

Séries entières

Corrigé de l'exercice 1 : Rayons de convergence par la règle de d'Alembert

1. Les coefficients $a_n = \frac{n^2}{3^n}$ sont non nuls pour $n \geq 1$. On calcule $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \rightarrow \frac{1}{3}$.
D'après la règle de d'Alembert, $R = 3$.
2. Ici $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \rightarrow 4$. Par conséquent,
 $R = \frac{1}{4}$.
3. On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Or
 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + 1/n)} \rightarrow e$, car $n \ln(1 + 1/n) \rightarrow 1$. Ainsi $R = \frac{1}{e}$.
4. La série est lacunaire : seuls les coefficients d'indice multiple de 3 sont non nuls. On applique donc d'Alembert au terme général $u_n(z) = \frac{z^{3n}}{8^n}$, pour $z \neq 0$: $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{|z|^3}{8}$. Cette quantité est strictement inférieure à 1 si et seulement si $|z| < 2$. La série converge donc absolument pour $|z| < 2$ et diverge grossièrement pour $|z| > 2$. On peut aussi remarquer que c'est la série géométrique de raison $z^3/8$. Ainsi $R = 2$.

Point de méthode : pour une série lacunaire, les quotients a_{n+1}/a_n n'ont pas de sens (division par zéro). On raisonne toujours sur le terme général complet.

Corrigé de l'exercice 2 : Rayons de convergence sans la règle de d'Alembert

1. La suite $(\sin n)$ est bornée par 1, donc $(a_n 1^n)$ est bornée et $R \geq 1$. De plus, en $z = 1$, le terme général $\sin n$ ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement. Si l'on avait $R > 1$, elle convergerait absolument en 1. Par conséquent, $R = 1$.
2. La série s'écrit $\sum a_k z^k$ avec $a_k = 1$ si k est un carré et $a_k = 0$ sinon. D'abord, les coefficients sont bornés, donc $R \geq 1$. Ensuite, en $z = 1$, la série $\sum_n 1$ diverge. Ainsi $R = 1$.
3. On a $2^n z^{2n} = (2 z^2)^n$. C'est une série géométrique, qui converge si et seulement si $|2 z^2| < 1$, c'est-à-dire $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Elle diverge grossièrement sinon. Donc $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Le quotient a_{n+1}/a_n vaut 2^{-n} ou 2^{n+1} selon la parité de n : il n'a pas de limite. On écrit alors $a_n = b_n + c_n$, où $b_n = 2^n$ pour n pair, $b_n = 0$ sinon, et $c_n = 1$ pour n impair, $c_n = 0$ sinon. D'une part, $\sum b_n z^n = \sum_k (4 z^2)^k$ converge si et seulement si $|z| < \frac{1}{2}$: son rayon vaut $\frac{1}{2}$. D'autre part, $\sum c_n z^n = \sum_k z^{2k+1}$ a pour rayon 1. Les deux rayons sont différents. D'après le théorème sur la somme, $R = \min\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 3 : Lemme d'Abel et encadrement du rayon

1. D'abord, la série $\sum a_n 2^n$ converge, donc son terme général tend vers 0. En particulier, la suite $(a_n 2^n)$ est bornée. Par définition du rayon, on a donc $R \geq 2$. Ensuite, supposons $R > 3$. Comme $|-3| < R$, la série $\sum a_n (-3)^n$ convergerait absolument, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi $2 \leq R \leq 3$: le cercle de convergence se trouve dans la couronne de la figure de l'énoncé.
2. La série converge en z_0 , donc $(a_n z_0^n)$ est bornée et $R \geq |z_0|$. Si l'on avait $R > |z_0|$, la série convergerait absolument en z_0 , puisque z_0 serait dans le disque ouvert. C'est exclu par

hypothèse. Par conséquent, $R = |z_0|$.

3. En $z_0 = -3$, on obtient $\sum \frac{(-3)^n}{n 3^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$. Cette série converge d'après le critère des séries alternées, car $\frac{1}{n}$ décroît vers 0. En revanche, $\sum \frac{1}{n}$ diverge : la convergence n'est pas absolue. D'après la question 2, $R = 3$.

Corrigé de l'exercice 4 : Comportement sur le bord du disque

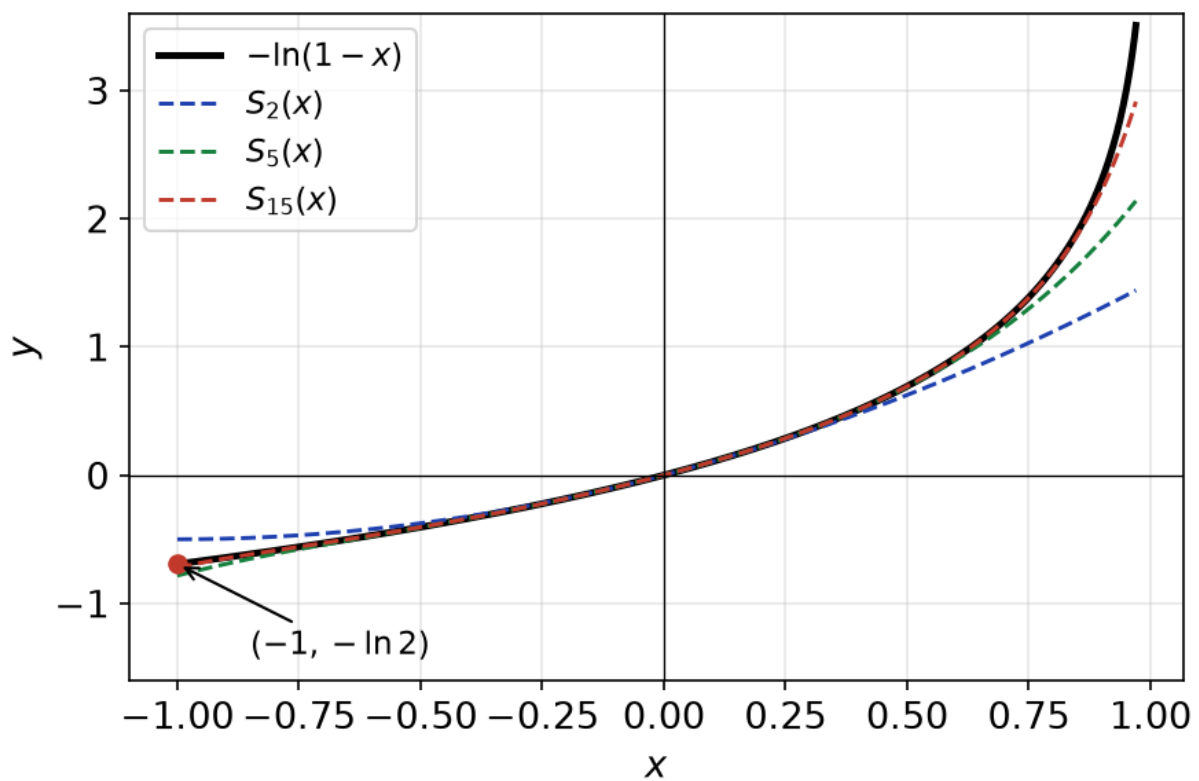
1. Avec $a_n = \frac{1}{n}$, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$. D'après la règle de d'Alembert, $R = 1$.
2. En $x = 1$, on obtient la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, qui **diverge**. En $x = -1$, on obtient $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, qui **converge** d'après le critère des séries alternées.
3. Pour $x \in]-1, 1[$, la somme est dérivable terme à terme et $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$. Comme $S(0) = 0$, on intègre : $S(x) = -\ln(1-x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
4. Soit $x \in [-1, 0]$. On écrit $\frac{x^n}{n} = (-1)^n \frac{|x|^n}{n}$. La suite $\left(\frac{|x|^n}{n}\right)$ décroît et tend vers 0, car $|x| \leq 1$. Le critère des séries alternées s'applique donc, et il fournit la majoration du reste :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ce majorant ne dépend pas de x et tend vers 0 : la convergence est uniforme sur $[-1, 0]$. Chaque fonction $x \rightarrow x^n/n$ est continue, donc S est continue sur $[-1, 0]$, en particulier en -1 . Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = S(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-\ln(1-x)) = -\ln 2.$$

