

Séries de Fourier

Les notations sont celles de la fiche d'exercices. On rappelle la forme réelle de la formule de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Corrigé de l'exercice 1 : Orthogonalité des exponentielles

1. On a $e^{int} \overline{e^{imt}} = e^{i(n-m)t}$. Si $n = m$, l'intégrale vaut $\int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 2\pi$. Sinon, posons $k = n - m \neq 0$. Alors $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = \frac{e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}}{ik} = \frac{2i \sin(k\pi)}{ik} = 0$. **L'intégrale vaut 2π si $n = m$ et 0 sinon.**

2. D'abord, $\cos nt \cos mt = \frac{1}{2}(\cos(n-m)t + \cos(n+m)t)$. Or $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt dt = 0$ pour $k \neq 0$ et vaut 2π pour $k = 0$. Comme $n + m \geq 2$, on obtient π si $n = m$ et 0 sinon. De même, $\sin nt \sin mt = \frac{1}{2}(\cos(n-m)t - \cos(n+m)t)$ donne le même résultat. Enfin, $t \rightarrow \cos nt \sin mt$ est impaire, donc son intégrale est nulle. **Ainsi**
 $\int \cos nt \cos mt = \int \sin nt \sin mt = \pi \delta_{nm}$ **et** $\int \cos nt \sin mt = 0$.

3. Le polynôme P est déjà écrit sous forme réelle : $\frac{a_0}{2} = 3$, $a_1 = 2$, $b_2 = -4$, $a_5 = 1$, les autres coefficients étant nuls. Par orthogonalité, le carré de la norme est la somme des carrés des coordonnées : $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P^2 = 3^2 + \frac{1}{2}(2^2 + 4^2 + 1^2) = 9 + \frac{21}{2}$. **Donc**

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(t)^2 dt = \frac{39}{2}.$$

Point de méthode : pour un polynôme trigonométrique, la formule de Parseval n'est qu'une conséquence directe de l'orthonormalité ; elle évite de développer des carrés fastidieux.

Corrigé de l'exercice 2 : Coefficients d'un polynôme trigonométrique

1. D'une part, $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i}$. En regroupant,
 $\sin^3 x = -\frac{1}{4} \cdot \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} + \frac{3}{4} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. D'autre part,
 $\cos^4 x = \frac{1}{16}(e^{ix} + e^{-ix})^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix})$. Ainsi
 $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ et $\cos^4 x = \frac{3 + 4\cos 2x + \cos 4x}{8}$.

2. Par unicité des coefficients d'un polynôme trigonométrique, on lit les c_n dans les écritures exponentielles. Comme $\frac{1}{-8i} = \frac{i}{8}$, on a pour f : $c_3 = \frac{i}{8}$, $c_1 = -\frac{3i}{8}$, $c_{-1} = \frac{3i}{8}$, $c_{-3} = -\frac{i}{8}$, et $c_n = 0$ sinon. Pour g : $c_0 = \frac{3}{8}$, $c_{\pm 2} = \frac{1}{4}$, $c_{\pm 4} = \frac{1}{16}$, et $c_n = 0$ sinon. On vérifie au passage que $c_{-n} = \overline{c_n}$, car f et g sont réelles.

3. D'abord, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 t \, dt = 2\pi c_0(g) = \frac{3\pi}{4}$. Ensuite, $\cos^8 = g^2$, et Parseval donne
 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^2 = \sum |c_n(g)|^2 = \frac{9}{64} + 2 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{256}$. Or cette somme vaut
 $\frac{36 + 32 + 2}{256} = \frac{70}{256} = \frac{35}{128}$. Donc $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 t \, dt = \frac{3\pi}{4}$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^8 t \, dt = \frac{35\pi}{64}$.

Corrigé de l'exercice 3 : Parité et liens entre coefficients

1. Pour $n = 0$, $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int f = \frac{a_0}{2}$. Pour $n \geq 1$, on écrit $e^{-int} = \cos nt - i \sin nt$.
Ainsi, $c_n = \frac{1}{2\pi} \int f \cos nt - \frac{i}{2\pi} \int f \sin nt = \frac{a_n - ib_n}{2}$. De même,
 $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$ donne $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$. Les trois formules sont établies.

2. Si f est réelle, $\overline{c_n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} \overline{e^{-int}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt = c_{-n}$. **Donc**
 $c_{-n} = \overline{c_n}$ **pour tout** n .

3. Si f est paire, $t \rightarrow f(t) \sin nt$ est impaire, donc $b_n = 0$. En revanche,

$t \rightarrow f(t) \cos nt$ est paire, donc $\int_{-\pi}^{\pi} = 2 \int_0^{\pi}$. **Ainsi** $b_n = 0$ **et**

$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt$. Si f est impaire, les rôles s'échangent : $a_n = 0$ **et**

$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt$.

4. Avec le changement de variable $u = -t$, on obtient

$c_n(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{inu} du = c_{-n}(f)$. Ensuite, avec $u = t + \pi$ et l'invariance de

l'intégrale sur une période, $c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) e^{-in(u-\pi)} du = e^{in\pi} c_n(f)$. **Donc**

$c_n(h) = c_{-n}(f)$ **et** $c_n(g) = (-1)^n c_n(f)$.

5. L'hypothèse s'écrit $g = -f$. Par linéarité et la question précédente,

$(-1)^n c_n(f) = -c_n(f)$. Pour n pair, cela donne $2c_n(f) = 0$. **Les coefficients d'indice pair sont nuls.** Par exemple, le créneau de l'exercice 4 vérifie cette propriété.

Corrigé de l'exercice 4 : Coefficients d'un signal créneau

1. Pour $x \in]0, \pi[$, $-x \in]-\pi, 0[$, donc $f(-x) = -1 = -f(x)$. De plus, $f(0) = 0$ et $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Par périodicité, f est impaire sur $\mathbb{R}$. Enfin, f est constante sur $]-\pi, 0[$ et sur $]0, \pi[$: ses restrictions se prolongent en fonctions constantes, donc C^1 . **La fonction f est impaire et de classe C^1 par morceaux.**

2. Comme f est impaire, $a_n = 0$. Ensuite,

$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt dt = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos nt}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n}$. **Ainsi** $a_n = 0$, $b_n = \frac{4}{\pi n}$ **pour**
 n **impair et** $b_n = 0$ **pour** n **pair.**

3. Seuls les indices impairs $n = 2k + 1 \leq 2p + 1$ interviennent. **Donc**

$$S_{2p+1}(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^p \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

4. Pour $n \geq 1$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = -\frac{ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \frac{ib_n}{2}$. Pour n impair positif,

$c_n = -\frac{2i}{\pi n}$ et $c_{-n} = \frac{2i}{\pi n} = -\frac{2i}{\pi(-n)}$. **Ainsi $c_n(f) = -\frac{2i}{\pi n}$ pour tout n impair de $\mathbb{Z}$, et $c_n(f) = 0$ pour n pair.**

Corrigé de l'exercice 5 : Coefficients de la valeur absolue

1. La fonction $x \rightarrow |x|$ est paire sur $[-\pi, \pi]$. Elle prend la même valeur π en $-\pi$ et en π , donc son prolongement 2π -périodique est bien défini et continu en $\pm\pi$. Par ailleurs, f est affine sur $[-\pi, 0]$ et sur $[0, \pi]$. **Ainsi f est paire, continue et de classe C^1 par morceaux.**

2. Comme f est paire, $b_n = 0$. D'abord, $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \, dt = \pi$. Ensuite, pour $n \geq 1$, une

intégration par parties donne $\int_0^{\pi} t \cos nt \, dt = \left[\frac{t \sin nt}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$. Par

conséquent, $a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$. **On obtient $a_0 = \pi$, $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$ pour n impair, $a_n = 0$ pour $n \geq 2$ pair, et $b_n = 0$.**

3. La série de Fourier s'écrit $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$. Comme f est continue et C^1 par

morceaux, **le théorème de convergence normale assure que cette série converge**

normalement vers f sur $\mathbb{R}$. On le vérifie aussi directement : le terme général est majoré par $\frac{4}{\pi(2k+1)^2}$.

