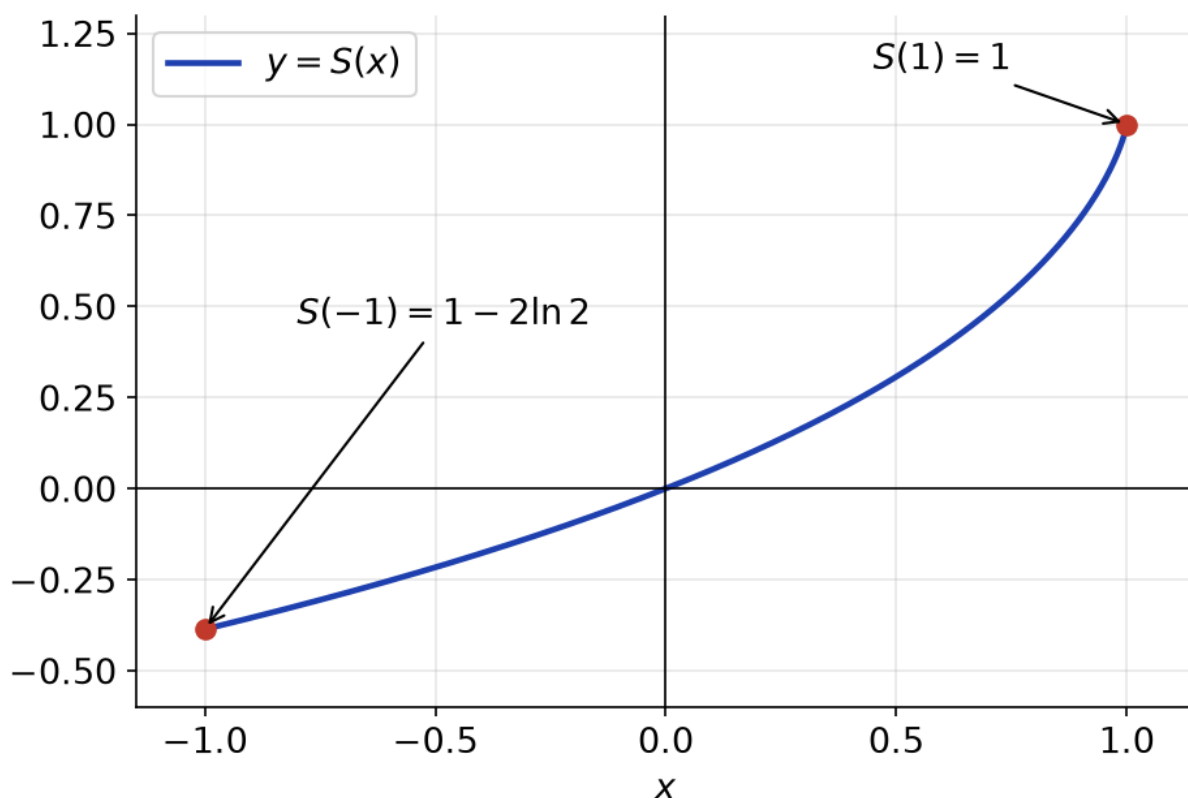
$$S(x) = -\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + 1. \text{ Pour } x \in]-1, 1[\setminus \{0\},$$

$$S(x) = 1 + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}, \text{ et } S(0) = 0.$$

3. Par continuité de S sur $[-1, 1]$, on passe à la limite. D'abord, $(1-x)\ln(1-x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 1^-$, par croissances comparées. Donc $S(1) = 1$. Ensuite, en $x \rightarrow -1^+$, $\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} \rightarrow \frac{2\ln 2}{-1}$. Donc $S(-1) = 1 - 2\ln 2$. Enfin, contrôle direct :

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1. \text{ Le résultat concorde.}$$

La figure ci-dessous représente S sur $[-1, 1]$. La courbe relie continûment les deux valeurs au bord, $1 - 2\ln 2 \approx -0,386$ et 1 , comme le prévoit la convergence normale.



Point de méthode : ici la convergence normale sur $[-1, 1]$ suffit ; le théorème d'Abel radial donnerait le même résultat, puisque la série converge en ± 1 .

