

Séries de fonctions

I. Convergence simple et uniforme des séries de fonctions

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_n \geq 0$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une série de fonctions est simplement la suite de ses sommes partielles. Ainsi, tout ce que vous savez sur les suites de fonctions s'applique. Cependant, la structure de somme apporte des outils nouveaux, en particulier le reste et la convergence normale.

1. Convergence simple, somme et reste

Définition :

On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la somme partielle d'indice n . La série $\sum u_n$ converge simplement sur I si, pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum u_n(x)$ converge. On définit alors sa somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ et son reste

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

Pour chaque x fixé, on étudie donc une série numérique. Par conséquent, tous les critères de convergence des séries numériques servent ici : comparaison, règle de d'Alembert, critère spécial des séries alternées. L'ensemble des x où la série converge s'appelle le domaine de convergence simple.

2. Convergence uniforme et restes

Définition :

La série $\sum u_n$ converge uniformément sur I si la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur I vers S , autrement dit si $\sup_{x \in I} |S(x) - S_n(x)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Propriété :

La série $\sum u_n$ converge uniformément sur I si et seulement si elle converge simplement sur I et si la suite des restes (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur I :

$$\sup_{x \in I} |R_n(x)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

De plus, si $\sum u_n$ converge uniformément sur I , alors (u_n) converge uniformément vers 0 sur I .

Démonstration :

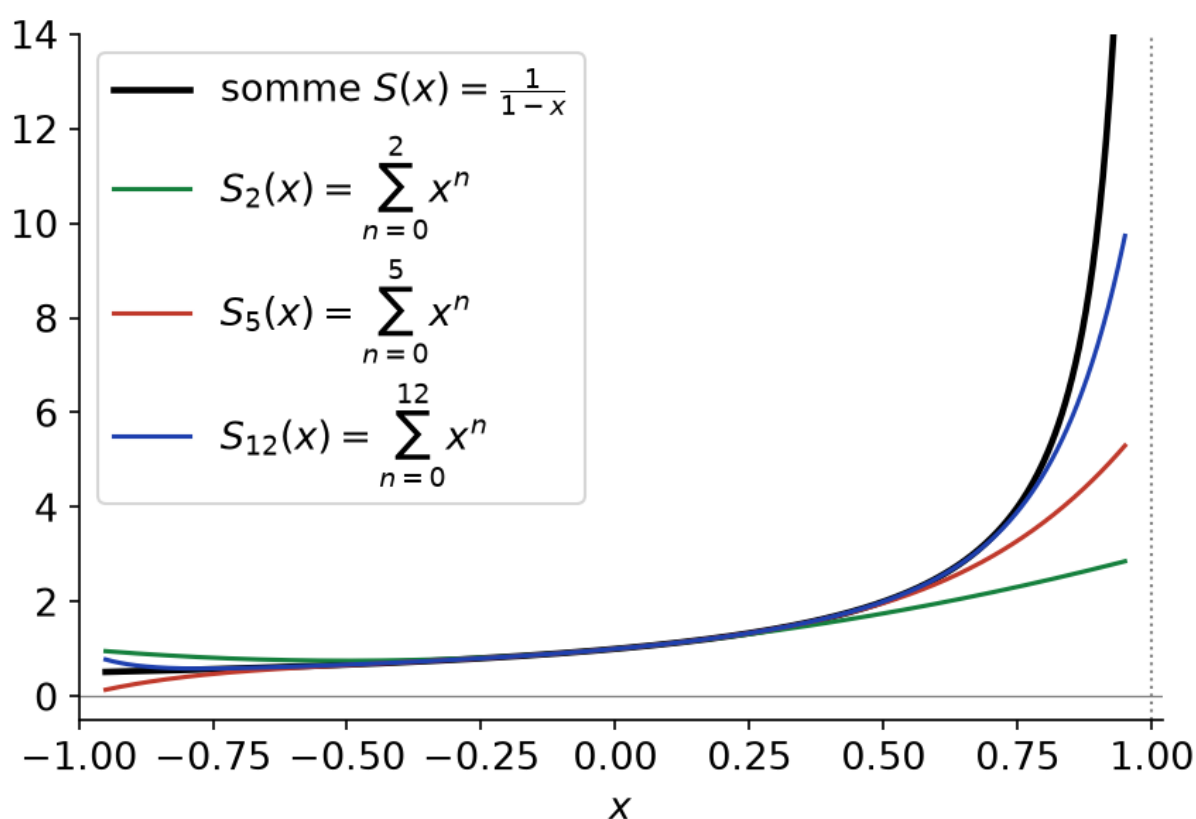
La première équivalence est la définition, puisque $S - S_n = R_n$. Ensuite, on écrit $u_n = S_n - S_{n-1} = R_{n-1} - R_n$. Donc $|u_n|_\infty \leq |R_{n-1}|_\infty + |R_n|_\infty$, qui tend vers 0.