Corrigé de l'exercice 6 : Créneau : Dirichlet et Parseval

1. La fonction f est C^1 par morceaux et continue en $\frac{\pi}{2}$. Le théorème de Dirichlet donne donc

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{2k+1}. \text{ Or } \sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^k. \text{ Ainsi}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

2. En 0 , les limites sont $f(0^+) = 1$ et $f(0^-) = -1$, de demi-somme 0 . Le théorème annonce donc que la série vaut 0 en 0 . **C'est cohérent, car tous les termes $\sin(n \cdot 0)$ sont nuls.**

3. On a $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 = 1$, car $f^2 = 1$ sauf en un nombre fini de points par période. Parseval donne

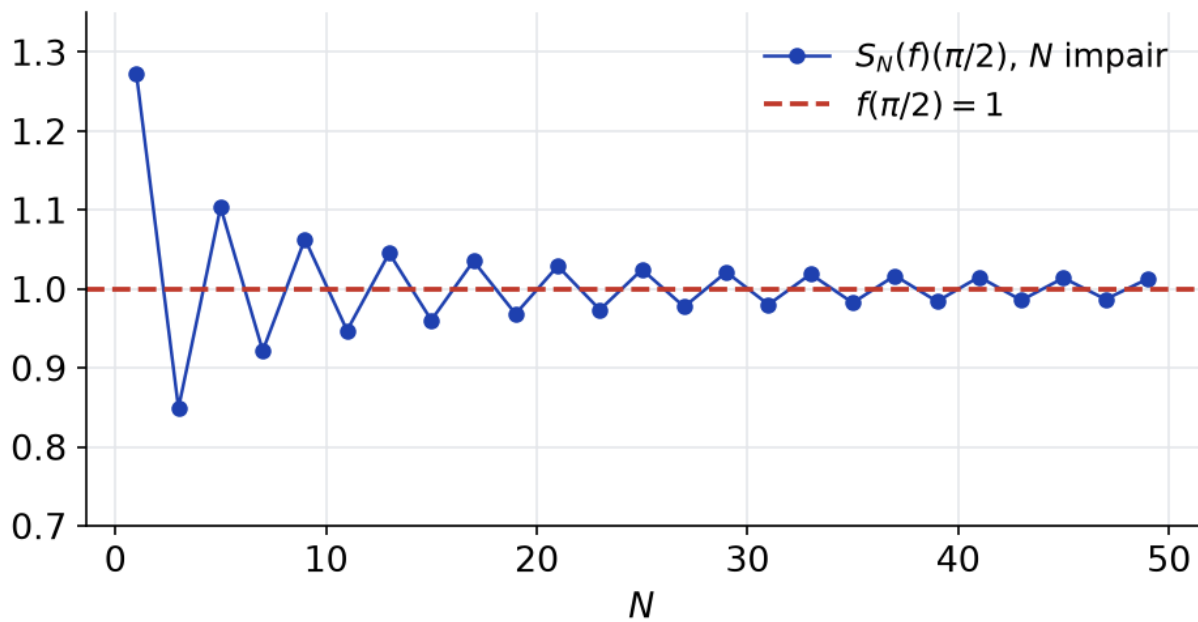
$$1 = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \frac{16}{\pi^2 (2k+1)^2}. \text{ Donc } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

4. Notons $S = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, qui converge. Les termes pairs donnent $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{4k^2} = \frac{S}{4}$. Ainsi

$$S = \frac{S}{4} + \frac{\pi^2}{8}, \text{ d'où } \frac{3S}{4} = \frac{\pi^2}{8}. \text{ Finalement } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Les sommes partielles $S_N(f)$ sont continues. Si elles convergeaient uniformément, leur limite serait continue. Or, par Dirichlet, cette limite est f elle-même (qui vaut déjà la demi-somme aux sauts), et f est discontinue en 0 . **La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$.**

La figure ci-dessous montre les valeurs $S_N(f)\left(\frac{\pi}{2}\right)$: elles oscillent autour de 1 et s'en rapprochent lentement, au rythme d'une série alternée.



Corrigé de l'exercice 7 : Valeur absolue et somme des inverses des carrés impairs

1. La série converge vers f en tout point (exercice 5). En $x = 0$, on obtient

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}. \text{ Donc } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2. D'une part, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}$. D'autre part, $\frac{a_0^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$ et

$$\frac{1}{2} \sum a_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \frac{16}{\pi^2 (2k+1)^4} = \frac{8}{\pi^2} T, \text{ où } T = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4}. \text{ Ainsi}$$

$$\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} = \frac{8T}{\pi^2}, \text{ d'où } T = \frac{\pi^4}{96}. \text{ Ensuite, avec } U = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}, \text{ les termes pairs}$$

$$\text{valent } \frac{U}{16}. \text{ Donc } \frac{15U}{16} = \frac{\pi^4}{96}. \text{ On obtient } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

3. Par convergence de la série en tout point, $f(x) - S_{2p+1}(f)(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{k \geq p+1} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$

$$\text{Donc } |f(x) - S_{2p+1}(f)(x)| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq p+1} \frac{1}{(2k+1)^2}. \text{ Comme } t \rightarrow \frac{1}{(2t+1)^2} \text{ décroît,}$$

$$\frac{1}{(2k+1)^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{(2t+1)^2}. \text{ En sommant, } \sum_{k \geq p+1} \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \int_p^{+\infty} \frac{dt}{(2t+1)^2} = \frac{1}{2(2p+1)}. \text{ Ainsi } |f(x) - S_{2p+1}(f)(x)| \leq \frac{2}{\pi(2p+1)} \text{ pour tout réel } x.$$

4. Il suffit que $\frac{2}{\pi(2p+1)} \leq 10^{-2}$, c'est-à-dire $2p+1 \geq \frac{200}{\pi} \approx 63,7$. Le plus petit entier impair convenable est 65. **Le choix $p = 32$, soit $S_{65}(f)$, garantit une erreur uniforme au plus 10^{-2} .**

Corrigé de l'exercice 8 : Fonction en dents de scie

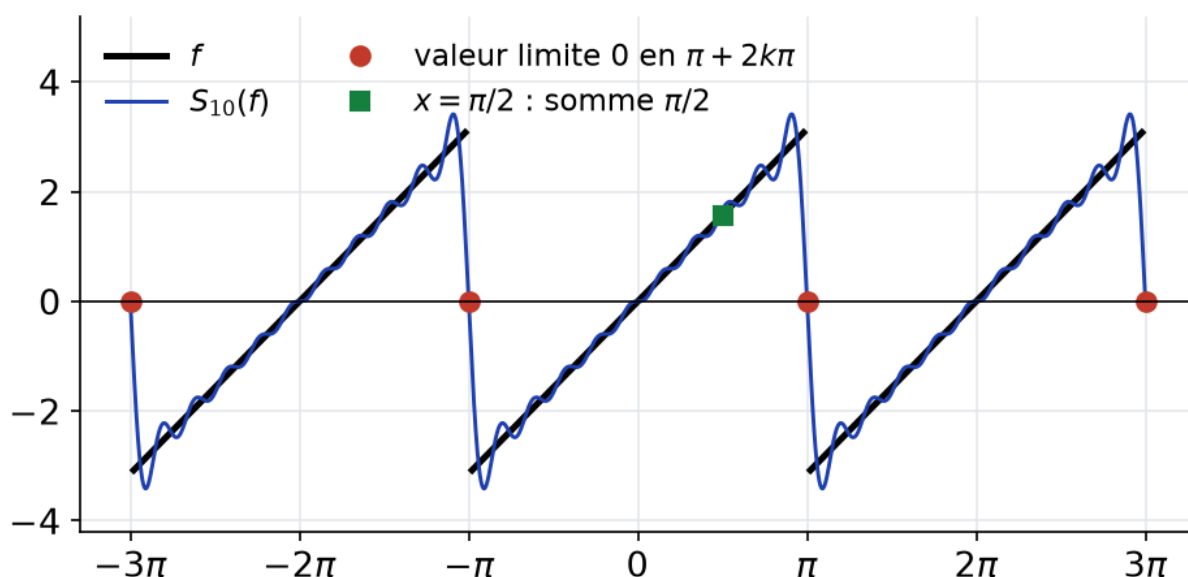
- On a $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0$. Pour $n \neq 0$, on intègre par parties :