Corrigé de l'exercice 14 : Calcul de $\pi/4$ et de $\ln 2$

1. Les suites $\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ et $\left(\frac{1}{n}\right)$ décroissent et tendent vers 0. D'après le critère des séries alternées, **les deux séries convergent.**

2. Pour $x \in]-1, 1[$, $\text{Arctan } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, de rayon 1. Cette série converge en $x = 1$. Le théorème d'Abel radial donne alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \text{Arctan } x$. Par continuité, **cette somme vaut** $\text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{4}$. De même, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ sur $] -1, 1[$, et la série converge en 1. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

3. Pour $|t| < 1$, $\frac{1}{1+t^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{3n}$. En intégrant terme à terme, pour $x \in]-1, 1[$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}.$$

La série converge en $x = 1$ par le critère des séries alternées. Par Abel radial et continuité de F , la somme cherchée vaut $F(1)$. Décomposons ensuite en éléments simples :

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right).$$

Entre 0 et 1, le premier terme donne $\ln 2$ et le deuxième $\ln 1 = 0$. Le troisième donne

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arctan} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right]_0^1 = \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$
 Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0,8356.$$

Corrigé de l'exercice 15 : Réciproque du théorème d'Abel

1. Prenons $a_n = (-1)^n$. Le rayon vaut 1 et, pour $|x| < 1$, la somme vaut $\frac{1}{1+x}$. Elle tend vers $\frac{1}{2}$ en 1^- . Pourtant, **la série** $\sum (-1)^n$ **diverge**, car son terme général ne tend pas vers 0.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$. Les termes étant positifs, $\sum_{n=0}^N a_n x^n \leq S(x) \leq M$. Le membre de gauche est un polynôme ; en faisant $x \rightarrow 1^-$, on obtient $\sum_{n=0}^N a_n \leq M$. Ainsi, les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum a_n$ sont majorées : elle converge. Notons A sa somme. Ensuite, la série entière converge en 1. Si $R = 1$, le théorème d'Abel radial donne $S(x) \rightarrow A$. Si $R > 1$, c'est la continuité de S en 1. **Dans tous les cas,**

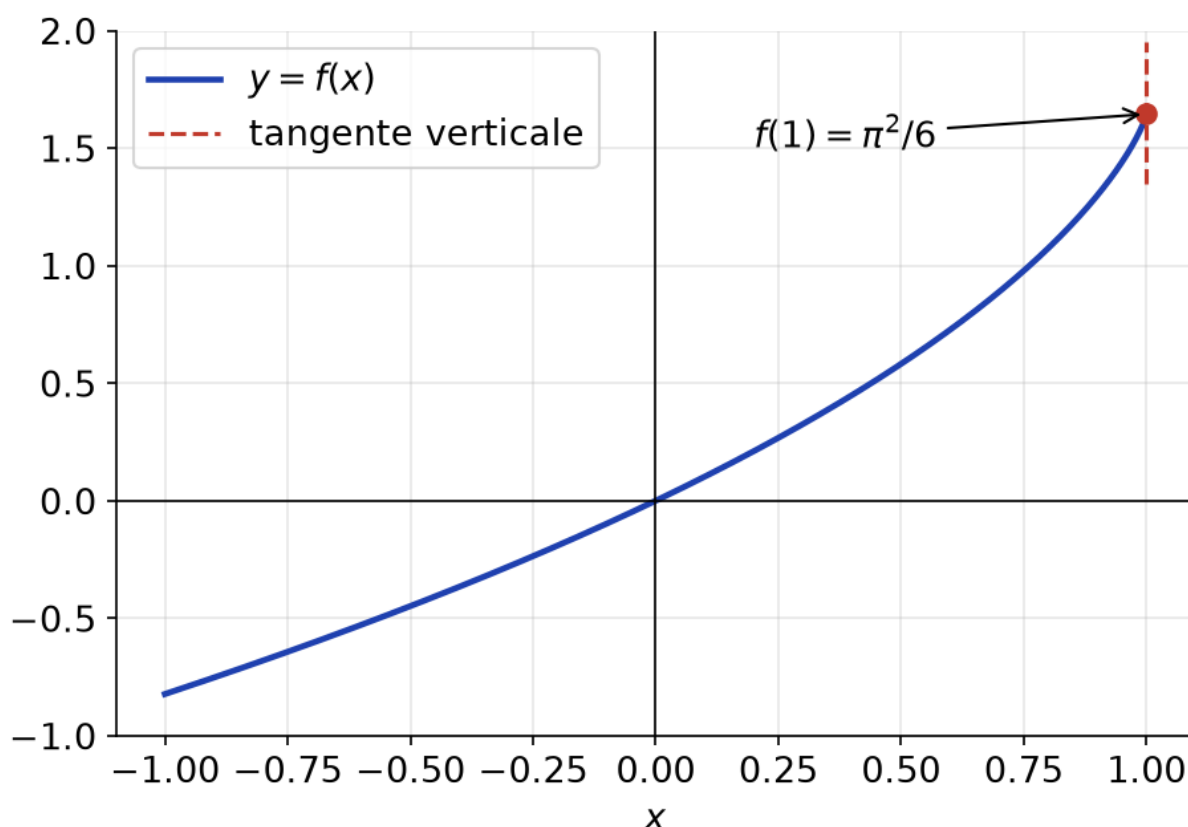
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x).$$

