

Séries de fonctions

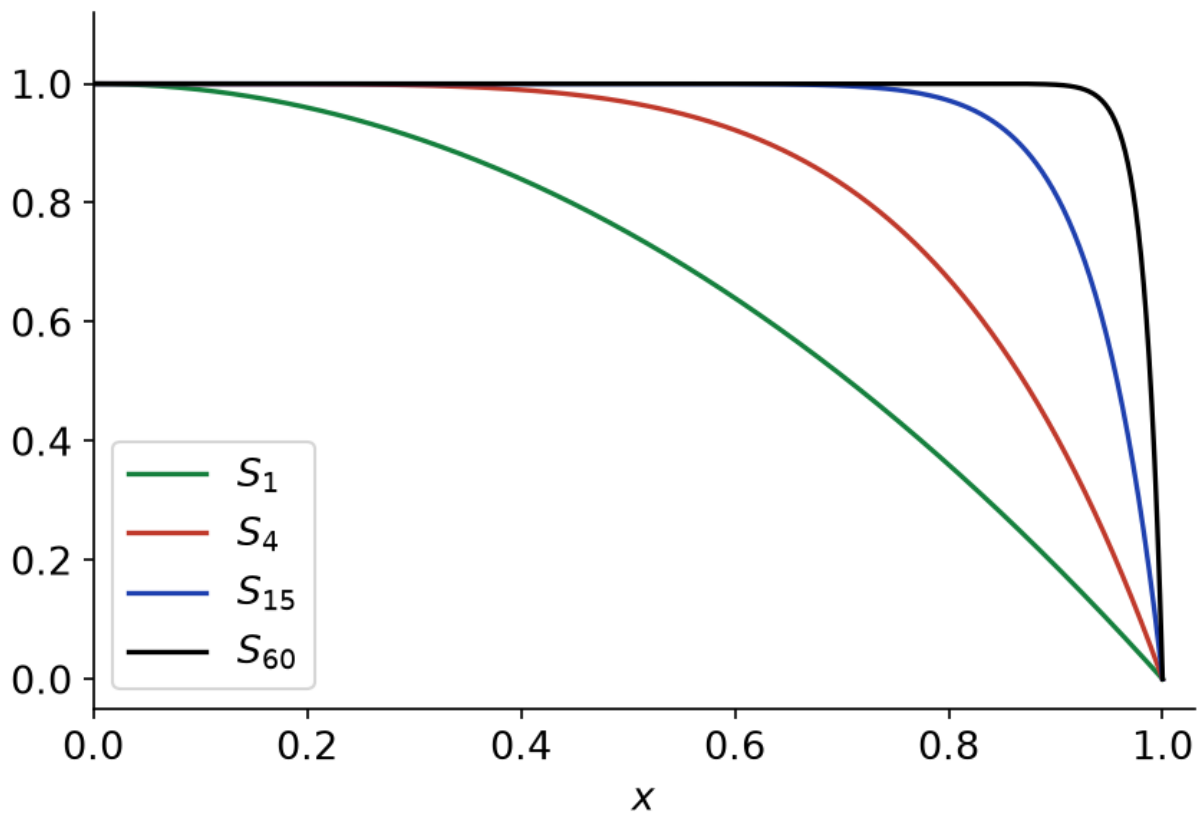
Exercice 1 : Convergence normale sur un intervalle adapté

Pour chacune des séries de fonctions suivantes, déterminez un intervalle, le plus grand possible, sur lequel elle converge normalement.

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2 + 1}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ pour $x \in [-1, 1]$.
3. $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ pour $x \in]0, +\infty[$. Montrez que la convergence est normale sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, mais pas sur $]0, +\infty[$.
4. $\sum_{n \geq 1} x^2 e^{-nx}$ pour $x \in [0, +\infty[$. On étudiera les variations de $x \rightarrow x^2 e^{-nx}$.

Exercice 2 : Une série télescopique non uniformément convergente

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose $u_n(x) = x^n (1 - x)$. La figure ci-dessous représente quelques sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$.



1. Calculez $S_N(x)$ pour $x \in [0, 1]$, puis la somme $S(x)$ de la série.
2. La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$? sur $[0, 1[$?
3. Calculez $\sup_{[0, 1]} u_n$. La série converge-t-elle normalement sur $[0, 1]$?
4. Soit $a \in]0, 1[$. Montrez que la série converge normalement sur $[0, a]$.