Par conséquent, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$. La figure ci-dessous montre les sommes partielles qui rejoignent le point $(-1, -\ln 2)$, mais s'écartent de la courbe près de -1 .



Point de méthode : la continuité au bord ne découle pas du cours sur le disque ouvert. Il faut un argument de convergence uniforme sur un intervalle qui contient le point du bord.

Corrigé de l'exercice 5 : Somme et produit de Cauchy de séries

1. La série $\sum z^n$ a pour rayon 1 et la série $\sum 2^n z^n = \sum (2z)^n$ a pour rayon $\frac{1}{2}$. Ces rayons sont distincts, donc le rayon de la somme vaut $\frac{1}{2}$. Pour $|z| < \frac{1}{2}$, on obtient
$$\sum (1 + 2^n) z^n = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-2z}, \text{ avec } R = \frac{1}{2}.$$
2. La série $\sum z^n$ a pour rayon 1. Ensuite, $b_n \rightarrow -1$: la suite (b_n) est bornée, donc $R_b \geq 1$. Comme b_n ne tend pas vers 0, la série diverge en $z = 1$, donc $R_b = 1$. Enfin, $a_n + b_n = \frac{1}{n!}$, qui donne un rayon infini. **On constate que** $R_{a+b} = +\infty > \min(R_a, R_b) = 1$: l'inégalité du cours peut être stricte lorsque les deux rayons sont égaux.
3. La série $\sum z^n$ converge absolument pour $|z| < 1$. Son produit de Cauchy avec elle-même a pour coefficients $c_n = \sum_{k=0}^n 1 \times 1 = n + 1$. D'après le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes, pour $|z| < 1$:

$$\left(\frac{1}{1-z} \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n.$$

C'est bien **l'égalité demandée**.

4. Pour $|z| < \min(1, R_a)$, les deux séries $\sum z^n$ et $\sum a_n z^n$ convergent absolument. Leur produit de Cauchy a pour coefficients $\sum_{k=0}^n a_k \times 1 = S_n$. Ainsi

$$\frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n.$$

5. Avec $a_n = \frac{1}{n!}$, on a $R_a = +\infty$. Donc, pour $|z| < 1$, $\frac{e^z}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) z^n$.

Déterminons maintenant le rayon exact. D'une part, $0 < S_n \leq e$, donc les coefficients sont bornés et $R \geq 1$. D'autre part, $S_n \rightarrow e \neq 0$, donc la série diverge grossièrement en $z = 1$. Par conséquent, **le rayon vaut exactement 1**.

Corrigé de l'exercice 6 : Convergence normale sur les compacts du disque

1. Pour $x \in [-r, r]$, on a $|x^n| \leq r^n$. Or $\sum r^n$ converge, car $0 < r < 1$. Ainsi $\sum x^n$ converge normalement sur $[-r, r]$.
2. Pour $x \in]-1, 1[$, on a $R_n(x) = x^{n+1} \sum_{j=0}^{+\infty} x^j = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Or $|R_n(x)| \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 1^-$, à n fixé. Donc $\sup_{]-1, 1[} |R_n| = +\infty$ pour tout n , et ce sup ne tend pas vers 0. Par conséquent, **la convergence n'est pas uniforme sur $]-1, 1[$** . La figure de l'énoncé montre ce phénomène : les restes sont petits sur $[-0,8; 0,8]$ mais explosent près de 1.
3. La continuité est une propriété locale. Soit $x_0 \in]-1, 1[$ et r tel que $|x_0| < r < 1$. Sur $[-r, r]$, la convergence est normale, donc uniforme, et chaque $x \rightarrow x^n$ est continue. Ainsi la somme est continue sur $[-r, r]$, qui est un voisinage de x_0 . **La somme est donc continue en tout point de $]-1, 1[$** , même sans convergence uniforme sur tout l'intervalle.
4. Choisissons ρ tel que $r < \rho < R$. Par définition du rayon, la suite $(a_n \rho^n)$ est bornée par un réel M . Alors, pour $|z| \leq r$:

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n = |a_n \rho^n| \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Comme $0 < r/\rho < 1$, la série géométrique $\sum M (r/\rho)^n$ converge. **La série converge donc normalement sur $\overline{D}(0, r)$** .