$$\int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int} dt = \left[\frac{t e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt.$$
La seconde intégrale est nulle. Le crochet vaut $\frac{\pi(-1)^n + \pi(-1)^n}{-in} = \frac{2i\pi(-1)^n}{n}$. Donc $c_n = \frac{i(-1)^n}{n}$. Ensuite,
 $a_n = c_n + c_{-n} = 0$ et $b_n = i(c_n - c_{-n}) = i \cdot \frac{2i(-1)^n}{n} = -\frac{2(-1)^n}{n}$. **Ainsi $c_n = \frac{i(-1)^n}{n}$ ($n \neq 0$), $a_n = 0$ et $b_n = -\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$.**
- La fonction f est C^1 par morceaux (affine sur $]-\pi, \pi[$). Elle est continue en tout $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ et, en π , la demi-somme des limites vaut $\frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0 = f(\pi)$. Le théorème de Dirichlet donne donc la convergence en tout point vers f . **Pour tout réel x ,**

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = f(x); \text{ en particulier cette somme vaut } x \text{ sur }]-\pi, \pi[\text{ et } 0 \text{ en } \pm\pi.$$
- En $x = \frac{\pi}{2}$, $\sin \frac{n\pi}{2}$ vaut 0 pour n pair et $(-1)^k$ pour $n = 2k+1$. Comme $(-1)^{n+1} = 1$ pour n impair, on a $\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. **On retrouve $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.**
- D'une part, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}$. D'autre part, $\frac{1}{2} \sum b_n^2 = 2 \sum \frac{1}{n^2}$. **Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.**
- On a $|b_n| = \frac{2}{n}$, terme général d'une série divergente. **La série $\sum |b_n|$ diverge : la série**

de Fourier ne converge pas normalement. C'est attendu, car f est discontinue. En effet, une convergence normale serait uniforme et donnerait une somme continue.

La figure suivante superpose f et $S_{10}(f)$. On y voit la convergence vers 0 aux points de saut et la valeur $\frac{\pi}{2}$ atteinte en $x = \frac{\pi}{2}$.



Corrigé de l'exercice 9 : Développement de x^2 et somme des $1/n^4$

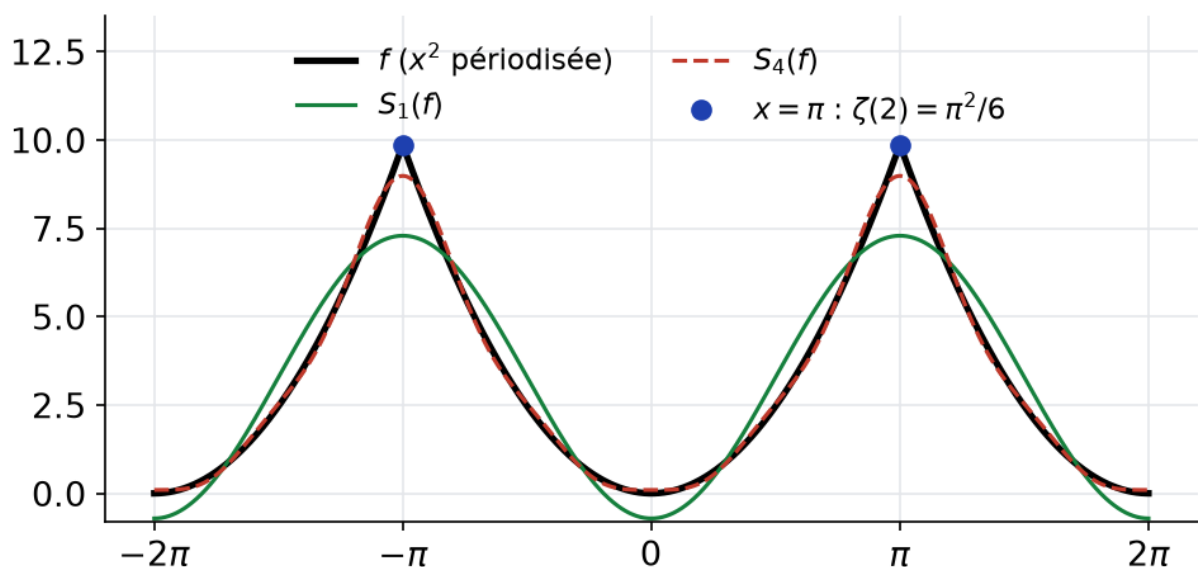
- La fonction f est paire, donc $b_n = 0$. D'abord, $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3}$. Ensuite, pour $n \geq 1$, une primitive de $t^2 \cos nt$ est $\frac{t^2 \sin nt}{n} + \frac{2t \cos nt}{n^2} - \frac{2 \sin nt}{n^3}$. Entre 0 et π , elle varie de $\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}$. Donc $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$ pour $n \geq 1$, et $b_n = 0$.
- Comme $f(-\pi) = f(\pi)$, f est continue ; elle est aussi C^1 par morceaux. Par le théorème de convergence normale, sa série de Fourier converge normalement vers f ; d'ailleurs $|a_n \cos nx| \leq \frac{4}{n^2}$. Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$.

3. En $x = \pi$, $\cos n\pi = (-1)^n$, d'où $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum \frac{1}{n^2}$. En $x = 0$, on obtient $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$. Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

4. D'une part, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{\pi^4}{5}$. D'autre part, $\frac{a_0^2}{4} = \frac{\pi^4}{9}$ et $\frac{1}{2} \sum a_n^2 = 8 \sum \frac{1}{n^4}$. Donc $8 \sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} = \frac{4\pi^4}{45}$. On obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

5. La convergence étant uniforme sur $[-\pi, \pi]$, on peut intégrer terme à terme sur le segment d'extrémités 0 et x . Or $\int_0^x \cos nt dt = \frac{\sin nx}{n}$. Ainsi $\frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2 x}{3} + 4 \sum \frac{(-1)^n \sin nx}{n^3}$. En multipliant par 3 : $x^3 - \pi^2 x = 12 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n^3}$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$.

La figure ci-dessous illustre la convergence normale : dès $N = 4$, la somme partielle épouse f , y compris aux points anguleux $\pm\pi$ utilisés à la question 3.



Corrigé de l'exercice 10 : Somme de la série des $\sin(nx)/n$

1. Soit $x \in]0, 2\pi[$. Alors $2\pi - x \in]0, 2\pi[$, et par périodicité

$g(-x) = g(2\pi - x) = \frac{\pi - 2\pi + x}{2} = -\frac{\pi - x}{2} = -g(x)$. Comme $g(0) = 0$, l'impairité vaut sur $[0, 2\pi[$, donc sur $\mathbb{R}$ par périodicité. Enfin, g est affine sur $]0, 2\pi[$. **La fonction g est impaire et C^1 par morceaux.**

2. Comme g est impaire, $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi - t}{2} \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi - t) \sin nt \, dt$. Par parties,

$$\int_0^\pi (\pi - t) \sin nt \, dt = \left[-\frac{(\pi - t) \cos nt}{n} \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nt \, dt = \frac{\pi}{n}. \text{ Ainsi } b_n(g) = \frac{1}{n} \text{ (et } a_n(g) = 0 \text{).}$$

3. La fonction g est continue sur $]0, 2\pi[$. Le théorème de Dirichlet donne donc la convergence vers $g(x)$ sur cet intervalle. En 0, $g(0^+) = \frac{\pi}{2}$ et $g(0^-) = -\frac{\pi}{2}$, de demi-somme nulle.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$ pour $x \in]0, 2\pi[$, et la série vaut 0 en $x = 0$.

