

Séries de Fourier

Dans toute la fiche, $\mathcal{D}$ désigne l'espace des fonctions 2π -périodiques continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $f \in \mathcal{D}$, on note $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt$, $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt$ et $S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}$.

Exercice 1 : Orthogonalité des exponentielles

- Pour $n, m \in \mathbb{Z}$, calculez $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \overline{e^{imt}} dt$.
- En déduire, pour $n, m \geq 1$, les valeurs de $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt dt$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin mt dt$.
- Soit $P(x) = 3 + 2\cos x - 4\sin 2x + \cos 5x$. Calculez $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(t)^2 dt$ sans développer le carré.

Exercice 2 : Coefficients d'un polynôme trigonométrique

- Linéarisez $\sin^3 x$ et $\cos^4 x$ à l'aide des formules d'Euler.
- Donnez tous les coefficients de Fourier exponentiels c_n de $f(x) = \sin^3 x$ et de

$$g(x) = \cos^4 x .$$

3. En déduire $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 t \, dt$, puis $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^8 t \, dt$ à l'aide de la formule de Parseval appliquée à g .

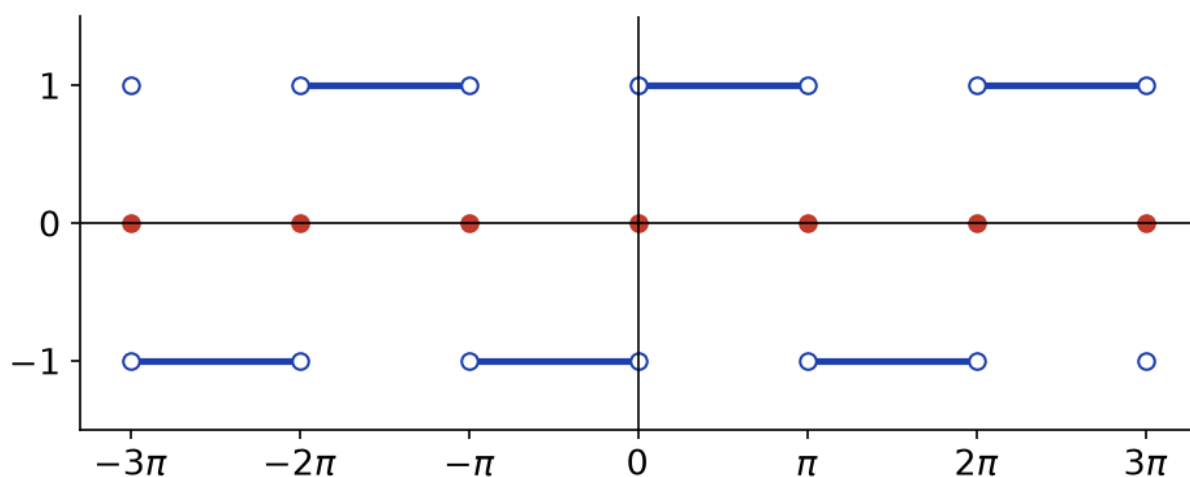
Exercice 3 : Parité et liens entre coefficients

Soit $f \in \mathcal{D}$.

- Montrez que $c_0 = \frac{a_0}{2}$ et que, pour $n \geq 1$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$.
- Montrez que si f est à valeurs réelles, alors $c_{-n} = \overline{c_n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- Montrez que si f est paire, alors $b_n = 0$ et $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$. Énoncez et justifiez le résultat analogue pour f impaire.
- Soit $h(x) = f(-x)$ et $g(x) = f(x + \pi)$. Exprimez $c_n(h)$ et $c_n(g)$ en fonction des coefficients de f .
- On suppose que $f(x + \pi) = -f(x)$ pour tout réel x . Montrez que $c_n(f) = 0$ pour tout n pair.

Exercice 4 : Coefficients d'un signal créneau

Soit f la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = 1$ sur $]0, \pi[$, $f(x) = -1$ sur $]-\pi, 0[$ et $f(0) = f(\pi) = 0$. Son graphe est représenté ci-dessous.