Corrigé de l'exercice 7 : Sommes obtenues par dérivation terme à terme

1. La série $\sum x^n$ a pour rayon 1 et pour somme $g(x) = \frac{1}{1-x}$. D'après le théorème de dérivation terme à terme, pour $x \in]-1, 1[$, $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. En multipliant par x , on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.
2. On pose $h(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \sum n x^n$, de rayon 1. En dérivant terme à terme, $x h'(x) = \sum n^2 x^n$. Or

$$h'(x) = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{(1-x) + 2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Par conséquent, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ pour $x \in]-1, 1[$.

3. On applique ces formules en des points de $] -1, 1[$. Pour $x = \frac{1}{2}$, on trouve $\frac{1/2}{1/4} = 2$ et $\frac{(1/2)(3/2)}{1/8} = 6$. Pour $x = \frac{1}{3}$, on trouve $\frac{1/3}{4/9} = \frac{3}{4}$. Ainsi $\sum \frac{n}{2^n} = 2$, $\sum \frac{n^2}{2^n} = 6$ et $\sum \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$.

Corrigé de l'exercice 8 : Sommes obtenues par intégration terme à terme

1. La série est lacunaire. Pour $x \neq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Alors $\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{2n+1}{2n+3} x^2 \rightarrow x^2$. D'après la règle de d'Alembert, la série converge absolument si $|x| < 1$ et diverge grossièrement si $|x| > 1$. Donc $R = 1$.
2. Par dérivation terme à terme sur $] -1, 1[$, on obtient $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$. Or $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right)$ et $S(0) = 0$. En intégrant de 0 à x :

$$S(x) = \frac{1}{2} \left(-\ln(1-x) + \ln(1+x) \right).$$

Ainsi $S(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ pour $x \in]-1, 1[$.

3. Pour $x = \frac{1}{2}$, on a $x^{2n+1} = \frac{1}{2 \cdot 4^n}$. Donc

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1) 4^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3/2}{1/2} = \frac{1}{2} \ln 3. \text{ Par conséquent, } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1) 4^n} = \ln 3$$

Corrigé de l'exercice 9 : Somme d'une série à coefficients rationnels

1. Avec $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+3} \rightarrow 1$, donc $R = 1$. De plus, pour $x \in [-1, 1]$, $\left| \frac{x^n}{(n+1)(n+2)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente.
La convergence est donc normale sur $[-1, 1]$.

2. On cherche $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n+2}$. En multipliant par $n+1$, puis en prenant $n = -1$, on trouve $\alpha = 1$. De même, $\beta = -1$. Ainsi $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

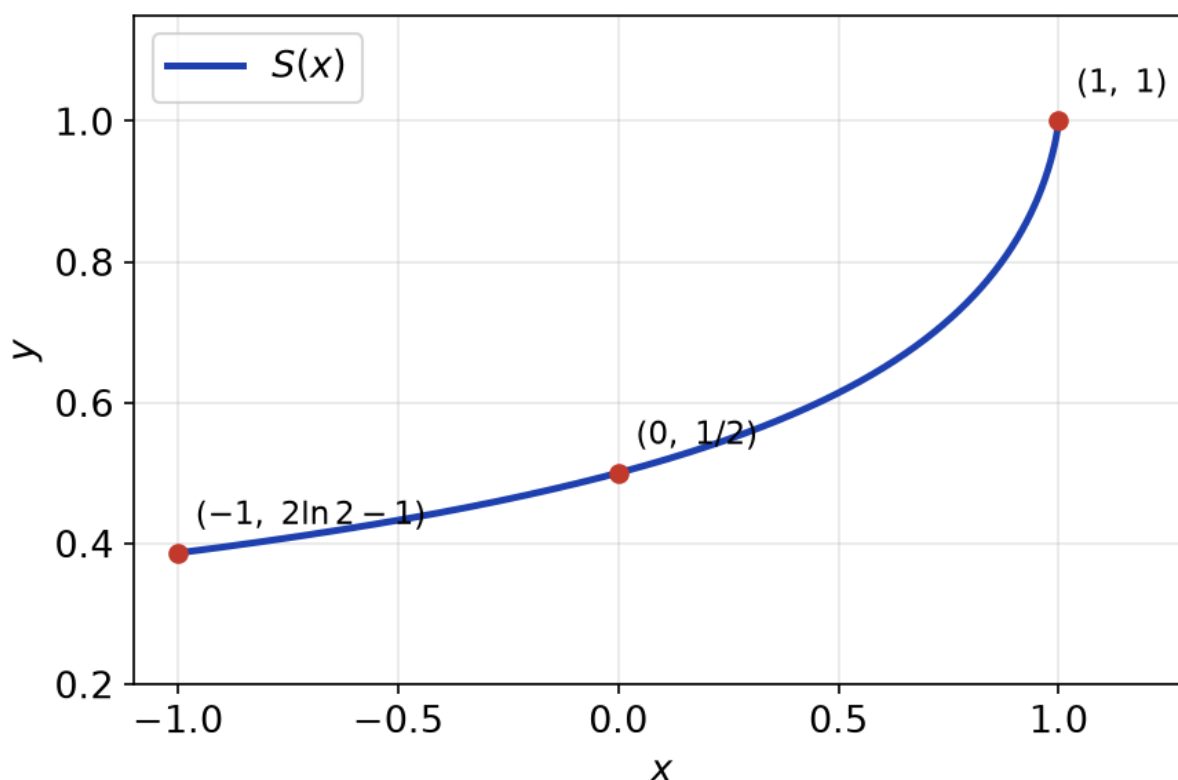
3. Soit $x \in]-1, 1[$ non nul. Les deux séries $\sum \frac{x^n}{n+1}$ et $\sum \frac{x^n}{n+2}$ ont pour rayon 1, donc on peut les séparer. D'une part, d'après l'exercice 4, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$.

D'autre part, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} = \frac{1}{x^2} \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{x^m}{m} = \frac{-\ln(1-x) - x}{x^2}$. Par différence :

$$S(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = \frac{(1-x) \ln(1-x) + x}{x^2}.$$

Finalement, $S(x) = \frac{(1-x)\ln(1-x) + x}{x^2}$ pour $x \neq 0$, et $S(0) = a_0 = \frac{1}{2}$. On vérifie la cohérence : le développement $(1-x)\ln(1-x) = -x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ donne $S(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + o(x)$, soit $a_0 = \frac{1}{2}$ et $a_1 = \frac{1}{6}$.