Exercice 3 : Dérivation terme à terme d'une somme explicite

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$.

1. Montrez que f est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrez que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimez $f'(x)$ sans signe somme.

3. Déterminez la limite de f en $+\infty$.

4. En déduire que $f(x) = -\ln(1 - e^{-x})$ pour tout $x > 0$, puis la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{n}$.

Exercice 4 : Sommes des séries de terme général $n x^n$ et $n^2 x^n$

On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in]-1, 1[$.

1. La série $\sum x^n$ converge-t-elle normalement sur $] -1, 1[$? Sur $[-a, a]$ pour $0 < a < 1$?

2. Montrez que S est de classe C^2 sur $] -1, 1[$, avec $S'(x) = \sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$ et $S''(x) = \sum_{n \geq 2} n(n-1) x^{n-2}$.

3. En déduire, pour $|x| < 1$, les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$.

4. Calculez $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Exercice 5 : Calcul de $\ln 2$ par intégration terme à terme

1. Soit $x \in]-1, 1[$. Montrez que la série $\sum_{n \geq 0} t^n$ converge normalement sur le segment d'extrémités 0 et x .

2. En intégrant terme à terme, montrez que $-\ln(1 - x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

3. En déduire les égalités $\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n}$ et $\ln \frac{3}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 2^n}$.

4. Montrez que le reste $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n}$ est majoré par $\frac{1}{(N+1) 2^N}$. Quelle valeur de N garantit, par cette majoration, une erreur inférieure à 10^{-3} ?

Exercice 6 : Une intégrale calculée terme à terme

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$. On admet que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

1. Montrez que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrez que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculez $F'(0)$.
3. Calculez $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.
4. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi} F(x) dx$.

Exercice 7 : Convergence uniforme sans convergence normale

Pour $x \geq 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrez que la série converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
2. Montrez qu'elle ne converge normalement sur aucun intervalle $[a, b]$ avec $0 \leq a < b$.
3. Montrez que S est continue sur $[0, +\infty[$ et déterminez sa limite en $+\infty$ à l'aide du théorème de la double limite.
4. Montrez que S est de classe C^1 et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

- Montrez que $S(x) + S(x+1) = -\frac{1}{x+1}$ pour tout $x \geq 0$.
- En déduire un encadrement de $S(x)$ pour $x \geq 1$, puis un équivalent de $S(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 8 : La série de terme général $x e^{-nx}$

Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = x e^{-nx}$.

- Montrez que $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et calculez sa somme $S(x)$.
- La fonction S est-elle continue en 0 ? Qu'en déduisez-vous sur la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$?
- Calculez $\|u_n\|_\infty$ sur $[0, +\infty[$. Retrouvez que la convergence n'est pas normale sur cet intervalle.
- Montrez que la convergence est normale sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
- En évaluant le reste R_N en $x = \frac{1}{N+1}$, montrez que la convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$.

Exercice 9 : Somme non bornée et défaut d'uniformité

Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose $u_n(x) = x e^{-n x^2}$.

- Montrez que $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et exprimez sa somme $S(x)$.
- Déterminez un équivalent de $S(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.
- Montrez que chaque u_n est bornée sur $]0, +\infty[$ et calculez $\|u_n\|_\infty$.

- Montrez, sans calculer de reste, que la convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$.
- Montrez que la convergence est normale sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, puis que S est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 10 : Régularité et limites de la fonction zêta

On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

- Déterminez le domaine de définition D de ζ .
- Montrez que la série converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$. Converge-t-elle uniformément sur D ?
- Montrez que ζ est de classe C^∞ sur D et exprimez $\zeta^{(k)}$.
- Étudiez les variations et la convexité de ζ .
- Calculez $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x)$.
- Montrez, sans comparaison série-intégrale, que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty$.

Exercice 11 : Équivalents de zêta par comparaison série-intégrale

- Soit $x > 1$. Montrez que pour tout $n \geq 2$, $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}$.
- En déduire que $\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$, puis un équivalent de $\zeta(x)$ quand $x \rightarrow 1^+$.
- Montrez que la fonction $x \rightarrow \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$ est bornée sur $]1, +\infty[$.

4. Montrez que $2^x (\zeta(x) - 1 - 2^{-x}) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. En déduire un équivalent de $\zeta(x) - 1$ en $+\infty$.