Exemple :

Prenons $u_n(x) = x^n$ sur $] -1, 1[$. La série converge simplement et $S(x) = \frac{1}{1-x}$. Son reste vaut $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Sur $] -1, 1[$, ce reste n'est pas borné, car il tend vers $+\infty$ quand

$x \rightarrow 1$. La convergence n'est donc pas uniforme sur $] -1, 1[$. En revanche, pour $0 < \alpha < 1$, on a $\sup_{[-\alpha, \alpha]} |R_n| \leq \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \rightarrow 0$: la convergence est uniforme sur $[-\alpha, \alpha]$.

La figure ci-dessous montre ce phénomène. Les sommes partielles collent à la somme au voisinage de 0 . En revanche, près de 1 , elles restent bornées tandis que la somme explose.



Méthode :

Pour prouver qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément sur I , on dispose de trois arguments. D'abord, le terme général ne tend pas uniformément vers 0 . Ensuite, la somme est discontinue alors que les u_n sont continues. Enfin, on minore $\sup_I |R_n|$ en évaluant le reste en un point bien choisi, par exemple $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

II. Convergence normale

Majorer le reste d'une série est souvent difficile, car on ne connaît pas la somme. C'est pourquoi on utilise en priorité une notion plus forte, qui ne demande qu'un calcul de borne supérieure sur chaque terme.

1. Définition et théorème fondamental

Définition :

On suppose chaque u_n bornée sur I et on note $|u_n|_{\infty, I} = \sup_{x \in I} |u_n(x)|$. La série $\sum u_n$ converge normalement sur I si la série numérique $\sum |u_n|_{\infty, I}$ converge.

En pratique, il suffit de trouver une suite (α_n) indépendante de x telle que $|u_n(x)| \leq \alpha_n$ pour tout $x \in I$, avec $\sum \alpha_n$ convergente.

Théorème :

Si $\sum u_n$ converge normalement sur I , alors elle converge absolument en tout point de I , et elle converge uniformément sur I .

Démonstration :

Pour $x \in I$, on a $|u_n(x)| \leq |u_n|_{\infty}$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc converge. Ensuite, pour tout $x \in I$:

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k|_{\infty}.$$

Le majorant est le reste d'une série numérique convergente. Il ne dépend pas de x et tend vers 0.
Donc $\sup_I |R_n| \rightarrow 0$.

Méthode :

Pour établir la convergence normale sur un intervalle adapté, on procède ainsi. D'abord, on calcule ou on majore $\sup_I |u_n|$, par une majoration directe ou par une étude de fonction (dérivée, tableau de variations). Ensuite, on teste la convergence de la série des bornes. Si elle diverge sur I , on restreint l'intervalle : on travaille sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, ou sur un segment $[-a, a]$, en écartant le point qui pose problème.

Exemple :

Soit $u_n(x) = x^2 e^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$, pour $n \geq 1$. On dérive :
 $u'_n(x) = x e^{-nx}(2 - nx)$. Ainsi, u_n croît sur $[0, 2/n]$ puis décroît. Par conséquent,

$$|u_n|_{\infty} = u_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4 e^{-2}}{n^2}.$$

La série $\sum \frac{4e^{-2}}{n^2}$ converge : la série converge normalement sur $[0, +\infty[$.

2. Convergence uniforme sans convergence normale

La réciproque du théorème est fausse. L'exemple typique est une série alternée dont le terme général n'est pas sommable en norme. Dans ce cas, on majore le reste grâce au critère spécial des séries alternées.