4. Chaque fonction $x \rightarrow \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$ est continue et la convergence est normale sur $[-1, 1]$.
 Donc S est continue sur $[-1, 1]$. Ensuite, on passe à la limite dans la formule de la question 3.
 Quand $x \rightarrow 1^-$, $(1-x)\ln(1-x) \rightarrow 0$ par croissances comparées, donc $S(1) = 1$. Quand $x \rightarrow -1^+$, la formule tend vers $2\ln 2 - 1$. Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} = 2\ln 2 - 1$. La première valeur se retrouve d'ailleurs par télescopage. La figure ci-dessous montre la courbe de S et ses trois valeurs remarquables.



Corrigé de l'exercice 10 : Somme à l'aide de la série exponentielle

1. Avec $a_n = \frac{n^2+1}{n!}$, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+1}{(n^2+1)(n+1)} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Donc $R = +\infty$.

2. On écrit $n^2 + 1 = n(n-1) + n + 1$. Pour tout réel x , les trois séries suivantes convergent :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} = x^2 e^x, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x e^x.$$

En ajoutant $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!} x^n = (x^2 + x + 1) e^x$ **pour tout**
 $x \in \mathbb{R}$.

3. Pour $x = 1$, on trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!} = 3e$.

Corrigé de l'exercice 11 : Série entière trigonométrique

1. Supposons que $\cos(n\theta) \rightarrow 0$. Alors $\cos(2n\theta) = 2\cos^2(n\theta) - 1 \rightarrow -1$. Or $(\cos(2n\theta))$ est une suite extraite de $(\cos(n\theta))$, donc elle tend vers 0 : c'est une contradiction. Ensuite, $|\cos(n\theta)| \leq 1$, donc $R \geq 1$. Enfin, la série diverge grossièrement en $x = 1$, donc $R \leq 1$. Ainsi $R = 1$. De même, $|\sin(n\theta)| \leq 1$, donc la seconde série a un rayon au moins égal à 1.

2. Pour $x \in]-1, 1[$, on a $|x e^{i\theta}| < 1$, donc $\sum (x e^{i\theta})^n = \frac{1}{1 - x e^{i\theta}}$. En multipliant par la quantité conjuguée :

$$\frac{1}{1 - x e^{i\theta}} = \frac{1 - x e^{-i\theta}}{|1 - x e^{i\theta}|^2} = \frac{1 - x \cos \theta + i x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}.$$

Or $\cos(n\theta) x^n$ et $\sin(n\theta) x^n$ sont les parties réelle et imaginaire de $(x e^{i\theta})^n$. Donc

$$C(x) = \frac{1 - x \cos \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2} \text{ et } S(x) = \frac{x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}.$$

3. Avec $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{1}{2}$, on a $\cos \theta = \frac{1}{2}$. Donc $C\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 - 1/4}{1 - 1/2 + 1/4} = \frac{3/4}{3/4}$. Ainsi
- $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{2^n} = 1.$$

Corrigé de l'exercice 12 : Développement par décomposition en éléments simples

1. On factorise $x^2 - 3x + 2 = (1-x)(2-x)$, puis $\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$. Pour $|x| < 1$, on a $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$. Pour $|x| < 2$, on a $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x/2} = \sum \frac{x^n}{2^{n+1}}$. Les rayons 1 et 2 sont distincts, donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$, avec $R = 1$.
- Vérification : $a_0 = \frac{1}{2} = f(0)$.

2. On a $1 + x - 2x^2 = (1-x)(1+2x)$, strictement positif pour $x \in]-\frac{1}{2}, 1[$. Sur cet intervalle, $g(x) = \ln(1-x) + \ln(1+2x)$. Or $\ln(1-x) = -\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ pour $|x| < 1$, et
- $$\ln(1+2x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n} x^n \text{ pour } |x| < \frac{1}{2}.$$
- Les rayons 1 et $\frac{1}{2}$ diffèrent, donc
- $$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n - 1}{n} x^n, \text{ avec } R = \frac{1}{2}.$$

3. On a $(1-x)(1+x+x^2) = 1 - x^3$. Donc, pour $|x| < 1$,
- $$h(x) = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x) \sum x^{3n} = \sum x^{3n} - \sum x^{3n+1}.$$
- Les coefficients valent 1, -1, 0 selon que n est congru à 0, 1 ou 2 modulo 3. Ils sont bornés sans tendre vers

0 : le rayon vaut donc exactement 1. Ainsi $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^{3n} - x^{3n+1})$, avec $R = 1$.

Corrigé de l'exercice 13 : Développement en série entière de arcsinus

1. Pour $|u| < 1$, on a $(1+u)^{-1/2} = \sum c_n u^n$ avec $c_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right)$. On calcule

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \cdot \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

Pour $|x| < 1$, on pose $u = -x^2$, de sorte que $|u| < 1$. Alors $c_n (-x^2)^n = \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$, d'où **l'égalité demandée**.

2. Les coefficients $\binom{2n}{n}/4^n$ sont majorés par 1, car $\binom{2n}{n} \leq \sum_k \binom{2n}{k} = 4^n$. Ils sont aussi minorés par $\frac{1}{2n+1}$, car $\binom{2n}{n}$ est le plus grand des $2n+1$ coefficients binomiaux. La série a donc pour rayon 1. On intègre terme à terme de 0 à x , avec $\arcsin 0 = 0$:

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{4^n (2n+1)} \text{ sur }]-1, 1[, \text{ avec } R = 1.$$

3. En $x = \frac{1}{2}$, on a $\frac{x^{2n+1}}{4^n} = \frac{1}{2^{4n+1}}$. Or $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Donc

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{(2n+1) 2^{4n+1}}.$$

4. Pour $|x| \leq 1$, on a $\left| \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{4^n (2n+1)} \right| \leq \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n (2n+1)} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}$. C'est le terme général d'une série de Riemann convergente. La convergence est donc normale sur $[-1, 1]$, et la somme est continue sur $[-1, 1]$. Comme $\arcsin$ est aussi continue en 1, l'égalité sur

$] -1, 1[$ passe à la limite. Ainsi $\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n (2n+1)}$.