Exercice 12 : Somme de la série harmonique alternée

Pour $x \in [0, 1]$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$.

1. Montrez que la série converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Montrez qu'elle ne converge pas normalement sur $[0, 1]$.
3. Justifiez que f est continue sur $[0, 1]$.
4. En intégrant terme à terme sur un segment bien choisi, montrez que $f(x) = \ln(1+x)$ pour $x \in [0, 1[$.
5. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 13 : Une série d'arctangentes

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$. On admet que $\int_0^{+\infty} \frac{s^2}{1+s^4} ds = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

1. Montrez que F est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et continue.
2. Montrez que F est de classe C^1 et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Calculez $F'(0)$.
3. Montrez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

- Montrez que la série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x > 0$. Par comparaison série-intégrale, encadrez $F(x)$ par des intégrales, puis montrez que $F(x) \sim \pi \sqrt{\frac{x}{2}}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

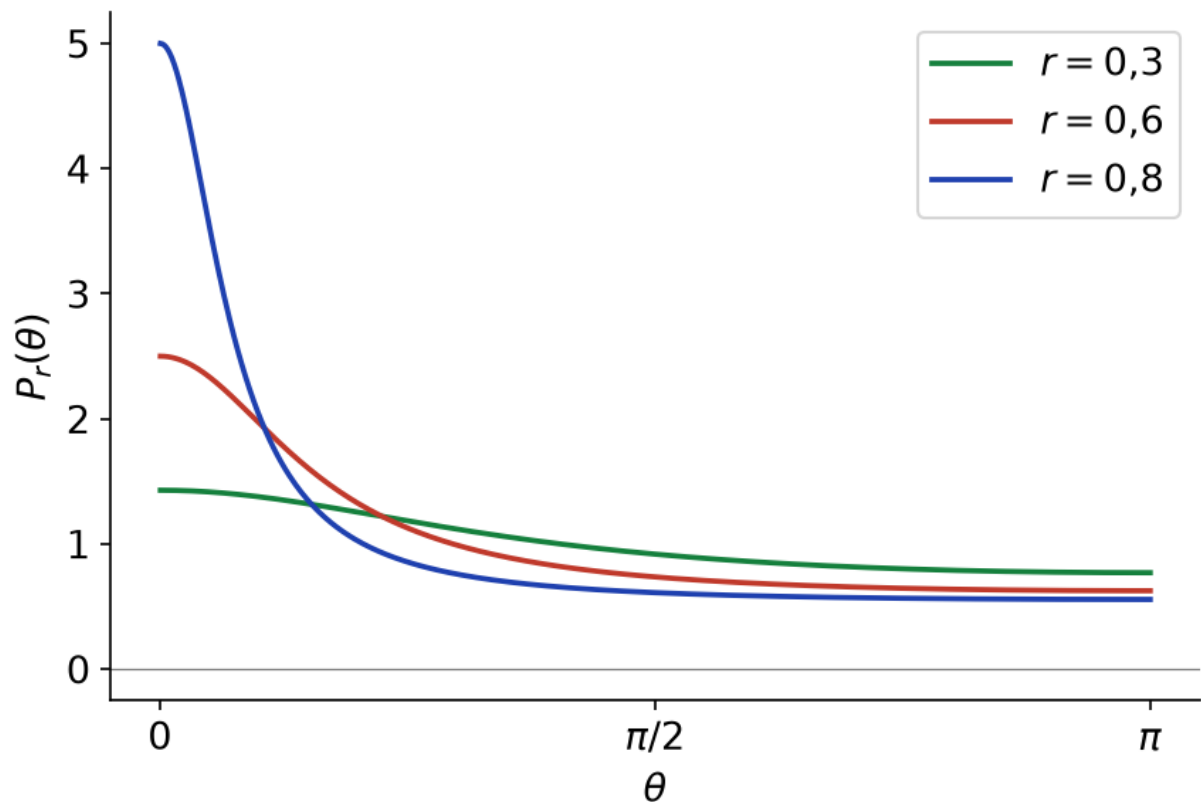
Exercice 14 : Une somme de fractions rationnelles et son équivalent à l'infini

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$.