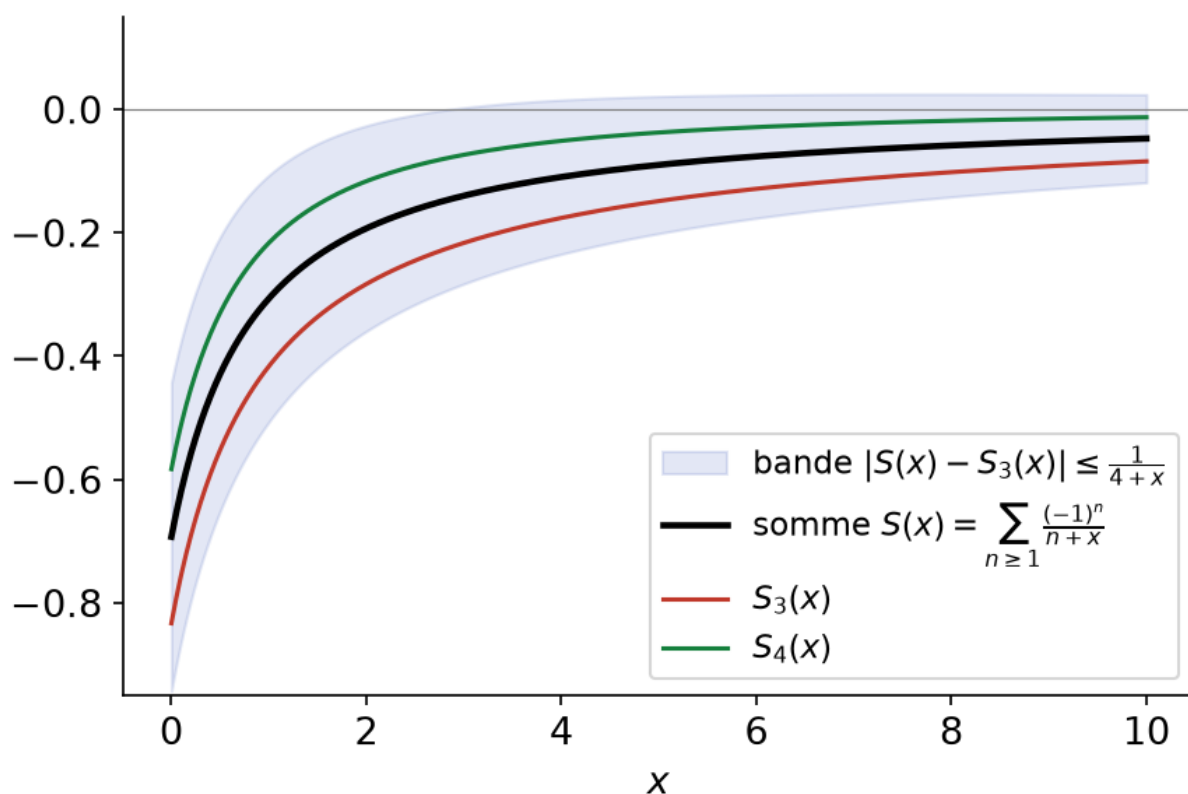
Propriété :

Soit $u_n(x) = (-1)^n a_n(x)$ où, pour tout $x \in I$, la suite $(a_n(x))$ est positive, décroissante et de limite nulle. Alors $\sum u_n$ converge simplement sur I et $|R_n(x)| \leq a_{n+1}(x)$. Si de plus $\sup_I a_n \rightarrow 0$, la convergence est uniforme sur I .

Exemple :

Considérons $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$ sur $[0, +\infty[$, pour $n \geq 1$. Pour x fixé, $\frac{1}{n+x}$ décroît vers 0. Donc $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$: la convergence est uniforme sur $[0, +\infty[$. Cependant, $|u_n|_\infty = \frac{1}{n}$, et la série harmonique diverge : il n'y a pas convergence normale.

Comme le montre la figure ci-dessous, les sommes partielles d'indices consécutifs encadrent la somme. De plus, elles restent dans une bande de largeur uniforme autour d'elle.



III. Continuité de la somme et théorème de la double limite

1. Continuité

Théorème :

Si chaque u_n est continue sur I et si $\sum u_n$ converge uniformément sur I , alors la somme S est continue sur I . Il suffit même que la convergence soit uniforme sur tout segment de I , ou sur tout intervalle d'une famille qui recouvre I au voisinage de chaque point.

Démonstration :

Les sommes partielles S_n sont continues, comme sommes finies de fonctions continues. Elles convergent uniformément vers S . Le théorème de continuité des limites uniformes, vu pour les suites de fonctions, donne la continuité de S . Enfin, la continuité est une propriété locale : si tout $x_0 \in I$ possède un voisinage relatif où la convergence est uniforme, alors S est continue en x_0 .

Exemple :

La fonction zêta de Riemann est définie sur $]1, +\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Pour $a > 1$ et $x \geq a$, on a $0 < n^{-x} \leq n^{-a}$. Donc la série converge normalement sur $[a, +\infty[$. Chaque terme est continu, donc ζ est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$, donc sur $]1, +\infty[$.