4. Avec $x = \frac{\pi}{3} \in]0, 2\pi[$, on obtient $\frac{\pi - \pi/3}{2} = \frac{\pi}{3}$. **Donc** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

5. Pour $x \in]0, 2\pi[$, on a $\pi - x \in]-\pi, \pi[$, donc $\frac{1}{2}f(\pi - x) = \frac{\pi - x}{2} = g(x)$. En $x = 0$, $\frac{1}{2}f(\pi) = 0 = g(0)$. Les deux fonctions étant 2π -périodiques, l'égalité vaut sur $\mathbb{R}$. Ensuite, avec $u = \pi - t$, on a $b_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int f(u) \sin(n\pi - nu) \, du$. Or $\sin(n\pi - nu) = -(-1)^n \sin nu$. Donc $b_n(g) = -\frac{(-1)^n}{2} b_n(f) = -\frac{(-1)^n}{2} \cdot \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$. **On retrouve bien** $b_n(g) = \frac{1}{n}$.

Corrigé de l'exercice 11 : Période quelconque : une parabole de période 2

1. La fonction f est paire, donc $b_n = 0$. D'abord, $a_0 = \int_{-1}^1 (1 - t^2) \, dt = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Ensuite, pour $n \geq 1$, $\int_{-1}^1 \cos(n\pi t) \, dt = 0$. Une primitive de $t^2 \cos(kt)$, avec

$k = n\pi$, est $\frac{t^2 \sin kt}{k} + \frac{2t \cos kt}{k^2} - \frac{2 \sin kt}{k^3}$. Entre -1 et 1 , elle varie de $\frac{4(-1)^n}{n^2 \pi^2}$. Par conséquent, $a_n = 0 - \frac{4(-1)^n}{n^2 \pi^2}$. **Donc** $a_0 = \frac{4}{3}$, $a_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2 \pi^2}$ pour $n \geq 1$, et $b_n = 0$.

2. Comme $f(-1) = f(1) = 0$, f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est polynomiale sur chaque $[2k-1, 2k+1]$, donc C^1 par morceaux. Le théorème de convergence normale, transposé à la période 2 , s'applique. **Ainsi** $f(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(n\pi x)$ pour tout réel x .

3. En $x = 0$: $1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. En $x = 1$, où $\cos(n\pi) = (-1)^n$:
 $0 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. **Donc** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4. D'une part, $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-t^2)^2 dt = \int_0^1 (1-2t^2+t^4) dt = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$. D'autre part,
 $\frac{a_0^2}{4} = \frac{4}{9}$ et $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \frac{8}{\pi^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$. Or $\frac{8}{15} - \frac{4}{9} = \frac{24-20}{45} = \frac{4}{45}$. **Donc**
 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{4}{45} \cdot \frac{\pi^4}{8} = \frac{\pi^4}{90}$.

Corrigé de l'exercice 12 : Valeur absolue du sinus

1. On a $|\sin(-x)| = |\sin x|$ et $|\sin(x+\pi)| = |-\sin x| = |\sin x|$. La fonction est continue comme composée de fonctions continues. Enfin, sur $[0, \pi]$, elle coïncide avec $\sin$, qui est C^1 . **La fonction f est paire, continue, π -périodique et C^1 par morceaux.**

2. Comme f est paire, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos nt dt$. On linéarise :

$$\sin t \cos nt = \frac{1}{2} (\sin((n+1)t) - \sin((n-1)t)). \text{ Pour } m \neq 0,$$

$$\int_0^{\pi} \sin mt dt = \frac{1 - (-1)^m}{m}. \text{ Si } n \text{ est pair, } n \pm 1 \text{ est impair, et l'on obtient}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n-1} \right) = \frac{-2}{n^2-1}. \text{ Si } n \geq 3 \text{ est impair, les deux intégrales sont nulles ; pour}$$

$$n = 1, \int_0^{\pi} \sin t \cos t dt = \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi} = 0. \text{ Ainsi } a_n = -\frac{4}{\pi(n^2-1)} \text{ pour } n \text{ pair (en}$$

particulier $a_0 = \frac{4}{\pi}$, $a_n = 0$ pour n impair, et $b_n = 0$.

3. La fonction f est continue et C^1 par morceaux, donc sa série de Fourier converge normalement vers elle. En posant $n = 2k$, on a $n^2 - 1 = 4k^2 - 1$. **Donc**

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} \text{ pour tout réel } x.$$

4. En $x = 0$: $0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$, d'où la valeur $\frac{1}{2}$. Autre méthode :

$$\frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k - 1} - \frac{1}{2k + 1} \right), \text{ et la somme télescopique vaut } \frac{1}{2} \cdot 1. \text{ En } x = \frac{\pi}{2},$$

$$\cos(k\pi) = (-1)^k, \text{ donc } 1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}. \text{ Ainsi } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} \text{ et}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} = \frac{2 - \pi}{4}.$$

5. D'une part, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2}$. D'autre part, $\frac{a_0^2}{4} = \frac{4}{\pi^2}$ et $\frac{1}{2} \sum_k a_{2k}^2 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}$

. Donc $\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2}$. **On obtient** $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}$, soit environ 0,1169, ce que confirme le calcul des premiers termes ($\frac{1}{9} + \frac{1}{225} + \frac{1}{1225} \approx 0,1164$).

Corrigé de l'exercice 13 : Inégalité de Bessel et coefficients impossibles

1. Pour $n \geq 1$, l'identité du parallélogramme donne

$$|c_n|^2 + |c_{-n}|^2 = \frac{|a_n - ib_n|^2 + |a_n + ib_n|^2}{4} = \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2}. \text{ L'inégalité de Bessel devient}$$

donc, pour f réelle : $\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \, dt$. Le même calcul vaut pour f complexe, avec des modules.

2. Par l'absurde, supposons qu'une telle f existe. Par Bessel, $\sum |b_n|^2$ converge. Or $|b_n|^2 = \frac{1}{n}$, terme général de la série harmonique, qui diverge. **Aucune fonction de $\mathcal{D}$ n'admet ces coefficients.** Pourtant $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$: Riemann-Lebesgue ne suffit donc pas à caractériser les coefficients de Fourier.