3. Les coefficients $\frac{1}{n}$ sont positifs. Si la somme était bornée sur $[0, 1[$, la série harmonique convergerait d'après la question 2, ce qui est faux. **La somme n'est donc pas bornée.** On le retrouve directement : elle vaut $-\ln(1-x)$, qui tend vers $+\infty$ en 1^- .

Corrigé de l'exercice 16 : Continuité au bord sans dérivabilité

1. La série $\sum \frac{x^n}{n^2}$ a le même rayon que $\sum x^n$, donc $R = 1$. Pour $|x| \leq 1$, on a $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. La convergence est donc normale sur $[-1, 1]$. Chaque terme étant continu, **f est définie et continue sur $[-1, 1]$.**
2. D'après le théorème de dérivation terme à terme, f est C^1 , et même C^∞ , sur $] -1, 1[$.
De plus, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$. En multipliant par x , on obtient
$$x f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$
3. Soit $x \in]0, 1[$. La fonction f est continue sur $[x, 1]$ et dérivable sur $]x, 1[$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]x, 1[$ tel que $\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(c)$. Or f' est croissante sur $]0, 1[$, car ses coefficients sont positifs. Donc $f'(c) \geq f'(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x}$, qui tend vers $+\infty$. **Ainsi le taux d'accroissement tend vers $+\infty$: f n'est pas dérivable en 1 , et son graphe y admet une tangente verticale.**

Comme le montre la figure ci-dessous, la courbe arrive en $x = 1$ avec une pente infinie. La valeur $f(1) = \sum \frac{1}{n^2}$ vaut $\frac{\pi^2}{6}$, résultat classique que l'on admet ici. Ainsi, la continuité au bord ne se transmet pas à la dérivée : la série dérivée diverge en 1 .



Corrigé de l'exercice 17 : Unicité des coefficients et identification

- Écrivons $f(x) = \sum a_n x^n$ sur $]-r, r[$. Pour $|x| < r/2$, on a $f(2x) = \sum a_n 2^n x^n$ et $f(x) + x = a_0 + (a_1 + 1)x + \sum_{n \geq 2} a_n x^n$. Par unicité des coefficients sur $]-r/2, r/2[$: pour $n = 0$, $a_0 = a_0$; pour $n = 1$, $2a_1 = a_1 + 1$, donc $a_1 = 1$; pour $n \geq 2$, $(2^n - 1)a_n = 0$, donc $a_n = 0$. Réciproquement, $f(x) = c + x$ vérifie $c + 2x = (c + x) + x$. **Les solutions sont les fonctions $x \rightarrow c + x$, où c est une constante quelconque.**
- Pour tout réel x , $(1+x)^p (1+x)^q = (1+x)^{p+q}$. Ce sont des polynômes, donc des séries entières de rayon infini de coefficients $\binom{p}{k}$, en convenant que $\binom{p}{k} = 0$ si $k > p$. Le coefficient de x^n du produit de Cauchy vaut $\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}$. Par unicité des coefficients, $\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$.