Attention :

La série de zêta ne converge pas normalement sur $]1, +\infty[$, car $\sup_{x > 1} n^{-x} = \frac{1}{n}$. Elle n'y

converge pas non plus uniformément. En effet, pour tout n , le reste $R_n(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow 1^+$. Travailler sur $[a, +\infty[$ est donc indispensable.

2. Théorème de la double limite

Théorème :

Soit a une extrémité de I , éventuellement $\pm\infty$. On suppose que $\sum u_n$ converge uniformément sur I et que chaque u_n admet une limite finie ℓ_n en a . Alors la série $\sum \ell_n$ converge, et

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

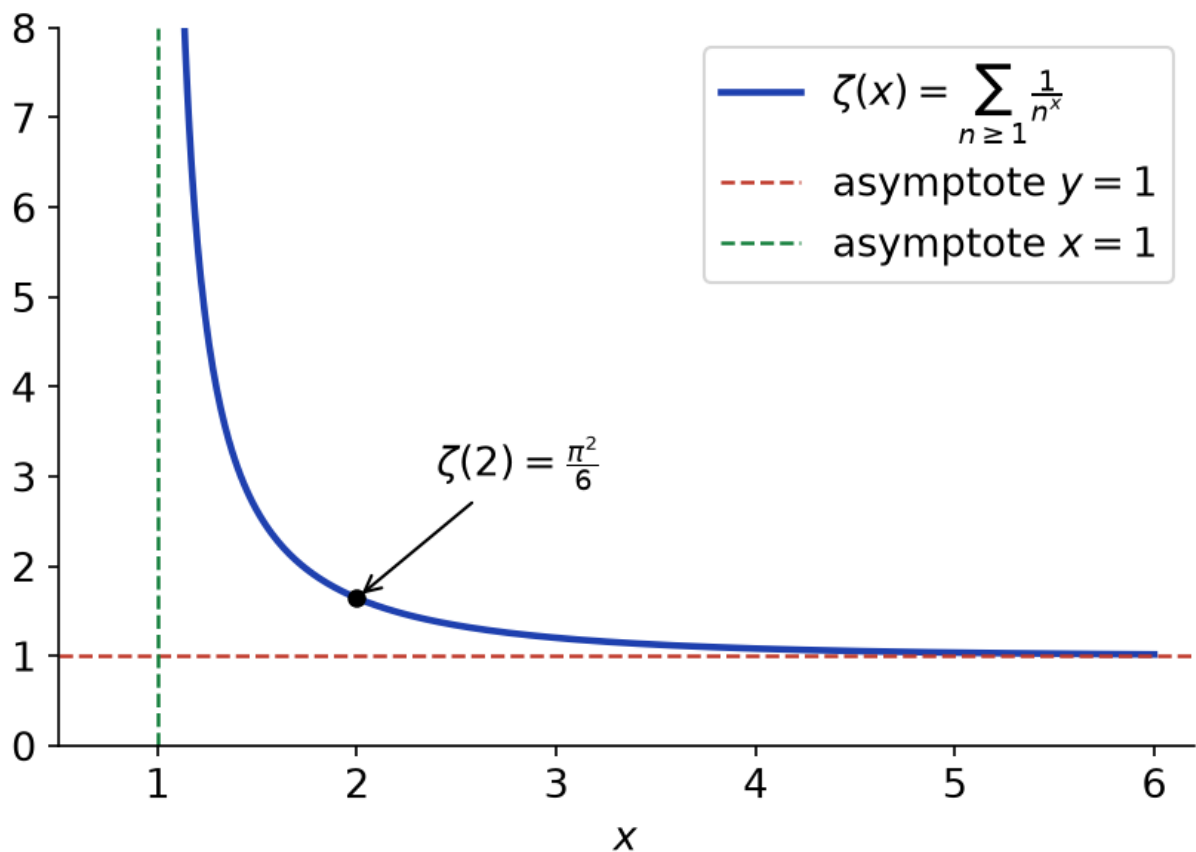
Autrement dit, on peut intervertir la limite et la somme. Ce théorème découle du théorème de la double limite pour les suites de fonctions, appliqué aux sommes partielles, dont la limite en a vaut

$$\sum_{k \leq n} \ell_k.$$

Exemple :

Calculons la limite de ζ en $+\infty$. La série converge normalement, donc uniformément, sur $[2, +\infty[$. De plus, $1^{-x} = 1$ pour tout x , et $n^{-x} \rightarrow 0$ pour $n \geq 2$. Par le théorème de la double limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1 + 0 + 0 + \dots = 1$.