3. Comme $\frac{(\ln(n+1))^2}{n} \rightarrow 0$, on a $\frac{1}{(\ln(n+1))^2} \geq \frac{1}{n}$ à partir d'un certain rang. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{(\ln(n+1))^2}$ diverge. **Il n'existe donc pas non plus de telle fonction.**
4. On écrit $\sin^2(nt) = \frac{1 - \cos 2nt}{2}$. Ainsi, $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin^2(nt) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f - \frac{\pi}{2} a_{2n}(f)$. Par le lemme de Riemann-Lebesgue, $a_{2n}(f) \rightarrow 0$. **Donc l'intégrale tend vers $\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$.**
5. Par la formule de dérivation, $in c_n(f) = c_n(f')$, avec $f' \in \mathcal{D}$. Le lemme de Riemann-Lebesgue appliqué à f' donne $c_n(f') \rightarrow 0$. **Donc $n c_n(f) \rightarrow 0$: les coefficients sont $o(\frac{1}{n})$.**

Corrigé de l'exercice 14 : Meilleure approximation en moyenne quadratique

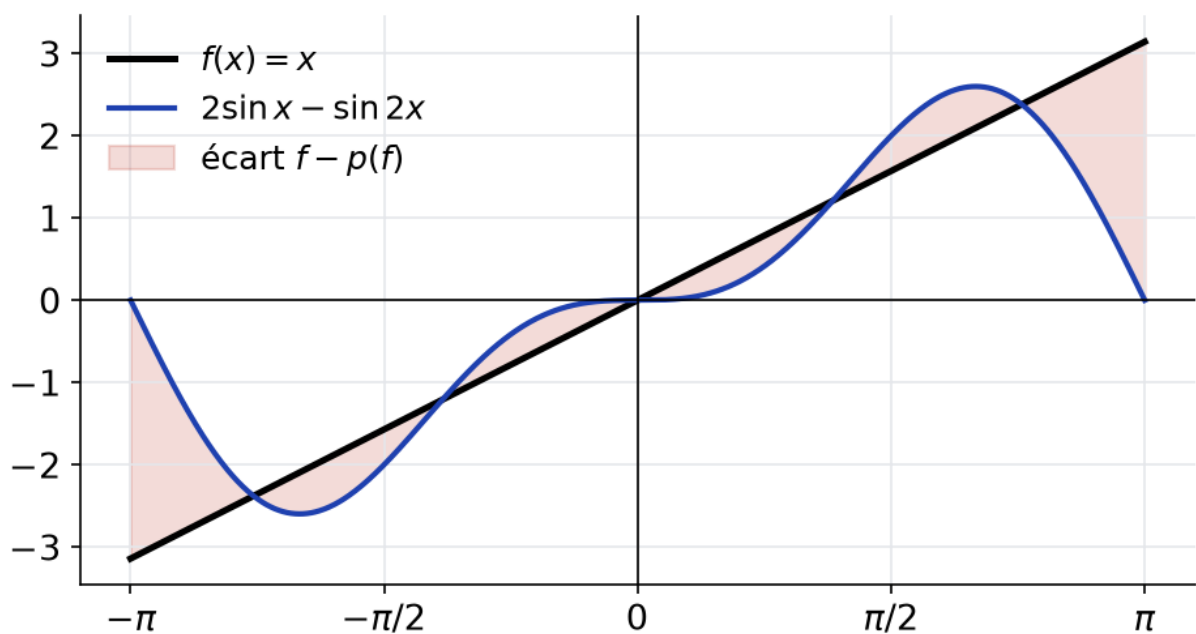
1. Notons $f(t) = t$ sur $]-\pi, \pi[$, prolongée en dent de scie, et $s_k(t) = \sin kt$. Alors $I(a, b) = 2\pi \|f - (as_1 + bs_2)\|_2^2$. **Donc $I(a, b)$ est, au facteur 2π près, le carré de la distance de f à un élément de $F = \text{Vect}(s_1, s_2)$ pour la forme**
- $$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g}.$$
2. Le minimum est atteint par la projection orthogonale $p(f)$ de f sur F . Comme (s_1, s_2) est orthogonale avec $\int_{-\pi}^{\pi} s_k^2 = \pi$, on a
- $$p(f) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f s_1}{\pi} s_1 + \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f s_2}{\pi} s_2 = b_1(f) s_1 + b_2(f) s_2.$$
- L'exercice 8 donne $b_1 = 2$ et $b_2 = -1$. Ensuite, par Pythagore, le minimum vaut
- $$\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt - \int_{-\pi}^{\pi} p(f)^2 = \frac{2\pi^3}{3} - \pi(4 + 1).$$
- Le minimum est atteint en $(a, b) = (2, -1)$ et vaut $\frac{2\pi^3}{3} - 5\pi \approx 4,96$.**
3. Le même raisonnement, avec le sous-espace des polynômes trigonométriques réels de degré au plus N , montre que le minimum est atteint en $S_N(f)$. Comme $a_n = 0$ et $b_n^2 = \frac{4}{n^2}$, on

obtient $m_N = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt - \pi \sum_{n=1}^N b_n^2$. **Donc** $m_N = \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$.

4. Par le théorème de Parseval, $|f - S_N(f)|_2 \rightarrow 0$, c'est-à-dire

$$m_N = 2\pi |f - S_N(f)|_2^2 \rightarrow 0. \text{ En passant à la limite, } 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^3}{3}. \text{ On retrouve } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

La figure ci-dessous compare f et sa meilleure approximation $p(f) = 2\sin t - \sin 2t$. L'aire colorée représente l'écart $f - p(f)$, dont l'intégrale du carré vaut environ 4,96. L'écart se concentre près de $\pm\pi$, là où la dent de scie est discontinue après périodisation.



Corrigé de l'exercice 15 : Noyau de Dirichlet

- En $t = 0$, chacun des $2N + 1$ termes vaut 1. Pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{it} \neq 1$, et la somme géométrique donne $D_N(t) = e^{-iNt} \frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1}$. On factorise $e^{i(N+\frac{1}{2})t}$ au numérateur et $e^{it/2}$ au dénominateur. Il reste $\frac{2i\sin((N+\frac{1}{2})t)}{2i\sin(t/2)}$. **Donc**

$$D_N(t) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)} \text{ et } D_N(0) = 2N + 1.$$

2. Par l'exercice 1, $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = 0$ pour $k \neq 0$. Donc $\int_{-\pi}^{\pi} D_N = 2\pi$. Ensuite, D_N est réelle et, par orthonormalité, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N^2 = |D_N|_2^2 = \sum_{k=-N}^N 1^2$. Ainsi $\int_{-\pi}^{\pi} D_N = 2\pi$ et $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N^2 = 2N + 1$.

3. Par linéarité de l'intégrale,

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt. \text{ Le changement de variable } u = x - t \text{ donne une intégrale sur } [x - \pi, x + \pi], \text{ de longueur } 2\pi. \text{ Par périodicité, on peut la ramener à } [-\pi, \pi]. \text{ Ainsi } S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_N(u) du.$$

4. Sur $]0, \pi]$, on a $0 < \sin \frac{t}{2} \leq \frac{t}{2}$, donc $|D_N(t)| \geq \frac{2|\sin((N + \frac{1}{2})t)|}{t}$. Avec

$$u = (N + \frac{1}{2})t, \text{ on obtient } \int_0^{\pi} |D_N| \geq 2 \int_0^{(N + \frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \geq 2 \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin u|}{(k+1)\pi} du. \text{ Or}$$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u| du = 2. \text{ Donc } \int_0^{\pi} |D_N| \geq \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}. \text{ Comme la série harmonique diverge, } \int_0^{\pi} |D_N(t)| dt \rightarrow +\infty. \text{ Le noyau n'est donc pas borné en moyenne : c'est pourquoi la seule}$$

continuité de f ne suffit pas à garantir la convergence, et pourquoi Dirichlet demande une hypothèse C^1 par morceaux.

Corrigé de l'exercice 16 : Une fraction rationnelle en cosinus

1. La série converge normalement, car $|2^{-|n|} e^{inx}| = 2^{-|n|}$, terme général d'une série convergente. Posons $q = \frac{e^{ix}}{2}$, avec $|q| = \frac{1}{2}$. Les termes d'indices n et $-n$ sont conjugués,

donc la somme vaut $1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n \geq 1} q^n = 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{e^{ix}}{2 - e^{ix}}$. En multipliant par le conjugué,
 $\frac{e^{ix}}{2 - e^{ix}} = \frac{e^{ix}(2 - e^{-ix})}{|2 - e^{ix}|^2} = \frac{2e^{ix} - 1}{5 - 4\cos x}$. Sa partie réelle est $\frac{2\cos x - 1}{5 - 4\cos x}$. Ainsi la somme
vaut $\frac{5 - 4\cos x + 4\cos x - 2}{5 - 4\cos x}$. **Donc** $\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} e^{inx} = \frac{3}{5 - 4\cos x}$.