3. On a $f(-x) = \sum (-1)^n a_n x^n$ et $-f(x) = \sum (-a_n) x^n$ sur $] -R, R[$. Par unicité, $(-1)^n a_n = -a_n$ pour tout n . Pour n pair, il vient $2 a_n = 0$. **Les coefficients d'indice pair sont donc tous nuls.**

Corrigé de l'exercice 18 : Arcsin x / $\sqrt{1-x^2}$ par une équation différentielle

1. La fonction f est dérivable sur $] -1, 1[$ comme quotient. En utilisant $(\sqrt{1-x^2})' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, on obtient

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x \operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{1 + x f(x)}{1-x^2}.$$

Donc $(1-x^2) f'(x) - x f(x) = 1$ **sur** $] -1, 1[$.

2. Soit $\sum a_n x^n$ de rayon $\rho > 0$ et de somme y . Sur $] -\rho, \rho[$, on calcule

$$(1-x^2) y' - x y = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n.$$

Par unicité des coefficients, y est solution si et seulement si $a_1 = 1$ et

$(n+1) a_{n+1} = n a_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Avec $a_0 = 0$, on obtient $a_2 = 0$, puis tous les coefficients pairs sont nuls. Pour les impairs, $a_{2p+1} = \frac{2^p}{(2p+1)!} a_{2p-1}$, donc

$$a_{2p+1} = \prod_{k=1}^p \frac{2k}{2k+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

En effet, $3 \cdot 5 \dots (2p+1) = \frac{(2p+1)!}{2^p p!}$. **Il y a donc une seule série candidate, de**

coefficients $a_{2p} = 0$ **et** $a_{2p+1} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}$.

3. À $x \neq 0$ fixé, posons $u_p = a_{2p+1} |x|^{2p+1}$. Alors $\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{2p+2}{2p+3} |x|^2 \rightarrow |x|^2$. Le rayon vaut donc 1, et la somme S est solution sur $] -1, 1[$. Sur cet intervalle, l'équation s'écrit $y' = \frac{x}{1-x^2} y + \frac{1}{1-x^2}$, linéaire d'ordre 1 à coefficients continus. Or f et S en sont solutions et valent 0 en 0. Par unicité de la solution du problème de Cauchy,

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1} \quad \text{sur }] -1, 1[.$$

Point de méthode : on ne suppose jamais f développable ; on construit la série solution, on calcule son rayon, puis l'unicité du problème de Cauchy identifie les deux fonctions.

Corrigé de l'exercice 19 : Résolution d'une équation différentielle par une série entière

1. Soit $y = \sum a_n x^n$ de rayon $\rho > 0$. Sur $] -\rho, \rho[$, on dérive terme à terme. Le coefficient de x^n dans $4x y''$ vaut $4(n+1)n a_{n+1}$. Dans $2y'$, il vaut $2(n+1)a_{n+1}$. Par unicité des coefficients, y est solution si et seulement si, pour tout n ,