La figure ci-dessous résume l'allure de ζ . On y voit l'asymptote horizontale $y = 1$ et l'asymptote verticale $x = 1$, que nous justifierons en partie VI.



Méthode :

Pour calculer une limite de la somme en une borne a , on cherche un intervalle contenant un voisinage de a sur lequel la convergence est uniforme (souvent normale). Puis on calcule la limite de chaque terme. En revanche, si la limite attendue est infinie, on ne peut pas utiliser ce théorème. On minore alors la somme par une somme partielle : lorsque les termes sont positifs,

$$S(x) \geq \sum_{n=0}^N u_n(x) \text{ pour tout } N.$$

Remarque :

Le théorème sert aussi à prouver une absence de convergence uniforme. Par exemple, si chaque u_n tend vers ℓ_n en a mais que $\sum \ell_n$ diverge, alors la convergence ne peut pas être uniforme au voisinage de a .

IV. Intégration terme à terme sur un segment

Théorème :

Soit $[a, b]$ un segment. Si chaque u_n est continue sur $[a, b]$ et si $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors la série $\sum \int_a^b u_n$ converge et

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t) dt.$$

Démonstration :

La somme S est continue, donc intégrable sur $[a, b]$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b S_n = \sum_{k=0}^n \int_a^b u_k. \text{ Ensuite,}$$

$$\left| \int_a^b S - \int_a^b S_n \right| \leq \int_a^b |R_n| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} |R_n|.$$

Le majorant tend vers 0. Donc les sommes partielles $\sum_{k \leq n} \int_a^b u_k$ convergent vers $\int_a^b S$.

Exemple :

Calculons $\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2} dt$. Sur $[0, 1]$, on a $\left| \frac{t^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$: la convergence est normale. On intègre donc terme à terme :

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

Or $\frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$. La partie $\sum \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right)$ est télescopique et vaut -1 .
Finalement, l'intégrale vaut $\frac{\pi^2}{6} - 1$.

Attention :

Le théorème concerne un segment. Sur un intervalle non borné, la convergence uniforme ne suffit plus. Par exemple, notons $h(s) = \max(0, 1 - |s - 1|)$, fonction triangle d'aire 1, et $v_n(t) = \frac{1}{n} h\left(\frac{t}{n}\right)$ pour $n \geq 1$. Posons $u_0 = v_1$ et $u_n = v_{n+1} - v_n$. Alors $S_n = v_{n+1}$ tend uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$, car $|v_{n+1}|_\infty = \frac{1}{n+1}$. Pourtant, $\int_0^{+\infty} S_n = 1$ pour tout n , alors que la somme est nulle. Pour un intervalle quelconque, on utilise le théorème d'intégration terme à terme du chapitre sur l'intégrabilité.

V. Dérivation terme à terme et classe C^k de la somme

1. Le théorème de classe C^1

Théorème :

On suppose que : chaque u_n est de classe C^1 sur I ; la série $\sum u_n$ converge simplement sur I ; la série des dérivées $\sum u'_n$ converge uniformément sur tout segment de

I . Alors la somme S est de classe C^1 sur I , et

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x) \text{ pour tout } x \in I.$$

Démonstration :

Fixons $x_0 \in I$ et notons $T = \sum u'_n$, continue par le théorème de la partie III. Pour $x \in I$, le théorème fondamental de l'analyse donne $S_n(x) = S_n(x_0) + \int_{x_0}^x S'_n(t) dt$. On fait tendre n vers l'infini. D'une part, $S_n(x) \rightarrow S(x)$ et $S_n(x_0) \rightarrow S(x_0)$. D'autre part, la convergence est uniforme sur le segment d'extrémités x_0 et x , donc l'intégrale tend vers $\int_{x_0}^x T$. Ainsi, $S(x) = S(x_0) + \int_{x_0}^x T(t) dt$, et S est une primitive de la fonction continue T .

2. Classe C^k et classe C^∞

Corollaire :

Soit $k \geq 1$. Si chaque u_n est de classe C^k sur I , si les séries $\sum u_n^{(j)}$ convergent simplement sur I pour $0 \leq j \leq k-1$, et si $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I , alors S est de classe C^k sur I et $S^{(j)} = \sum u_n^{(j)}$ pour $j \leq k$.