2. On a $f = \frac{1}{3} \sum_n 2^{-|n|} e_n$, avec convergence uniforme. On peut donc intégrer terme à terme
contre $\overline{e_m}$, qui est bornée. Par orthonormalité, $c_m(f) = \frac{1}{3} \sum_n 2^{-|n|} \langle e_n, e_m \rangle$. **Ainsi**
 $c_n(f) = \frac{2^{-|n|}}{3}$ **pour tout** $n \in \mathbb{Z}$.

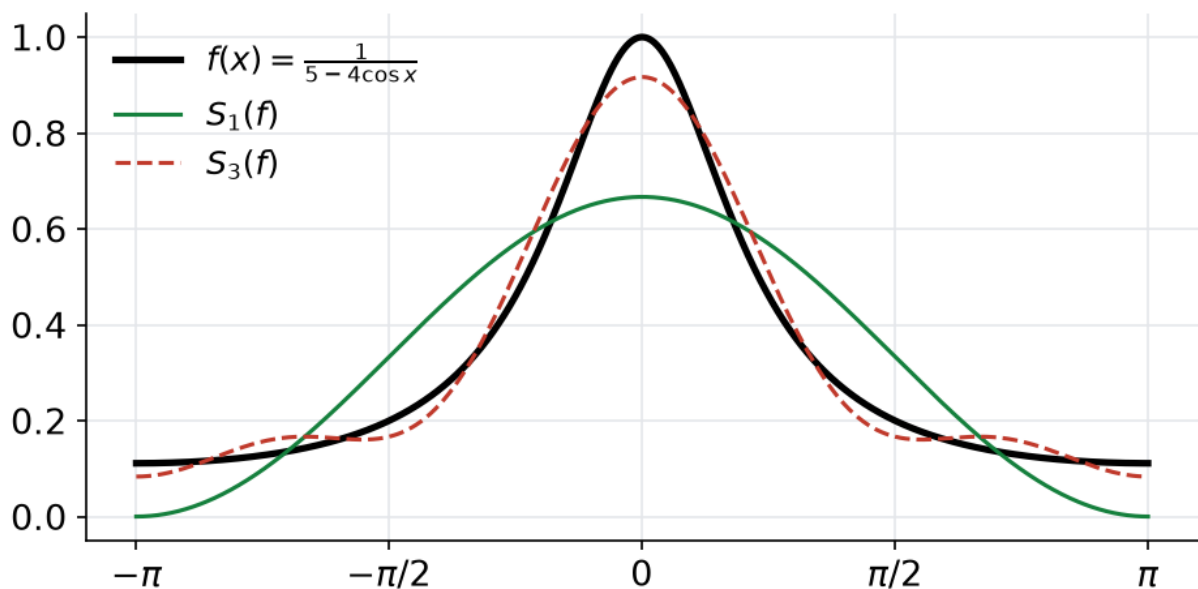
3. Par périodicité, $\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \pi a_n(f) = \pi(c_n + c_{-n}) = \frac{2\pi}{3} 2^{-n}$ pour $n \geq 1$.

Pour $n = 0$, l'intégrale vaut $2\pi c_0 = \frac{2\pi}{3}$, ce qui correspond à la même formule. **Donc**

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{5 - 4\cos x} \, dx = \frac{2\pi}{3 \cdot 2^n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

4. Par Parseval, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2 = \sum_n \frac{4^{-|n|}}{9} = \frac{1}{9} \left(1 + 2 \sum_{n \geq 1} 4^{-n} \right)$. Or $\sum_{n \geq 1} 4^{-n} = \frac{1}{3}$, donc cette
somme vaut $\frac{1}{9} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{27}$. **Ainsi** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 - 4\cos x)^2} = \frac{10\pi}{27}$.

La figure suivante montre f et ses sommes partielles $S_1(f)$ et $S_3(f)$. Les coefficients décroissent géométriquement, d'où une convergence très rapide.



Corrigé de l'exercice 17 : Équation différentielle périodique sans résonance

- La fonction y est C^2 et 2π -périodique. Donc y et y' sont continues, périodiques et C^1 . La formule de dérivation s'applique deux fois : $c_n(y'') = in c_n(y') = (in)^2 c_n(y)$.
Ainsi $c_n(y'') = -n^2 c_n(y)$.
- Par linéarité, l'équation donne $(2 - n^2)c_n(y) = c_n(f)$. Or $2 - n^2 \neq 0$ pour tout entier n , car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Donc $c_n(y) = \frac{c_n(f)}{2 - n^2}$. En forme réelle, $a_0(y) = \frac{\pi^2}{3}$,
 $a_n(y) = \frac{4(-1)^n}{n^2(2 - n^2)}$ et $b_n(y) = 0$. Deux solutions ont les mêmes coefficients et sont continues : elles sont donc égales, par le corollaire d'unicité. **Il y a au plus une solution, qui vaut nécessairement** $y(x) = \frac{\pi^2}{6} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2(2 - n^2)}$.
- Pour $n \geq 2$, $|2 - n^2| = n^2 - 2 \geq \frac{n^2}{2}$. Les termes de la série sont donc majorés par $\frac{8}{n^4}$, ceux de la série dérivée par $\frac{8}{n^3}$ et ceux de la série dérivée seconde par $\frac{8}{n^2}$. Ces trois séries convergent normalement. Par le théorème de dérivation terme à terme, y est C^2 et
 $y''(x) = -4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{2 - n^2}$. Ensuite,
 $y'' + 2y = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{2 - n^2} \left(\frac{2}{n^2} - 1 \right) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$. **Par l'exercice 9, cette somme vaut $f(x)$: la fonction y est bien l'unique solution.**

4. Les solutions de $y'' + 2y = 0$ sont $A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x)$. Posons $\theta = 2\sqrt{2}\pi$. La périodicité impose $y(2\pi) = y(0)$ et $y'(2\pi) = y'(0)$, soit $(\cos\theta - 1)A + (\sin\theta)B = 0$ et $-(\sin\theta)A + (\cos\theta - 1)B = 0$. Le déterminant vaut $(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta = 2 - 2\cos\theta$. Il est non nul, car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Donc $A = B = 0$. **La différence de deux solutions périodiques, solution périodique de l'équation homogène, est nulle : on retrouve l'unicité.**

Corrigé de l'exercice 18 : Équation différentielle et résonance

1. Par l'absurde, soit y une solution 2π -périodique de (E_4) . Comme $y'' = f - 4y$ est continue, y est C^2 . L'exercice 17 donne alors $(4 - n^2)c_n(y) = c_n(f)$. Pour $n = 2$, on obtient $0 = c_2(f) = \frac{a_2(f)}{2} = -\frac{2}{3\pi}$, ce qui est absurde. **L'équation (E_4) n'a aucune solution 2π -périodique : c'est une résonance.**
2. Les solutions de (E_9) sont $y_p + A\cos 3x + B\sin 3x$, où y_p est une solution particulière. Or les fonctions $\cos 3x$ et $\sin 3x$ sont 2π -périodiques. Il suffit donc de trouver une solution particulière périodique. L'analyse donne $(9 - n^2)c_n(y) = c_n(f)$. Pour $n = \pm 3$, $c_n(f) = 0$ car 3 est impair : aucune contradiction. On pose donc $y_p(x) = \frac{2}{9\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2kx}{(4k^2 - 1)(9 - 4k^2)}$. Comme $|9 - 4k^2| \geq 1$ et $(4k^2 - 1)|9 - 4k^2| \sim 16k^4$, la série et ses deux dérivées convergent normalement. La dérivation terme à terme donne $y_p'' + 9y_p = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} = f$. **Toutes les solutions de (E_9) sont 2π -périodiques : ce sont les fonctions $y_p + A\cos 3x + B\sin 3x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.**
3. Une condition nécessaire est $(\lambda - n^2)c_n(f) = 0$ pour tout n tel que $\lambda = n^2$. Or $c_n(f) \neq 0$ exactement pour n pair (y compris $n = 0$, où $c_0 = \frac{2}{\pi}$). Donc $\lambda = 4k^2$, $k \in \mathbb{N}$, est exclu. Réciproquement, si $\lambda \neq 4k^2$ pour tout k , la fonction $\frac{a_0(f)}{2\lambda} + \sum_{k \geq 1} \frac{a_{2k}(f)}{\lambda - 4k^2} \cos 2kx$ est bien définie. Elle est C^2 par convergence normale des séries dérivées, et solution comme à la question 2. **L'équation (E_λ) admet une solution 2π -périodique si et seulement si $\lambda \notin \{4k^2 : k \in \mathbb{N}\}$.**