1. Justifiez que f est impaire et de classe C^1 par morceaux.
2. Calculez $a_n(f)$ et $b_n(f)$ pour tout n .
3. Écrivez la somme partielle $S_{2p+1}(f)$ sous forme réelle.
4. Déduisez-en les coefficients exponentiels $c_n(f)$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5 : Coefficients de la valeur absolue

Soit f la fonction 2π -périodique telle que $f(x) = |x|$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

1. Montrez que f est paire, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux.
2. Calculez $a_0(f)$, puis $a_n(f)$ pour $n \geq 1$. Que valent les $b_n(f)$?
3. Écrivez la série de Fourier de f . Quel théorème du cours assure qu'elle converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6 : Créneau : Dirichlet et Parseval

On reprend le créneau f de l'exercice 4.

1. Appliquez le théorème de Dirichlet en $x = \frac{\pi}{2}$ et déduisez-en $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
2. Que donne le théorème de Dirichlet en $x = 0$? Le résultat est-il cohérent ?
3. À l'aide de la formule de Parseval, calculez $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.
4. En séparant les termes pairs et impairs, déduisez-en $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
5. La série de Fourier de f converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$? Justifiez.

Exercice 7 : Valeur absolue et somme des inverses des carrés impairs

On reprend la fonction f de l'exercice 5.

1. En évaluant la série de Fourier en $x = 0$, calculez $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.
2. Avec la formule de Parseval, calculez $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$, puis $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
3. Montrez que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout réel x , $|f(x) - S_{2p+1}(f)(x)| \leq \frac{2}{\pi(2p+1)}$. On pourra comparer la somme d'une série à une intégrale.
4. Déterminez un entier p qui garantit une erreur uniforme au plus 10^{-2} .

Exercice 8 : Fonction en dents de scie

Soit f la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = x$ sur $]-\pi, \pi[$ et $f(\pi) = 0$.

1. Calculez directement $c_n(f)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, puis retrouvez $a_n(f)$ et $b_n(f)$.
2. Appliquez le théorème de Dirichlet : donnez la somme de la série de Fourier en tout point de $\mathbb{R}$.
3. Retrouvez la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
4. Appliquez la formule de Parseval et déduisez-en $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
5. La série $\sum |b_n(f)|$ converge-t-elle ? Commentez au regard du cours.

Exercice 9 : Développement de x^2 et somme des $1/n^4$

Soit f la fonction 2π -périodique telle que $f(x) = x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

1. Calculez les coefficients de Fourier trigonométriques de f .
2. Justifiez que la série de Fourier converge normalement vers f et écrivez l'égalité obtenue sur $[-\pi, \pi]$.
3. En choisissant deux valeurs de x , calculez $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.
4. Calculez $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ par la formule de Parseval.
5. En intégrant terme à terme l'égalité de la question 2 entre 0 et x , montrez que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$: $x^3 - \pi^2 x = 12 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n^3}$.

Exercice 10 : Somme de la série des $\sin(nx)/n$

Soit g la fonction 2π -périodique définie par $g(x) = \frac{\pi - x}{2}$ pour $x \in]0, 2\pi[$ et $g(0) = 0$.

1. Montrez que g est impaire et de classe C^1 par morceaux.

2. Calculez $b_n(g)$ pour $n \geq 1$.

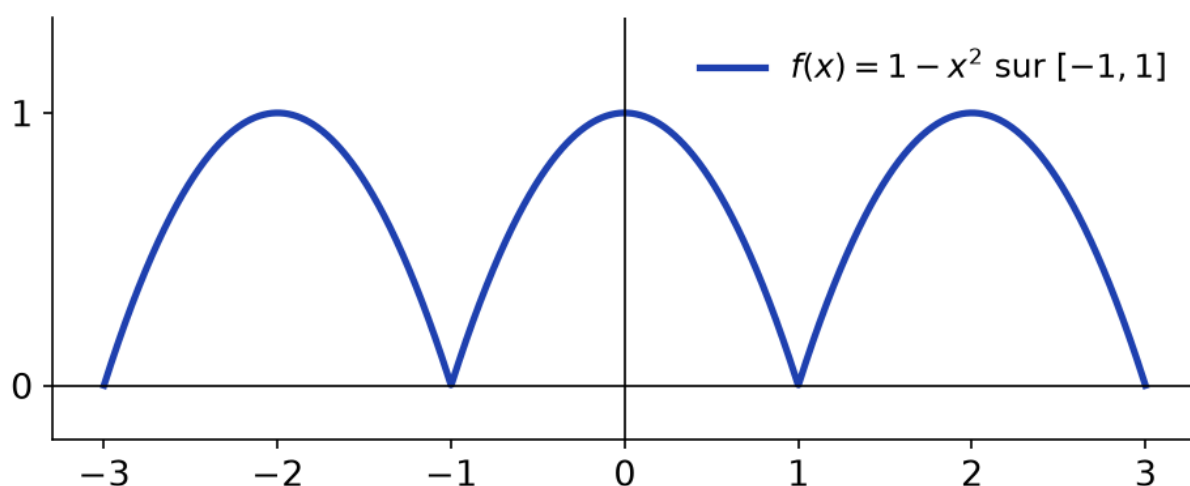
3. En déduire, pour tout $x \in]0, 2\pi[$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$. Que vaut cette série en $x = 0$?