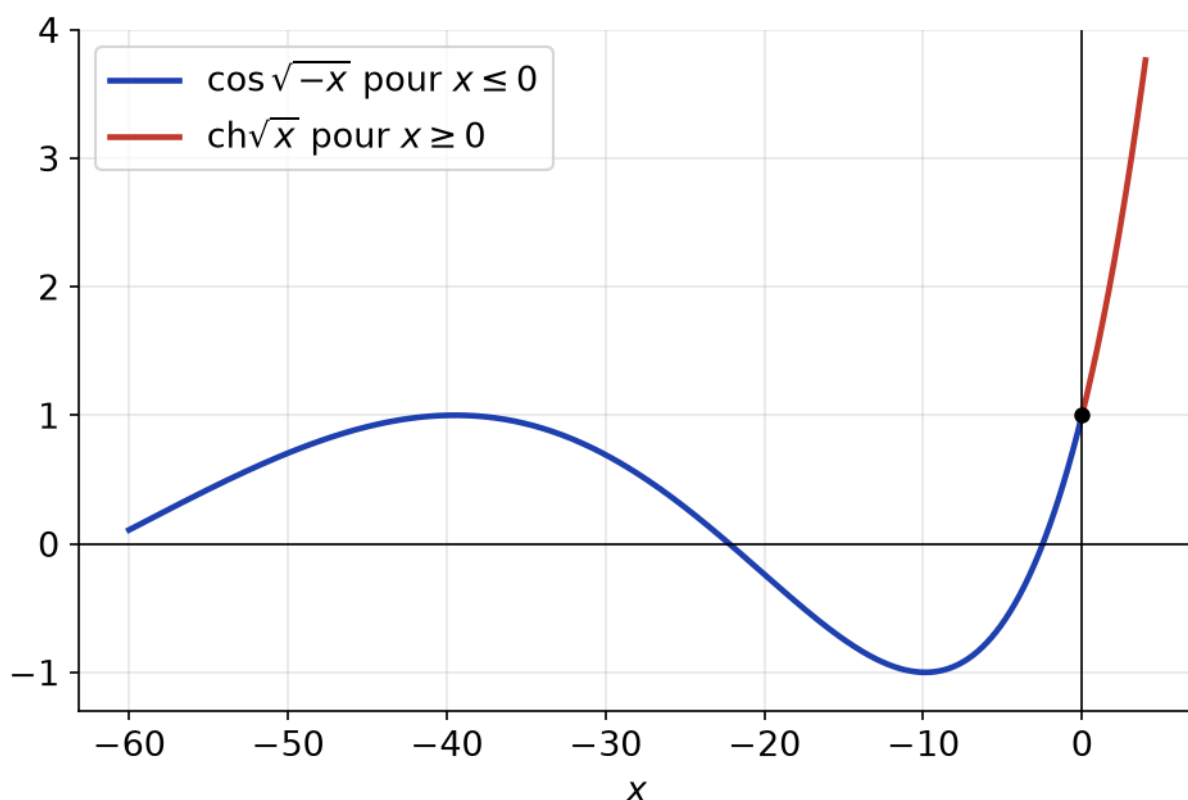
$$2(n+1)(2n+1)a_{n+1} = a_n, \text{ soit } a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Par récurrence, $a_n = \frac{a_0}{(2n)!}$. Réciproquement, la série $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ a un rayon infini, par d'Alembert : le rapport vaut $\frac{|x|}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow 0$. **Les solutions développables sont donc les $y = a_0 \varphi$, avec $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$, de rayon infini.**

2. Pour $x > 0$, $x^n = (\sqrt{x})^{2n}$, donc $\varphi(x) = \text{ch } \sqrt{x}$. Pour $x < 0$, posons $t = \sqrt{-x}$; alors $x^n = (-1)^n t^{2n}$, donc $\varphi(x) = \cos \sqrt{-x}$. **Ainsi $\varphi(x) = \text{ch } \sqrt{x}$ si $x \geq 0$ et $\varphi(x) = \cos \sqrt{-x}$ si $x \leq 0$.**

3. Posons $s = \sqrt{x}$ pour $x > 0$ et $y = \text{sh } s$. Alors $y' = \frac{\text{ch } s}{2s}$, puis $y'' = \frac{s \text{ sh } s - \text{ch } s}{4s^3}$. On obtient $4x y'' = \text{sh } s - \frac{\text{ch } s}{s}$ et $2y' = \frac{\text{ch } s}{s}$. La somme vaut $\text{sh } s = y$: **$\text{sh } \sqrt{x}$ est bien solution sur $]0, +\infty[$. Cependant, $\frac{\text{sh } \sqrt{x}}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$ en 0^+ . Elle n'est donc pas dérivable en 0 , donc pas développable en série entière : c'est pourquoi la question 1 ne l'a pas trouvée.**

La figure ci-dessous montre la solution φ . Elle oscille comme un cosinus pour $x < 0$ et croît comme un cosinus hyperbolique pour $x > 0$. Le raccord en 0 est de classe C^∞ , puisque φ est la somme d'une série entière.