Point de méthode : la résonance ne se produit qu'aux fréquences effectivement présentes dans le second membre. C'est pourquoi $\lambda = 9$ n'est pas un obstacle : $|\sin x|$ ne contient aucune

composante $\cos 3x$.

Corrigé de l'exercice 19 : Exponentielle et somme des $1/(n^2 + a^2)$

1. On a $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-in)t} dt = \frac{e^{(a-in)\pi} - e^{-(a-in)\pi}}{2\pi(a-in)}$, car $a-in \neq 0$. Or $e^{-in\pi} = e^{in\pi} = (-1)^n$. Le numérateur vaut donc $(-1)^n(e^{a\pi} - e^{-a\pi}) = 2(-1)^n \operatorname{sh}(a\pi)$. Ainsi $c_n(f) = \frac{(-1)^n \operatorname{sh}(a\pi)}{\pi(a-in)}$.

2. La fonction f est C^1 par morceaux. En π , $f(\pi^-) = e^{a\pi}$ et $f(\pi^+) = f(-\pi^+) = e^{-a\pi}$, de demi-somme $\operatorname{ch}(a\pi)$. Par Dirichlet, $S_N(f)(\pi) = \sum_{|n| \leq N} c_n (-1)^n \rightarrow \operatorname{ch}(a\pi)$. Or $(-1)^n c_n = \frac{\operatorname{sh}(a\pi)}{\pi(a-in)}$, et $\frac{1}{a-in} + \frac{1}{a+in} = \frac{2a}{a^2+n^2}$. Donc $\operatorname{ch}(a\pi) = \frac{\operatorname{sh}(a\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{a} + \sum_{n \geq 1} \frac{2a}{a^2+n^2} \right)$. En isolant la somme : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi \coth(a\pi)}{2a} - \frac{1}{2a^2}$.

3. D'une part, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2at} dt = \frac{\operatorname{sh}(2a\pi)}{2a\pi}$. D'autre part, $|c_n|^2 = \frac{\operatorname{sh}^2(a\pi)}{\pi^2(a^2+n^2)}$. Parseval donne $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi \operatorname{sh}(2a\pi)}{2a \operatorname{sh}^2(a\pi)} = \frac{\pi \coth(a\pi)}{a}$, grâce à $\operatorname{sh}(2u) = 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u$. Or le membre de gauche vaut $\frac{1}{a^2} + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{a^2+n^2}$. **On retrouve exactement la formule de la question 2.**

4. Pour $a \in]0, 1]$, $0 \leq \frac{1}{n^2+a^2} \leq \frac{1}{n^2}$: la série de fonctions de a converge normalement sur $[0, 1]$. Sa somme est donc continue en 0 , et tend vers $\sum \frac{1}{n^2}$. Par ailleurs, $\coth u = \frac{1}{u} + \frac{u}{3} + O(u^3)$. Donc $\frac{\pi \coth(a\pi)}{2a} - \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi^2}{6} + O(a^2) - \frac{1}{2a^2}$. **En passant à la limite,** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Corrigé de l'exercice 20 : Convergence normale pour une fonction C^1 par morceaux

1. Soit $-\pi = x_0 < \dots < x_p = \pi$ une subdivision adaptée. Sur chaque $[x_{k-1}, x_k]$, on intègre par parties avec le prolongement C^1 :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(t)e^{-int} dt = [f(t)e^{-int}]_{x_{k-1}}^{x_k} + in \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)e^{-int} dt. \text{ Comme } f \text{ est continue,}$$

les crochets se télescopent. Il reste $f(\pi)e^{-in\pi} - f(-\pi)e^{in\pi} = 0$ par périodicité. **Donc**

$$c_n(f') = in c_n(f).$$

2. Pour $n \neq 0$, $|c_n(f)| = \frac{|c_n(f')|}{|n|}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ℓ^2 donne

$$\sum_{n \neq 0} \frac{|c_n(f')|}{|n|} \leq \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \neq 0} |c_n(f')|^2 \right)^{1/2}. \text{ Or } \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} = 2 \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}, \text{ et}$$

Bessel appliqué à f' majore la seconde somme par $|f'|_2^2$. **Donc** $\sum_{n \neq 0} |c_n(f)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}} |f'|_2$.

3. Comme f est continue et C^1 par morceaux, Dirichlet donne $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ pour tout x . Ainsi $|f(x) - S_N(f)(x)| \leq \sum_{|n| > N} |c_n(f)|$. Le même argument qu'en 2 donne la

majoration $\left(\sum_{|n| > N} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} |f'|_2$. Enfin, par comparaison série-intégrale,

$$\sum_{n > N} \frac{1}{n^2} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{N}, \text{ donc } \sum_{|n| > N} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{N}. \text{ Ainsi } \sup_{\mathbb{R}} |f - S_N(f)| \leq \sqrt{\frac{2}{N}} |f'|_2$$

4. Pour $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$, $f' = \pm 1$ sauf en un nombre fini de points, donc $|f'|_2 = 1$. On obtient $\sup |f - S_N(f)| \leq \sqrt{2/N}$. **Cette majoration, en $N^{-1/2}$, est bien moins bonne que celle de l'exercice 7, en N^{-1} .** Par exemple, pour garantir 10^{-2} , il faudrait ici $N \geq 20\,000$, contre $N = 65$ avec le calcul explicite des coefficients.

5. Le créneau de l'exercice 4 est C^1 par morceaux mais discontinu. Sa série de Fourier ne converge pas uniformément, puisque les $S_N(f)$ sont continues et que la limite ne l'est pas. De plus,

$\sum |b_n| = \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{2k+1} = +\infty$. **La continuité est donc indispensable : sans elle, l'intégration par parties laisse des termes de bord, et $c_n(f') = in c_n(f)$ devient faux.**