4. Calculez $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3}$.

5. Soit f la dent de scie de l'exercice 8. Vérifiez que $g(x) = \frac{1}{2}f(\pi - x)$ pour tout réel x et retrouvez $b_n(g)$ à partir des coefficients de f .

Exercice 11 : Période quelconque : une parabole de période 2

Soit f la fonction 2 -périodique telle que $f(x) = 1 - x^2$ pour $x \in [-1, 1]$, représentée ci-dessous. On pose $\omega = \pi$, $a_n(f) = \int_{-1}^1 f(t) \cos(n\pi t) dt$ et $b_n(f) = \int_{-1}^1 f(t) \sin(n\pi t) dt$.



1. Calculez $a_0(f)$ et $a_n(f)$ pour $n \geq 1$. Que valent les $b_n(f)$?

2. Justifiez que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\pi x)$.

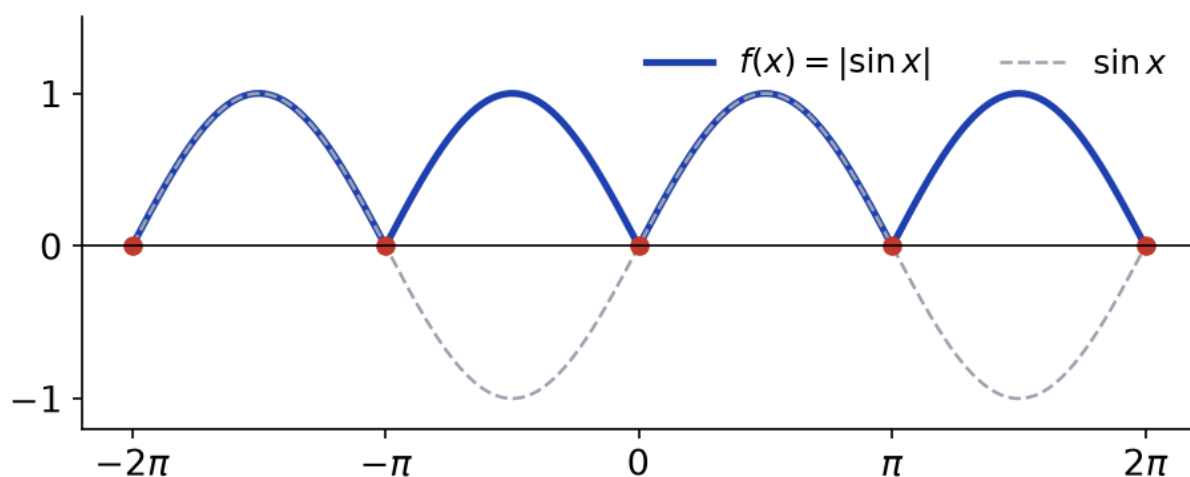
3. Déduisez-en $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

4. La formule de Parseval s'écrit ici $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$. Retrouvez

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 12 : Valeur absolue du sinus

Soit $f(x) = |\sin x|$, vue comme une fonction 2π -périodique. Son graphe figure ci-dessous.



1. Montrez que f est paire, continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et π -périodique.

2. Calculez $a_n(f)$ pour tout $n \geq 0$. On distinguera n pair et n impair.

3. Montrez que, pour tout réel x , $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}$.

4. Calculez $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$ de deux façons, puis $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}$.

5. Calculez $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}$.

Exercice 13 : Inégalité de Bessel et coefficients impossibles

1. Écrivez l'inégalité de Bessel à l'aide des coefficients a_n et b_n d'une fonction $f \in \mathcal{D}$ à valeurs réelles.