Corrigé de l'exercice 20 : Une fonction C^∞ non développable en série entière

1. Pour $n = 0$, on prend $P_0 = 1$. Supposons $f^{(n)}(x) = P_n(1/x) e^{-1/x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$. La dérivée de $P_n(1/x)$ vaut $-\frac{1}{x^2} P'_n(1/x)$. Celle de e^{-1/x^2} vaut $\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$. Ainsi, $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(1/x) e^{-1/x^2}$, avec $P_{n+1}(X) = 2X^3 P_n(X) - X^2 P'_n(X)$, qui est bien un polynôme.
2. Pour tout polynôme P , $P(1/x) e^{-1/x^2} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. En effet, avec $u = 1/x$, on a $u^k e^{-u^2} \rightarrow 0$ quand $|u| \rightarrow +\infty$, par croissances comparées. Montrons par récurrence que f est C^n avec $f^{(n)}(0) = 0$. C'est vrai pour $n = 0$, car $f(x) \rightarrow 0 = f(0)$. Si c'est vrai au rang n , le taux $\frac{f^{(n)}(x) - 0}{x} = \frac{1}{x} P_n(1/x) e^{-1/x^2}$ tend vers 0. Donc $f^{(n+1)}(0) = 0$. De plus, $f^{(n+1)}(x) \rightarrow 0$, donc $f^{(n+1)}$ est continue en 0. Ainsi f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n .
3. Supposons f développable sur $] -r, r[$. Ses coefficients valent alors $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$, donc f est nulle sur $] -r, r[$. Or $f(r/2) = e^{-4/r^2} > 0$, ce qui est absurde. Donc f n'est

développable en série entière sur aucun intervalle centré en 0.

Corrigé de l'exercice 21 : Problème : suite de Fibonacci et série génératrice

1. Par récurrence double, $F_n \geq 0$ est immédiat. De plus, $F_0 = 0 \leq 1$ et $F_1 = 1 \leq 2$. Si $F_n \leq 2^n$ et $F_{n+1} \leq 2^{n+1}$, alors $F_{n+2} \leq 2^{n+1} + 2^n \leq 2^{n+2}$. Par comparaison avec $\sum 2^n x^n$, on a $R \geq \frac{1}{2}$.

2. Pour $|x| < \frac{1}{2}$, les séries convergent et

$$(1 - x - x^2) G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} F_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-2} x^n.$$

Le coefficient de x^0 vaut $F_0 = 0$; celui de x^1 vaut $F_1 - F_0 = 1$. Pour $n \geq 2$, il vaut $F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$. **Donc** $(1 - x - x^2) G(x) = x$.

3. On a $\varphi + \psi = 1$ et $\varphi\psi = \frac{1-5}{4} = -1$. Ainsi $(1 - \varphi x)(1 - \psi x) = 1 - x - x^2$. Cherchons A et B tels que $\frac{x}{(1-\varphi x)(1-\psi x)} = \frac{A}{1-\varphi x} + \frac{B}{1-\psi x}$. Il faut $A + B = 0$ et $-(A\psi + B\varphi) = 1$, soit $A(\varphi - \psi) = 1$. Comme $\varphi - \psi = \sqrt{5}$,
$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{1-\psi x} \right).$$

4. Pour $|x| < \frac{1}{2}$, on a $|\varphi x| < 1$ et $|\psi x| < 1$, car $|\psi| < \varphi < 2$. On développe donc les deux séries géométriques : $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} x^n$. Par unicité des coefficients,

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \text{ pour tout } n.$$

5. Comme $|\psi| < 1 < \varphi$, on a $F_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$. Le rayon est donc celui de $\sum \varphi^n x^n$:
 $R = \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$. De plus, $\frac{F_{n+1}}{F_n} \sim \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n}$, donc $\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \varphi$.