Corrigé de l'exercice 14 : Développement par une équation différentielle

1. Sur $] -1, 1[$, f est dérivable comme produit de fonctions dérivables. On a

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x \cdot \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x f(x)}{1-x^2}.$$

En multipliant par $1-x^2$, on obtient $(1-x^2) f'(x) - x f(x) = 1$. De plus, $f(0) = 0$ et **f est solution de l'équation.**

2. Avec $y = \sum a_n x^n$, on calcule terme à terme :

$$(1-x^2) y' - x y = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} - \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n+1} - \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1}.$$

On réindexe pour faire apparaître x^n . Le coefficient de x^0 vaut a_1 . Pour $n \geq 1$, le coefficient de x^n vaut $(n+1) a_{n+1} - (n-1) a_{n-1} - a_{n-1} = (n+1) a_{n+1} - n a_{n-1}$. Par unicité des coefficients, l'équation équivaut à $a_1 = 1$ et **$(n+1) a_{n+1} = n a_{n-1}$ pour $n \geq 1$.**

3. Comme $a_0 = y(0) = 0$, la récurrence donne $a_{2k} = 0$ pour tout k . Pour les indices impairs, $a_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} a_{2k-1}$, d'où

$$a_{2k+1} = \prod_{j=1}^k \frac{2j}{2j+1} = \frac{2^k k!}{3 \cdot 5 \dots (2k+1)} = \frac{2^k k! \cdot 2^k k!}{(2k+1)!} = \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}.$$

On vérifie : $a_3 = \frac{2}{3}$ et $a_5 = \frac{8}{15}$. Ensuite, pour $u_k(x) = a_{2k+1} x^{2k+1}$, le quotient $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \frac{2k+2}{2k+3} x^2 \rightarrow x^2$. Donc $R = 1$.

4. Soit g la somme de cette série sur $] -1, 1[$. Comme $R = 1$, les calculs de la question 2 sont justifiés par dérivation terme à terme. Ainsi g vérifie l'équation sur $] -1, 1[$ avec $g(0) = 0$. Or, sur $] -1, 1[$, l'équation s'écrit $y' = \frac{x}{1-x^2} y + \frac{1}{1-x^2}$. C'est une équation linéaire du premier ordre à coefficients continus. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, elle admet une unique solution nulle en 0 . Par conséquent, $g = f$, et $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ sur $] -1, 1[$.

Corrigé de l'exercice 15 : Une fonction de classe C infini non développable

1. On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 0$, on prend $P_0 = 1$. Supposons $f^{(n)}(x) = P_n(1/x) e^{-1/x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$. En dérivant, on obtient

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2} P'_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}.$$

Ainsi $P_{n+1}(u) = 2u^3 P_n(u) - u^2 P'_n(u)$, qui est bien un polynôme.

2. Par linéarité, il suffit de traiter $P(u) = u^k$. On pose $u = 1/x$, qui tend vers $\pm\infty$ quand $x \rightarrow 0$. Or $|u|^k e^{-u^2} \rightarrow 0$ quand $|u| \rightarrow +\infty$, par croissances comparées. Donc $P(1/x) e^{-1/x^2} \rightarrow 0$.
3. Montrons par récurrence que f est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$. Pour $n = 0$, f est continue en 0 d'après la question 2. Supposons le résultat au rang n . D'abord, le taux d'accroissement en 0 vaut $\frac{f^{(n)}(x) - 0}{x} = Q(1/x) e^{-1/x^2}$, avec $Q(u) = u P_n(u)$. Il tend vers 0 d'après la question 2. Donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$. Ensuite, sur $\mathbb{R}^*$, $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(1/x) e^{-1/x^2} \rightarrow 0 = f^{(n+1)}(0)$. Ainsi $f^{(n+1)}$

est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc $\mathcal{C}^\infty$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n .

4. Si f était développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$, son développement serait sa série de Taylor, qui est nulle. On aurait alors $f = 0$ sur $] -r, r[$. Or $f(x) = e^{-1/x^2} > 0$ pour $x \neq 0$. Par conséquent, f n'est pas développable en série entière en 0 , comme le montre la figure du cours.

Corrigé de l'exercice 16 : Critère de développabilité par Taylor

1. Pour $x \in]-a, a[$, la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Elle est valable car f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $] -a, a[$.

2. Soit $x \in]-a, a[$. Tout t entre 0 et x vérifie $|x - t| \leq |x|$ et $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$.
Donc

$$|R_n(x)| \leq M \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} dt \right| = \frac{M |x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ce majorant tend vers 0 par croissances comparées. Ainsi la série de Taylor converge vers $f(x)$: f est développable en série entière sur $] -a, a[$.

3. Soit $a > 0$. Les dérivées de $\cosh$ sont $\pm \cosh$ et $\pm \sinh$, toutes bornées par 1 . Celles de $\sinh$ sont $\cosh$ et $\sinh$, bornées par $\cosh a$ sur $] -a, a[$. Les deux fonctions sont donc DSE sur

$]-a, a[$, pour tout a , donc sur $\mathbb{R}$. Les dérivées successives en 0 valent $1, 0, -1, 0, \dots$ pour $\cos$ et $1, 0, 1, 0, \dots$ pour $\cosh$. Ainsi $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 17 : Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre

1. Soit $y = \sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$. Par dérivation terme à terme :

$$4x y'' + 2y' - y = \sum_{n \geq 0} [4(n+1)n a_{n+1} + 2(n+1) a_{n+1} - a_n] x^n = \sum_{n \geq 0} [(n+1)(4n+2) a_{n+1} - a_n] x^n.$$

Par unicité des coefficients, y est solution si et seulement si $a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}$ pour tout n . Par récurrence, $a_n = \frac{a_0}{(2n)!}$. Réciproquement, cette série a un rayon infini, car

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0$ lorsque $a_0 \neq 0$. Les solutions DSE sont donc $y = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$, avec $a_0 \in \mathbb{R}$ et $R = +\infty$.