2. Montrez qu'il n'existe aucune fonction $f \in \mathcal{D}$ telle que $b_n(f) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$.

3. Même question avec $b_n(f) = \frac{1}{\ln(n+1)}$.

4. Soit $f \in \mathcal{D}$. Montrez que $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin^2(nt) dt \rightarrow \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$ quand $n \rightarrow +\infty$.

5. Soit f continue et de classe C^1 par morceaux, 2π -périodique. Montrez que $n c_n(f) \rightarrow 0$ quand $|n| \rightarrow +\infty$.

Exercice 14 : Meilleure approximation en moyenne quadratique

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $I(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} (t - a \sin t - b \sin 2t)^2 dt$.

1. Interprétez $I(a, b)$ comme le carré d'une distance à un sous-espace, pour une forme que l'on précisera.
2. Déterminez le couple (a, b) qui minimise I , ainsi que la valeur du minimum.
3. Plus généralement, pour $N \geq 1$, calculez $m_N = \min_P \int_{-\pi}^{\pi} (t - P(t))^2 dt$, où P parcourt les polynômes trigonométriques réels de degré au plus N .
4. Montrez que $m_N \rightarrow 0$ et retrouvez ainsi une somme classique.

Exercice 15 : Noyau de Dirichlet

Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $D_N(t) = \sum_{k=-N}^N e^{ikt}$.

1. Montrez que $D_N(t) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}$ pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et que $D_N(0) = 2N + 1$.

2. Calculez $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt$ et $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)^2 dt$.

3. Montrez que pour $f \in \mathcal{D}$ et $x \in \mathbb{R}$, $S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_N(u) du$.

4. Montrez que $\int_0^{\pi} |D_N(t)| dt \geq \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$. Qu'en déduisez-vous quand $N \rightarrow +\infty$?

Exercice 16 : Une fraction rationnelle en cosinus

Soit $f(x) = \frac{1}{5 - 4\cos x}$, définie et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.

1. Montrez que, pour tout réel x , $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n|} e^{inx} = \frac{3}{5 - 4\cos x}$, la série convergeant normalement.

2. Déduisez-en $c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3. Calculez $\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{5 - 4\cos x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Calculez $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 - 4\cos x)^2}$ grâce à la formule de Parseval.

Exercice 17 : Équation différentielle périodique sans résonance

Soit f la fonction de l'exercice 9 (x^2 périodisée). On cherche les fonctions y de classe C^2 , 2π -périodiques, telles que $y'' + 2y = f$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit y une telle solution. Montrez que $c_n(y'') = -n^2 c_n(y)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2. Déterminez les coefficients de Fourier de y et montrez qu'il existe au plus une solution.

- Montrez que la série obtenue définit une fonction de classe C^2 solution du problème.
- Retrouvez l'unicité en montrant qu'aucune solution non nulle de $y'' + 2y = 0$ n'est 2π -périodique.

Exercice 18 : Équation différentielle et résonance

Soit $f(x) = |\sin x|$, dont les coefficients ont été calculés à l'exercice 12. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'équation $(E_\lambda): y'' + \lambda y = f$.

- Montrez que (E_4) n'admet aucune solution 2π -périodique.
- Montrez que toutes les solutions de (E_9) sont 2π -périodiques et donnez-les sous forme de séries.
- Déterminez l'ensemble des réels λ pour lesquels (E_λ) admet au moins une solution 2π -périodique.

Exercice 19 : Exponentielle et somme des $1/(n^2 + a^2)$

Soit $a > 0$ et f la fonction 2π -périodique telle que $f(x) = e^{ax}$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

- Montrez que $c_n(f) = \frac{(-1)^n \operatorname{sh}(a\pi)}{\pi(a - in)}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

- Appliquez le théorème de Dirichlet en $x = \pi$ et déduisez-en

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi \coth(a\pi)}{2a} - \frac{1}{2a^2}.$$

- Vérifiez que la formule de Parseval redonne le même résultat.

- En faisant tendre a vers 0 , retrouvez $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Justifiez le passage à la limite.