- Montrez que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et que $g(0) = \zeta(2)$.
- Montrez que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser l'inégalité $2|x|n \leq n^2 + x^2$.
- Étudiez la parité et les variations de g . Déterminez sa limite en $+\infty$.
- Pour $x > 0$, encadrez $g(x)$ par deux intégrales, puis montrez que $g(x) \sim \frac{\pi}{2x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 15 : Noyau de Poisson et intégration terme à terme

Soit $r \in [0, 1[$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $P_r(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta)$. La figure ci-dessous représente P_r sur $[0, \pi]$ pour trois valeurs de r .



1. Montrez que la série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2. En utilisant $\cos(n\theta) = \operatorname{Re}(e^{in\theta})$, montrez que $P_r(\theta) = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$.

3. Calculez $\int_0^\pi P_r(\theta) d\theta$, puis $\int_0^\pi P_r(\theta) \cos(k\theta) d\theta$ pour $k \geq 1$.

4. Vérifiez que $2P_r(\theta) - 1 = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$. En déduire $\int_0^\pi \frac{d\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$.

Exercice 16 : Fonction éta de Dirichlet et retour sur zêta

On pose $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Déterminez le domaine de convergence simple de la série.
2. Montrez que la série converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Converge-t-elle normalement sur $[a, +\infty[$ lorsque $0 < a \leq 1$?
3. Montrez que η est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$, et calculez sa limite en $+\infty$.
4. Montrez que $\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$ pour $x > 1$.
5. On admet le résultat de l'exercice 12 : $\eta(1) = \ln 2$. En déduire de nouveau un équivalent de $\zeta(x)$ quand $x \rightarrow 1^+$.

Exercice 17 : La série thêta et son équivalent en 0

On pose $\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}$. On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Déterminez le domaine de définition de θ .
2. Montrez que θ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et qu'elle y est strictement décroissante.
3. Calculez $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x)$, puis montrez que $\theta(x) - 1 \sim e^{-x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.
4. Montrez que $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leq \theta(x) \leq 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$.
5. En déduire un équivalent de $\theta(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 18 : L'intégrale de x puissance moins x sur $[0, 1]$

On pose $\varphi(x) = -x \ln x$ pour $x \in]0, 1]$ et $\varphi(0) = 0$.

1. Montrez que φ est continue sur $[0, 1]$ et que $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{e}$.
2. Montrez que $x^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi(x)^n}{n!}$ pour $x \in]0, 1]$, et que cette série converge normalement sur $[0, 1]$.
3. Pour $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on pose $I_{n,k} = \int_0^1 x^n (\ln x)^k dx$, où l'intégrande est prolongé par continuité en 0. Montrez que $I_{n,k} = -\frac{k}{n+1} I_{n,k-1}$ pour $k \geq 1$.
4. En déduire que $\int_0^1 \varphi(x)^n dx = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrez que $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$, puis donnez une valeur approchée de cette intégrale à 10^{-3} près.

Exercice 19 : Problème : étude complète d'une somme de série

Pour $x > -1$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}$, et l'on note $H_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$ pour $p \geq 1$. On rappelle que $H_p \sim \ln p$ quand $p \rightarrow +\infty$.

1. Montrez que f est définie sur $] -1, +\infty[$.
2. Montrez que la série converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > -1$. En déduire que f est continue sur $] -1, +\infty[$.
3. Calculez $f(0)$, puis montrez que $f(p) = \frac{H_p}{p}$ pour tout entier $p \geq 1$. Donnez $f(1)$ et $f(2)$.
4. Montrez que f est de classe C^1 et strictement décroissante sur $] -1, +\infty[$.
5. Déterminez la limite de f en $+\infty$.

6. Montrez que $f(x) - \frac{1}{1+x}$ admet une limite finie quand $x \rightarrow -1^+$, que vous calculerez. En déduire un équivalent de f en -1^+ .
7. On pose $\psi(x) = x f(x)$ pour $x \geq 0$. Montrez que ψ est croissante, puis que $H_p \leq \psi(x) \leq H_{p+1}$ où $p = \lfloor x \rfloor$, pour $x \geq 1$.
8. En déduire que $f(x) \sim \frac{\ln x}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.
9. Exprimez $\int_0^1 f(x) dx$ comme la somme d'une série numérique.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [séries de fonctions, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Suites de fonctions : convergence simple et uniforme](#), [Séries numériques et vectorielles](#)
- Chapitre précédent : [Suites de fonctions : convergence simple et uniforme](#)
- Chapitre suivant : [Séries entières](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)

- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)