Exemple :

La fonction ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$. En effet, la dérivée k -ième de $x \rightarrow n^{-x} = e^{-x \ln n}$ vaut $(-\ln n)^k n^{-x}$. Pour $a > 1$ et $x \geq a$, on a

$|(-\ln n)^k n^{-x}| \leq (\ln n)^k n^{-a}$. Choisissons b tel que $1 < b < a$. Alors
 $(\ln n)^k n^{-a} = o(n^{-b})$ par croissances comparées, donc cette série converge. Chaque série
 dérivée converge normalement sur $[a, +\infty[$. Par conséquent, $\zeta'(x) = -\sum_{n \geq 2} \frac{\ln n}{n^x} < 0$ et
 $\zeta''(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{(\ln n)^2}{n^x} > 0$: ζ est strictement décroissante et convexe.

Méthode :

Pour montrer qu'une somme de série est de classe C^1 , on rédige en quatre temps. Premièrement, on vérifie que chaque u_n est C^1 et on calcule u'_n . Deuxièmement, on établit la convergence simple de $\sum u_n$. Troisièmement, on prouve la convergence normale de $\sum u'_n$ sur tout segment $[a, b] \subset I$, ou sur des intervalles $[a, +\infty[$. Enfin, on conclut en citant le théorème de dérivation terme à terme.

Attention :

La convergence uniforme de $\sum u_n$ ne suffit jamais. Par exemple, $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Pourtant, la série des dérivées $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ diverge en $x = 0$. On ne peut donc pas dériver terme à terme sur $\mathbb{R}$.

VI. Étude asymptotique par comparaison série-intégrale

Au bord du domaine, la somme tend souvent vers l'infini. Le théorème de la double limite ne s'applique plus. On compare alors la somme à une intégrale, exactement comme pour les séries numériques.

Proposition :

Soit $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et intégrable. Alors

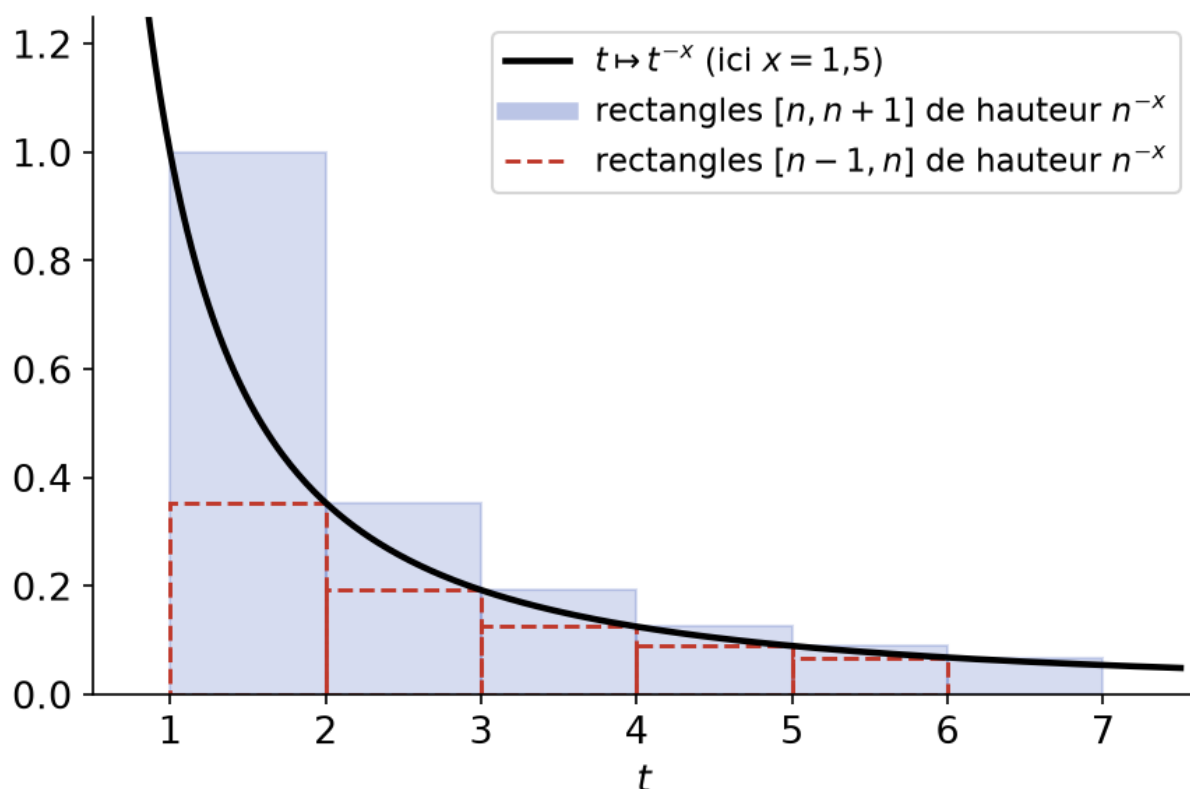
$$\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \leq \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt.$$

Si φ n'est définie que sur $[1, +\infty[$, on a de même $\int_1^{+\infty} \varphi \leq \sum_{n \geq 1} \varphi(n) \leq \varphi(1) + \int_1^{+\infty} \varphi$.