Exercice 20 : Convergence normale pour une fonction C^1 par morceaux

Soit f une fonction 2π -périodique, continue et de classe C^1 par morceaux. On note

$$|g|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g|^2.$$

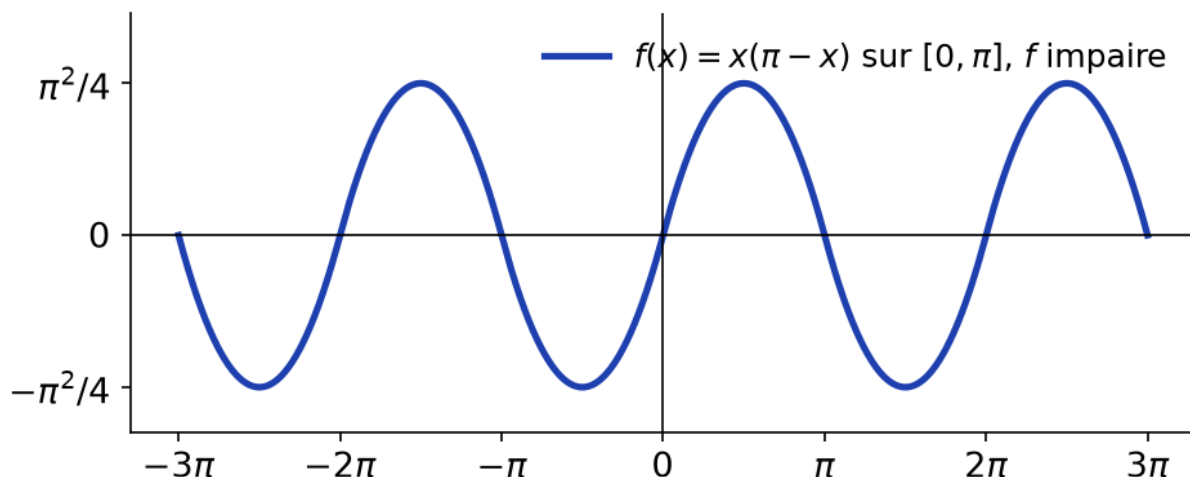
1. Démontrez que $c_n(f') = in c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
2. Montrez que $\sum_{n \neq 0} |c_n(f)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}} |f'|_2$.
3. Montrez que, pour tout $N \geq 1$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_N(f)(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{N}} |f'|_2$.
4. Appliquez ce résultat à la fonction de l'exercice 5 et comparez avec la majoration de l'exercice 7.
5. Expliquez pourquoi l'hypothèse de continuité ne peut pas être supprimée.

Exercice 21 : Inégalité de Wirtinger

1. Soit f une fonction 2π -périodique à valeurs réelles, continue et de classe C^1 par morceaux, telle que $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$. Montrez que $\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt \leq \int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt$.
2. Déterminez les fonctions de la question 1 pour lesquelles l'égalité a lieu.
3. Soit g de classe C^1 sur $[0, \pi]$, à valeurs réelles, avec $g(0) = g(\pi) = 0$. En prolongeant g convenablement, montrez que $\int_0^{\pi} g(t)^2 dt \leq \int_0^{\pi} g'(t)^2 dt$.
4. Vérifiez cette dernière inégalité pour $g(t) = t(\pi - t)$.

Exercice 22 : Problème : valeurs de $\zeta(6)$ et d'une série alternée

Soit f la fonction 2π -périodique et impaire telle que $f(x) = x(\pi - x)$ pour $x \in [0, \pi]$. Son graphe est tracé ci-dessous.



1. Justifiez que f est bien définie, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux.
2. Montrez que $b_n(f) = \frac{8}{\pi n^3}$ si n est impair et $b_n(f) = 0$ si n est pair.
3. Justifiez l'égalité $f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}$ pour tout réel x , avec convergence normale.
4. Calculez $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$.
5. Calculez $\int_0^\pi t^2(\pi - t)^2 dt$, puis $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^6}$.
6. Déduisez-en $\zeta(6) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.
7. Montrez que $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \frac{8}{\pi} \sin x \right| \leq \frac{14}{27\pi}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [séries de Fourier, cours de maths en L2](#)
- À maîtriser avant : [Suites et séries de fonctions](#), [Produit scalaire et espaces euclidiens](#)
- Chapitre précédent : [Isométries, endomorphismes symétriques et théorème spectral](#)
- Chapitre suivant : [Formes quadratiques, coniques et quadriques](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)