Corrigé de l'exercice 21 : Inégalité de Wirtinger

1. L'hypothèse donne $c_0(f) = 0$. Par la formule de dérivation, $c_n(f') = in c_n(f)$. La formule de Parseval, appliquée à f puis à $f' \in \mathcal{D}$, donne $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2 = \sum_{n \neq 0} |c_n(f)|^2$ et $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'^2 = \sum_{n \neq 0} n^2 |c_n(f)|^2$. Or $n^2 \geq 1$ pour $n \neq 0$. **Donc** $\int_0^{2\pi} f^2 \leq \int_0^{2\pi} f'^2$.
2. La différence des deux membres vaut $2\pi \sum_{|n| \geq 2} (n^2 - 1) |c_n(f)|^2$, somme de termes positifs. Il y a égalité si et seulement si $c_n(f) = 0$ pour $|n| \geq 2$. Dans ce cas, f et $c_1 e_1 + c_{-1} e_{-1}$ sont continues et ont les mêmes coefficients : elles sont égales. Réciproquement, ces fonctions réalisent l'égalité. **L'égalité a lieu exactement pour $f(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$, avec α, β réels.**
3. Soit G la fonction impaire sur $[-\pi, \pi]$ égale à g sur $[0, \pi]$, prolongée par 2π -périodicité. Elle est bien définie et continue, car $g(0) = 0$ et $G(-\pi) = -g(\pi) = 0 = G(\pi)$. Elle est C^1 par morceaux, et $\int_{-\pi}^{\pi} G = 0$ par imparité. De plus, $G'(x) = g'(-x)$ pour $x \in]-\pi, 0[$. Donc $\int_{-\pi}^{\pi} G^2 = 2 \int_0^{\pi} g^2$ et $\int_{-\pi}^{\pi} G'^2 = 2 \int_0^{\pi} g'^2$. La question 1 s'applique à G . **Ainsi** $\int_0^{\pi} g^2 \leq \int_0^{\pi} g'^2$, **avec égalité si et seulement si $g(t) = \beta \sin t$.**
4. On a $\int_0^{\pi} t^2 (\pi - t)^2 dt = \frac{\pi^5}{30}$ (calcul détaillé à l'exercice 22). Ensuite, $g'(t) = \pi - 2t$ et $\int_0^{\pi} (\pi - 2t)^2 dt = \left[-\frac{(\pi - 2t)^3}{6} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3}$. **On vérifie** $\frac{\pi^5}{30} \approx 10,20 \leq \frac{\pi^3}{3} \approx 10,34$: l'écart est faible, car g est très proche de $\frac{8}{\pi} \sin t$.

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : valeurs de $\zeta(6)$ et d'une série alternée

1. La définition sur $[0, \pi]$ et l'imparité imposent $f(x) = -x(\pi + x)$ sur $[-\pi, 0]$. Les deux formules donnent 0 en 0, donc l'imparité est compatible. Ensuite, $f(\pi) = 0$ et $f(-\pi) = -f(\pi) = 0$: le prolongement 2π -périodique est bien défini et continu en $\pm\pi$. Enfin, f est polynomiale sur $[-\pi, 0]$ et sur $[0, \pi]$. **La fonction f est bien définie, continue et C^1 par morceaux.**

2. Comme f est impaire, $a_n = 0$ et $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t(\pi - t) \sin nt \, dt$. Une première intégration

par parties donne $\left[-\frac{t(\pi - t) \cos nt}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi (\pi - 2t) \cos nt \, dt$, et le crochet est nul. Une

seconde donne $\frac{1}{n} \left(\left[\frac{(\pi - 2t) \sin nt}{n} \right]_0^\pi + \frac{2}{n} \int_0^\pi \sin nt \, dt \right) = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n}$. **Donc**

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{4}{n^3} = \frac{8}{\pi n^3} \text{ pour } n \text{ impair, et } b_n = 0 \text{ pour } n \text{ pair.}$$

3. La fonction f est continue et C^1 par morceaux : le théorème de convergence normale s'applique. On le voit aussi car $|b_n \sin nx| \leq \frac{8}{\pi n^3}$. **Pour tout réel x ,**

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}, \text{ la convergence étant normale.}$$

4. En $x = \frac{\pi}{2}$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$ et $\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^k$. Donc $\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$. **Ainsi**
 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$. On retrouve aussi ce résultat avec la formule de l'exercice 9, question 5, en $x = \frac{\pi}{2}$.

5. On développe $t^2(\pi - t)^2 = \pi^2 t^2 - 2\pi t^3 + t^4$. Donc

$$\int_0^\pi t^2(\pi - t)^2 \, dt = \frac{\pi^5}{3} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{\pi^5}{5} = \frac{10 - 15 + 6}{30} \pi^5 = \frac{\pi^5}{30}. \text{ Par imparité de } f,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f^2 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^5}{30} = \frac{\pi^4}{30}. \text{ Parseval donne } \frac{\pi^4}{30} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{64}{\pi^2 (2k+1)^6}. \text{ Donc}$$

$$\int_0^\pi t^2(\pi - t)^2 \, dt = \frac{\pi^5}{30} \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$

6. Les termes pairs de $\zeta(6)$ valent $\sum \frac{1}{(2k)^6} = \frac{\zeta(6)}{64}$. Donc $\frac{63}{64}\zeta(6) = \frac{\pi^6}{960}$, puis $\zeta(6) = \frac{64\pi^6}{63 \cdot 960} = \frac{\pi^6}{945}$. **On obtient** $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.

7. Par la question 3, $f(x) - \frac{8}{\pi}\sin x = \frac{8}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}$, donc

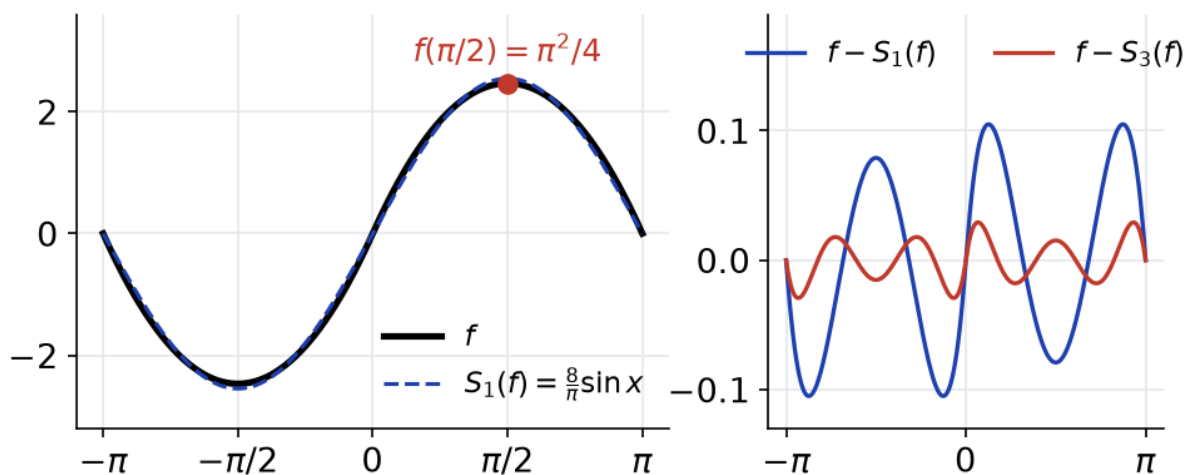
$$\left| f(x) - \frac{8}{\pi}\sin x \right| \leq \frac{8}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(2k+1)^3}. \text{ On isole le terme } k=1, \text{ égal à } \frac{1}{27}. \text{ Pour } k \geq 2, \text{ la}$$

décroissance donne $\frac{1}{(2k+1)^3} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{(2t+1)^3}$, d'où $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{(2k+1)^3} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(2t+1)^3} = \frac{1}{36}$.

Ainsi la somme est au plus $\frac{1}{27} + \frac{1}{36} = \frac{7}{108}$. **Donc**

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| f - \frac{8}{\pi}\sin x \right| \leq \frac{56}{108\pi} = \frac{14}{27\pi} \approx 0,165.$$

Comme le montre la figure ci-dessous, f et $S_1(f) = \frac{8}{\pi}\sin x$ sont presque confondues. À droite, l'écart $f - S_1(f)$ reste sous 0,11 en valeur absolue, ce qui respecte la borne 0,165 ; l'écart $f - S_3(f)$ est encore plus petit.



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [séries de Fourier, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur séries de Fourier](#)
- À maîtriser avant : [Suites et séries de fonctions](#), [Produit scalaire et espaces euclidiens](#)
- Chapitre précédent : [Isométries, endomorphismes symétriques et théorème spectral](#)
- Chapitre suivant : [Formes quadratiques, coniques et quadriques](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)