Démonstration :

Par décroissance, pour $t \in [n, n+1]$, on a $\varphi(n+1) \leq \varphi(t) \leq \varphi(n)$. En intégrant sur $[n, n+1]$, on obtient $\int_n^{n+1} \varphi \leq \varphi(n)$ et, de même, $\varphi(n) \leq \int_{n-1}^n \varphi$. Il reste à sommer ces inégalités pour $n \geq 1$.

La figure ci-dessous illustre les deux encadrements. Les rectangles pleins débordent au-dessus de la courbe, tandis que les rectangles en pointillés restent en dessous.



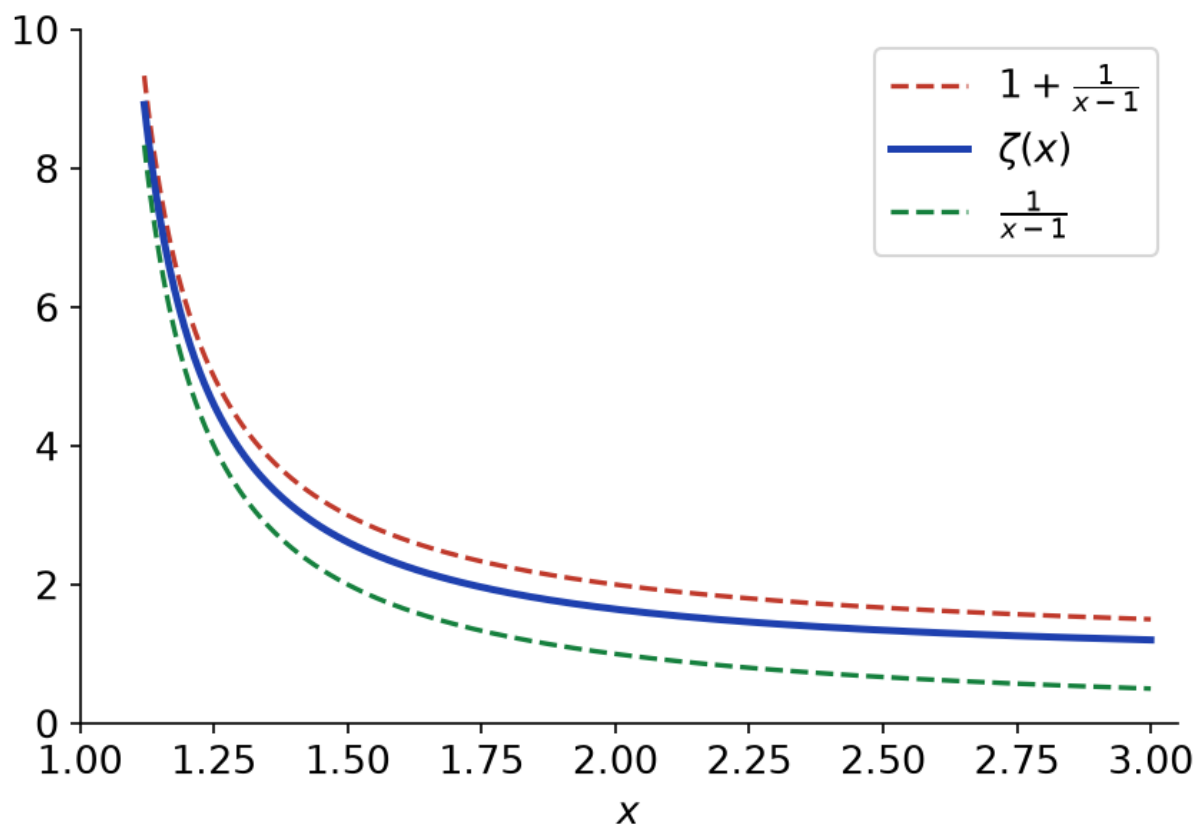
Théorème :

Pour tout $x > 1$, $\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$. Par conséquent, $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty$.