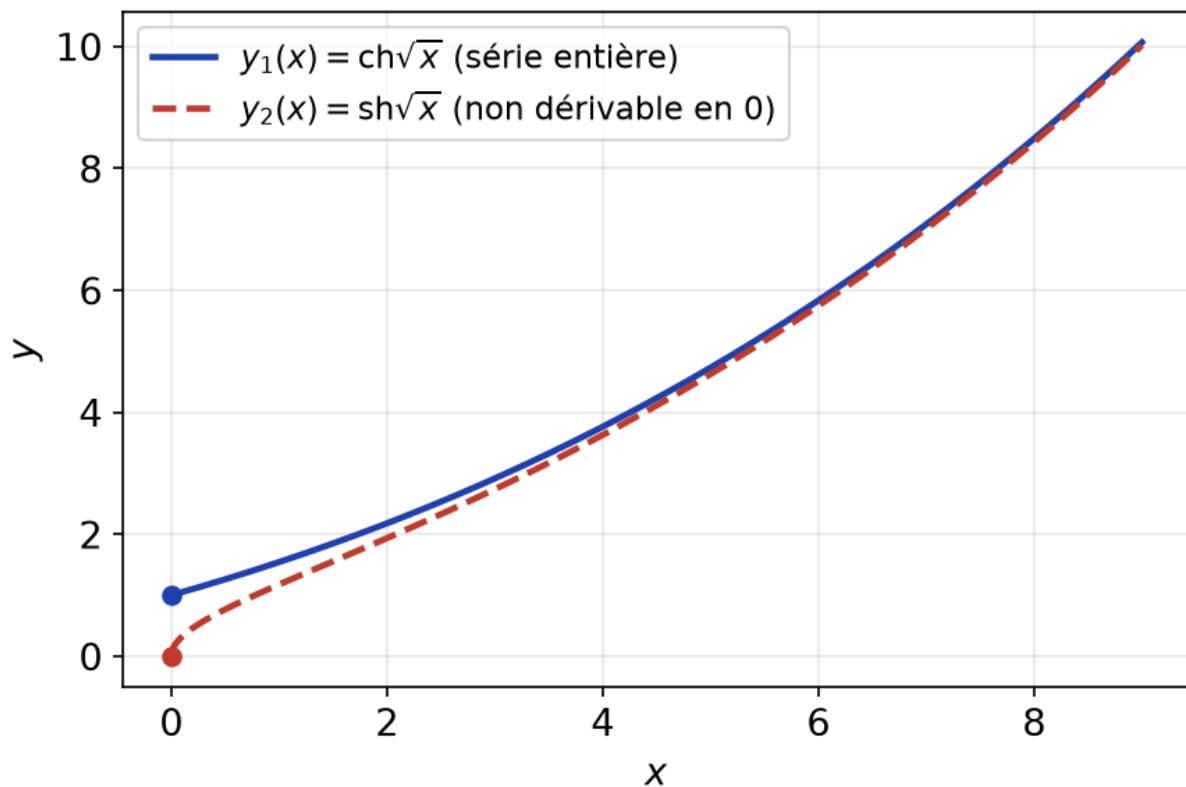
2. Pour $x > 0$, on a $x^n = (\sqrt{x})^{2n}$, donc $\sum \frac{x^n}{(2n)!} = \cosh \sqrt{x}$. Ainsi **les solutions DSE sont, sur $]0, +\infty[$, les fonctions $a_0 \cosh \sqrt{x}$.**

3. Pour $x > 0$, on calcule $y_2'(x) = \frac{\cosh \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ et $y_2''(x) = \frac{\sinh \sqrt{x}}{4x} - \frac{\cosh \sqrt{x}}{4x\sqrt{x}}$. Donc

$$4x y_2'' + 2 y_2' - y_2 = \sinh \sqrt{x} - \frac{\cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \cosh \sqrt{x} = 0.$$

Ainsi y_2 est solution. Cependant, $y_2'(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$, donc y_2 ne se prolonge pas en une fonction dérivable en 0. **Elle n'est donc pas DSE en 0**, ce qui est cohérent avec la question 1 : une solution DSE serait proportionnelle à $\cosh \sqrt{x}$.

4. Sur $]0, +\infty[$, l'équation s'écrit $y'' + \frac{1}{2x} y' - \frac{1}{4x} y = 0$. C'est une équation linéaire homogène du second ordre, à coefficients continus. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, ses solutions forment un espace vectoriel de dimension 2. Or $y_1 = \operatorname{ch}\sqrt{x}$ et $y_2 = \operatorname{sh}\sqrt{x}$ sont solutions et ne sont pas proportionnelles, puisque $y_1 \rightarrow 1$ et $y_2 \rightarrow 0$ en 0^+ . Elles forment donc une base. Ainsi **les solutions sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions $\lambda \operatorname{ch}\sqrt{x} + \mu \operatorname{sh}\sqrt{x}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$** . La figure ci-dessous montre les deux solutions de base : seule la première est régulière en 0.



Corrigé de l'exercice 18 : Équation différentielle du premier ordre avec second membre

1. La fonction $x \rightarrow \int_0^x e^{-t^2} dt$ est la primitive nulle en 0 de $t \rightarrow e^{-t^2}$. Donc f est dérivable et

$$f'(x) = 2x e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2} e^{-x^2} = 2x f(x) + 1.$$

De plus, $f(0) = 0$. L'équation $y' = 2xy + 1$ est linéaire du premier ordre à coefficients continus sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, f **est l'unique solution du problème**.

2. D'une part, $e^{x^2} = \sum \frac{x^{2n}}{n!}$ sur $\mathbb{R}$. D'autre part, $e^{-t^2} = \sum \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$ à un rayon infini, et son intégration terme à terme donne $\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$, encore de rayon infini. Par produit de Cauchy, f **est développable en série entière sur $\mathbb{R}$** . Enfin, e^{x^2} est paire et l'intégrale est impaire, car $t \rightarrow e^{-t^2}$ est paire. **Le produit f est donc impair**.

3. On écrit $f(x) = \sum a_n x^n$. Comme f est impaire, $a_{2k} = 0$. L'équation donne $\sum (n+1) a_{n+1} x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} 2 a_{n-1} x^n$. Par unicité, $a_1 = 1$ et $(n+1) a_{n+1} = 2 a_{n-1}$. Ainsi $a_{2k+1} = \frac{2}{2k+1} a_{2k-1}$, d'où

$$a_{2k+1} = \frac{2^k}{3 \cdot 5 \dots (2k+1)} = \frac{2^k \cdot 2^k k!}{(2k+1)!} = \frac{4^k k!}{(2k+1)!}.$$

On vérifie $a_3 = \frac{2}{3}$ et $a_5 = \frac{4}{15}$. Finalement, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k k!}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ **pour tout $x \in \mathbb{R}$** .