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : nombre de dérangements

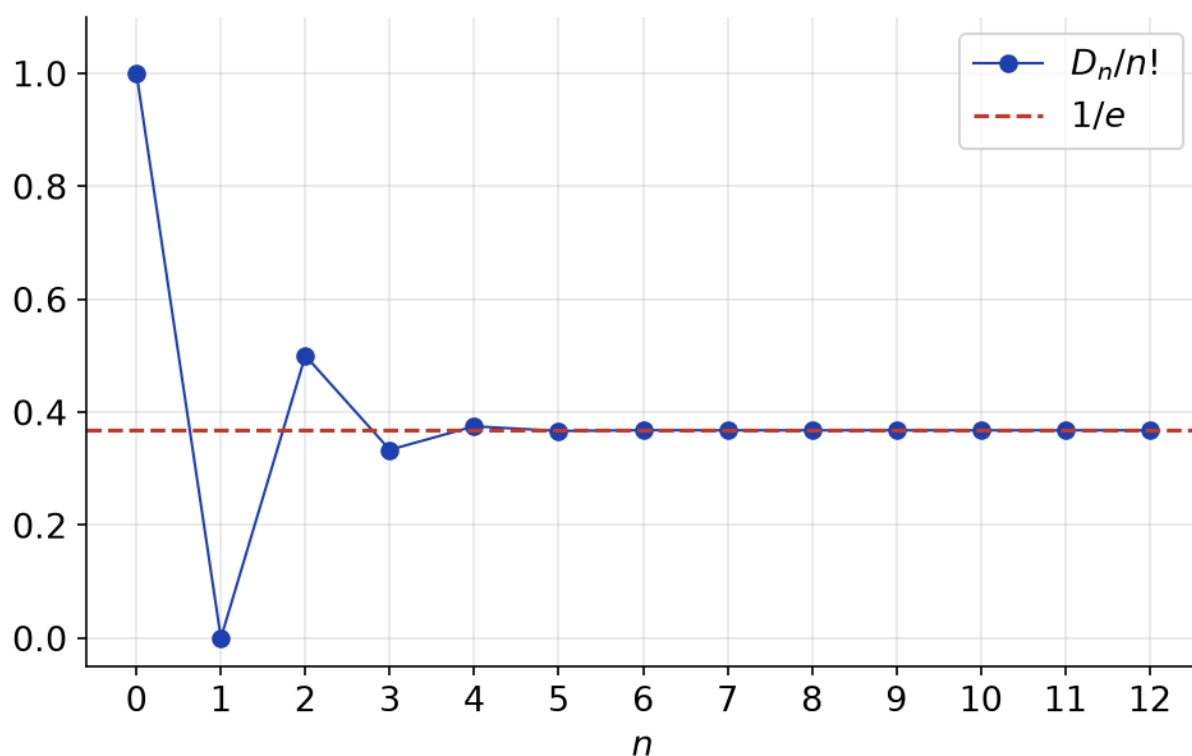
- La seule permutation de $\{1\}$ fixe 1, donc $D_1 = 0$. Pour $n = 2$, seule la transposition convient : $D_2 = 1$. Pour $n = 3$, les dérangements sont les deux cycles d'ordre 3. Ainsi $D_1 = 0$, $D_2 = 1$ et $D_3 = 2$.
- Choisissons une partie F de cardinal j . Les permutations dont l'ensemble des points fixes est exactement F correspondent aux dérangements du complémentaire, de cardinal $n - j$. Il y en a D_{n-j} . En sommant sur toutes les parties F , on obtient $n! = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D_{n-j}$. Avec $k = n - j$ et $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$.
- Un dérangement est une permutation, donc $0 \leq D_n \leq n!$. Par conséquent, $0 \leq \frac{D_n}{n!} \leq 1$. Par comparaison avec $\sum x^n$, le rayon de f est au moins 1.
- Pour $|x| < 1$, le produit de Cauchy de e^x et de $f(x)$ est licite. Son coefficient d'indice n vaut

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{D_k}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = 1.$$

Donc $e^x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$

- Ainsi $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$, produit de Cauchy de $\sum \frac{(-1)^k}{k!} x^k$ et de $\sum x^n$. Son coefficient d'indice n vaut $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. Par unicité des coefficients, $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. Enfin, par le développement de l'exponentielle en -1 , $\frac{D_n}{n!} \rightarrow e^{-1} \approx 0,368$.
- Pour $n = 4$, $D_4 = 24 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = 12 - 4 + 1 = 9$. La relation de la question 2 donne aussi $24 = 1 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + D_4$, soit $D_4 = 9$. **Les deux calculs donnent $D_4 = 9$.**

La figure ci-dessous représente la proportion $D_n/n!$. Elle converge très vite vers $1/e$ en oscillant, car c'est la somme partielle d'une série alternée.



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [séries entières, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur séries entières](#)
- À maîtriser avant : [Séries de fonctions](#)
- Chapitre précédent : [Séries de fonctions](#)
- Chapitre suivant : [Fonctions vectorielles d'une variable réelle](#)
- Le même thème en L2 : [séries entières, exercices de maths en L2](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)

- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)