Démonstration :

Pour $x > 1$, la fonction $t \mapsto t^{-x}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus, $\int_1^{+\infty} t^{-x} dt = \frac{1}{x-1}$. La proposition précédente donne l'encadrement. En le multipliant par $x - 1 > 0$, on obtient $1 \leq (x-1)\zeta(x) \leq x$. Par le théorème des gendarmes, $(x-1)\zeta(x) \rightarrow 1$.

La figure ci-dessous montre la courbe de ζ coincée entre ses deux bornes. L'écart entre elles vaut toujours 1, ce qui devient négligeable devant $\frac{1}{x-1}$ quand $x \rightarrow 1$.



Méthode :

Pour obtenir un équivalent de $S(x) = \sum \varphi_x(n)$ au bord du domaine, on vérifie d'abord que $t \rightarrow \varphi_x(t)$ est monotone pour chaque x . Ensuite, on encadre $S(x)$ par deux intégrales. Puis on calcule l'intégrale principale, souvent par un changement de variable qui fait sortir la dépendance en x . Enfin, on vérifie que l'écart entre les deux bornes est négligeable.

Exemple :

Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ pour $x > 0$. La fonction $t \rightarrow e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante sur

$[0, +\infty[$. Avec $t = u^2$, on calcule $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} 2u e^{-xu} du = \frac{2}{x^2}$. De plus, $\int_0^1 e^{-x\sqrt{t}} dt \leq 1$. Donc $\frac{2}{x^2} - 1 \leq S(x) \leq \frac{2}{x^2}$. Ainsi, $S(x) \sim \frac{2}{x^2}$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Ce qu'il faut retenir

- Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si ses restes tendent uniformément vers 0.
- La convergence normale, $\sum \sup_I |u_n| < +\infty$, entraîne la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.
- On établit la convergence normale sur un intervalle adapté : un segment, ou $[a, +\infty[$, en évitant le point critique.
- Pour une série alternée, le critère spécial donne $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)|$, d'où la convergence uniforme sans convergence normale.
- La somme d'une série de fonctions continues qui converge uniformément sur tout segment est continue.
- Le théorème de la double limite permet d'écrire $\lim_a \sum u_n = \sum \lim_a u_n$ sous convergence uniforme au voisinage de a .
- Sur un segment, la convergence uniforme permet d'intégrer terme à terme.
- Pour dériver terme à terme, il faut la convergence uniforme de la série des dérivées sur tout segment.
- La comparaison série-intégrale donne des équivalents au bord, par exemple $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ quand $x \rightarrow 1^+$.

Questions fréquentes sur séries de fonctions

Faut-il toujours chercher la convergence normale en premier ?

Oui, dans la plupart des cas, car elle se vérifie par un calcul de borne supérieure et entraîne la convergence uniforme. Cependant, elle échoue pour les séries alternées du type $\sum (-1)^n / (n+x)$. On majore alors le reste grâce au critère spécial des séries alternées pour obtenir la convergence uniforme.

Pourquoi travailler sur des segments ou des intervalles $[a, +\infty[$ plutôt que sur tout le domaine ?

La continuité et la dérivabilité sont des propriétés locales. Il suffit donc d'établir la convergence uniforme sur tout segment, ou sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 1$ pour zêta. Sur le domaine entier, la convergence uniforme est souvent fautive, par exemple près d'un bord où la somme explose.

Comment obtenir un équivalent de la somme au bord du domaine ?

Lorsque le terme général est une fonction monotone de n , on encadre chaque terme par des intégrales sur $[n-1, n]$ et $[n, n+1]$. En sommant, la somme est coincée entre deux intégrales que l'on calcule. C'est ainsi que l'on prouve $\zeta(x) \sim 1/(x-1)$ quand x tend vers 1.

Quelle hypothèse est indispensable pour dériver terme à terme ?

Il faut que la série des dérivées converge uniformément, au moins sur tout segment, et que la série elle-même converge en au moins un point. La convergence uniforme de la série de départ ne suffit pas. Par exemple, $\sum \sin(nx)/n^2$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors que la série des dérivées diverge en 0.

Pour aller plus loin en maths spé

- Les énoncés : [exercices de maths spé sur séries de fonctions](#)
- À maîtriser avant : [Suites de fonctions : convergence simple et uniforme](#), [Séries numériques et vectorielles](#)
- Chapitre précédent : [Suites de fonctions : convergence simple et uniforme](#)

- Chapitre suivant : [Séries entières](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)