Corrigé de l'exercice 19 : Problème : dénombrement des dérangements

1. La seule permutation de $\{1\}$ fixe 1, donc $D_1 = 0$. Sur $\{1, 2\}$, seule la transposition convient, donc $D_2 = 1$. Sur $\{1, 2, 3\}$, les dérangements sont les deux cycles d'ordre 3. Ainsi $D_1 = 0$, $D_2 = 1$ et $D_3 = 2$.
2. Une permutation de $\{1, \dots, n\}$ est déterminée par son ensemble F de points fixes et par sa restriction au complémentaire de F . Cette restriction est un dérangement de ce complémentaire. Si $|F| = n - k$, il y a $\binom{n}{k}$ choix de F , puis D_k dérangements. Le cas $k = 0$ correspond à l'identité, d'où la convention $D_0 = 1$. En sommant sur k , on obtient $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$.
3. On a $0 \leq D_n \leq n!$, donc $0 \leq \frac{D_n}{n!} \leq 1$. Les coefficients sont bornés, ce qui donne $R \geq 1$.
4. Pour $|x| < 1$, les séries de e^x et de $f(x)$ convergent absolument. Le coefficient de x^n dans leur produit de Cauchy vaut

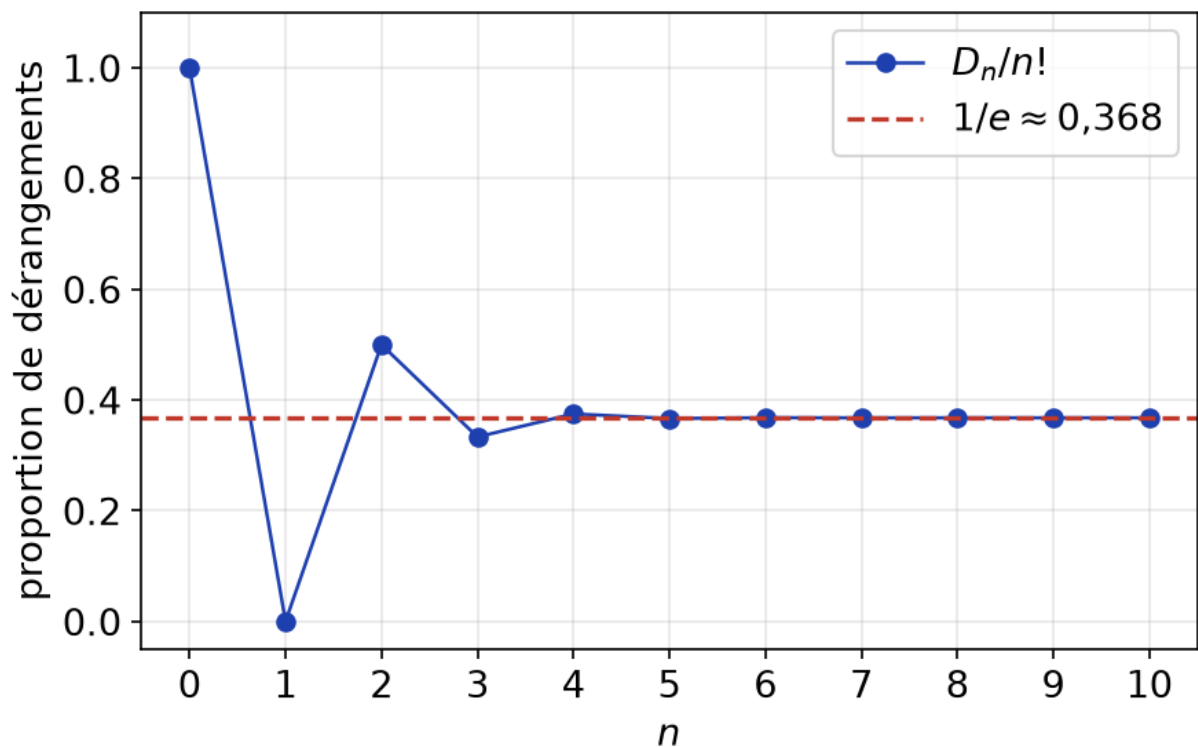
$$\sum_{k=0}^n \frac{D_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = 1.$$

Ainsi $e^x f(x) = \sum x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in]-1, 1[$.

5. On a donc $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$. D'après l'exercice 5, question 4, avec $a_k = \frac{(-1)^k}{k!}$, on obtient $\frac{e^{-x}}{1-x} = \sum \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n$. Par unicité des coefficients, $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. Ensuite, $D_4 = 24 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = 12 - 4 + 1$ et $D_5 = 5 D_4 - 1$, car $D_n = n D_{n-1} + (-1)^n$ d'après la formule. Donc $D_4 = 9$ et $D_5 = 44$.
6. La suite $\frac{D_n}{n!}$ est la somme partielle de la série de e^{-1} , donc $\frac{D_n}{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$. De plus, le reste d'une série alternée dont le terme décroît strictement en valeur absolue est strictement majoré par son premier terme. Ainsi

$$\left| D_n - \frac{n!}{e} \right| = n! \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| < \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Comme D_n est un entier à distance strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ de $\frac{n!}{e}$, D_n est l'entier le plus proche de $\frac{n!}{e}$ pour $n \geq 1$. Par exemple, $\frac{120}{e} \approx 44,15$. La figure ci-dessous montre la convergence rapide de $\frac{D_n}{n!}$ vers $\frac{1}{e}$.



Corrigé de l'exercice 20 : Problème : suite récurrente linéaire d'ordre deux

- On raisonne par récurrence double. On a $0 \leq u_0 = 0 \leq 1$ et $0 \leq u_1 = 1 \leq 2$. Si $0 \leq u_n \leq 2^n$ et $0 \leq u_{n+1} \leq 2^{n+1}$, alors $0 \leq u_{n+2} \leq 2^{n+1} + 2^n \leq 2^{n+2}$. Ainsi $|u_n| (1/2)^n \leq 1$: la suite $(u_n (1/2)^n)$ est bornée, donc $R \geq \frac{1}{2}$.
- Pour $|x| < \frac{1}{2}$, les trois séries $f(x)$, $xf(x)$ et $x^2 f(x)$ convergent. On calcule

$$(1 - x - x^2) f(x) = u_0 + (u_1 - u_0) x + \sum_{n \geq 2} (u_n - u_{n-1} - u_{n-2}) x^n.$$

Or $u_0 = 0$, $u_1 - u_0 = 1$ et les autres coefficients sont nuls. Donc
 $(1 - x - x^2) f(x) = x$.

3. On a $\varphi + \psi = 1$ et $\varphi \psi = \frac{1-5}{4} = -1$. Donc

$$(1 - \varphi x)(1 - \psi x) = 1 - (\varphi + \psi) x + \varphi \psi x^2 = 1 - x - x^2. \text{ De plus,}$$

$$\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \psi x} = \frac{(\varphi - \psi) x}{(1 - \varphi x)(1 - \psi x)}, \text{ avec } \varphi - \psi = \sqrt{5}. \text{ Ainsi}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \psi x} \right).$$

4. Pour $|x| < \frac{1}{2}$, on a $|\varphi x| < \frac{1,62}{2} < 1$ et $|\psi x| < 1$. On peut donc développer les deux fractions en séries géométriques. Par unicité des coefficients, $u_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$ **pour tout** n .

$$\text{On vérifie : } u_1 = \frac{\varphi - \psi}{\sqrt{5}} = 1.$$

5. Comme $|\psi| < 1 < \varphi$, on a $u_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, et $u_n > 0$ pour $n \geq 1$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \varphi$, et la règle de d'Alembert donne $R = \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$. On retrouve $R \geq \frac{1}{2}$. Ce rayon est aussi la distance de 0 au pôle le plus proche de la fraction $\frac{x}{1-x-x^2}$.

Corrigé de l'exercice 21 : Régularité d'une somme au bord du disque

1. On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$, donc $R = 1$. De plus, pour $x \in [-1, 1]$, $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente. La convergence est normale sur $[-1, 1]$, et chaque terme est continu. Donc f **est définie et continue sur** $[-1, 1]$.

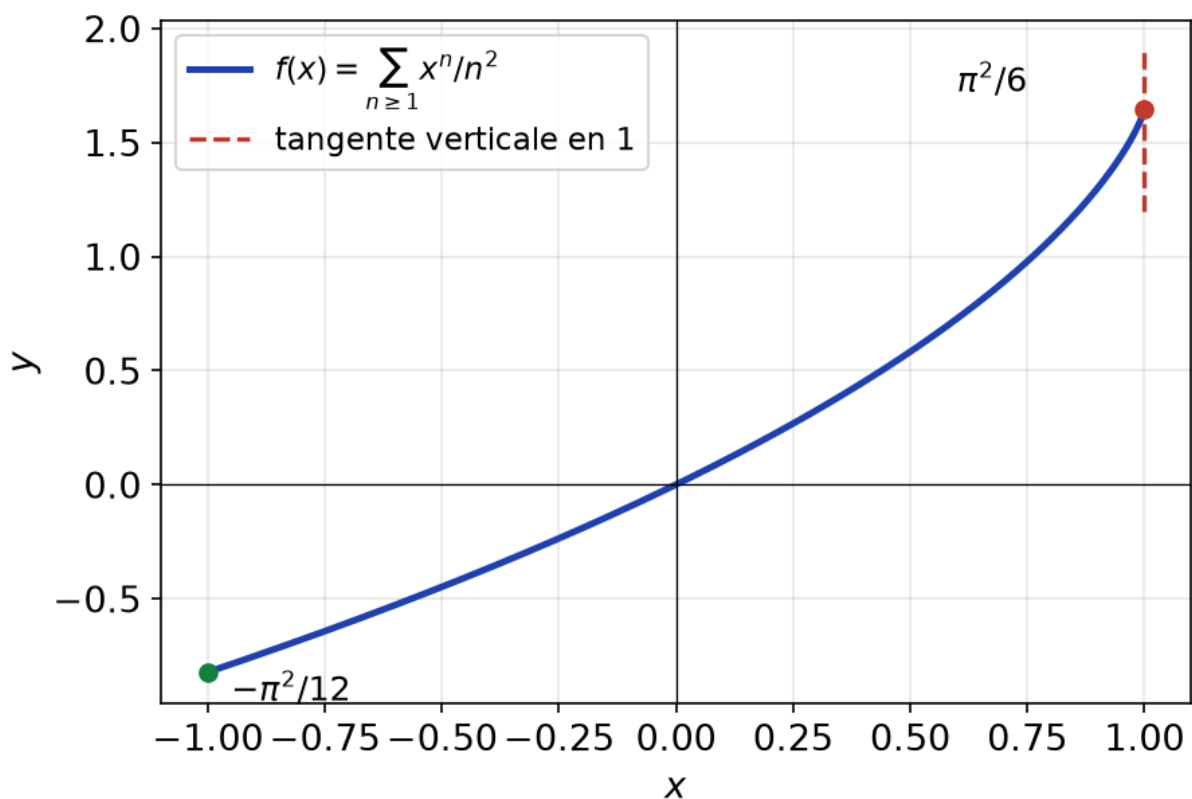
2. D'après le théorème de dérivation terme à terme, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ et

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{n}. \text{ Donc } x f'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \text{ d'après l'exercice 4.}$$

$$\text{Ainsi } f'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} \text{ pour } x \in] -1, 1[\text{ non nul.}$$

3. Pour $x \in [0, 1[$, le théorème des accroissements finis appliqué sur $[x, 1]$ fournit $c_x \in]x, 1[$ tel que $\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(c_x)$. En effet, f est continue sur $[x, 1]$ et dérivable sur $]x, 1[$. Or $f'(c) = -\frac{\ln(1-c)}{c} \rightarrow +\infty$ quand $c \rightarrow 1^-$, et $c_x \rightarrow 1$. Donc le taux d'accroissement tend vers $+\infty$. **La fonction f n'est pas dérivable à gauche en 1** : sa courbe admet une tangente verticale en ce point.

4. On a $f(1) + f(-1) = \sum_{n \geq 1} \frac{1 + (-1)^n}{n^2} = \sum_{k \geq 1} \frac{2}{(2k)^2} = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} f(1)$. Donc $f(-1) = -\frac{1}{2} f(1)$, soit $f(-1) = -\frac{\pi^2}{12}$. La figure ci-dessous résume l'étude : courbe continue sur $[-1, 1]$, valeurs extrêmes et tangente verticale en 1.



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [séries entières, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur séries entières](#)
- À maîtriser avant : [Suites et séries de fonctions](#)
- Chapitre précédent : [Suites et séries de fonctions](#)
- Chapitre suivant : [Intégrales dépendant d'un paramètre](#)
- Le même thème en maths spé : [séries entières, exercices de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)