

Séries de fonctions

Corrigé de l'exercice 1 : Convergence normale sur un intervalle adapté

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\sin(nx)}{n^2+1} \right| \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$. Ce majorant ne dépend pas de x et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. **La série converge normalement sur $\mathbb{R}$ tout entier.**
2. Sur $[-1, 1]$, on a $\sup_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{x^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$, atteint en $x = 1$. Donc la série converge normalement sur $[-1, 1]$. Par ailleurs, si $|x| > 1$, alors $\frac{|x|^n}{n^2} \rightarrow +\infty$ par croissances comparées, et la série diverge grossièrement. **L'intervalle $[-1, 1]$ est donc le plus grand possible.**
3. Soit $a > 0$. Pour $x \geq a$, on a $0 < e^{-nx} \leq e^{-na}$, avec égalité en $x = a$. Ainsi, $|u_n|_{\infty, [a, +\infty[} = (e^{-a})^n$. C'est le terme d'une série géométrique de raison $e^{-a} \in]0, 1[$, donc convergente. En revanche, sur $]0, +\infty[$, on a $\sup_{x > 0} e^{-nx} = 1$, car $e^{-nx} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0^+$. La série $\sum 1$ diverge. **La convergence est normale sur tout $[a, +\infty[$, $a > 0$, mais pas sur $]0, +\infty[$.**
4. Posons $u_n(x) = x^2 e^{-nx}$ pour $n \geq 1$. Alors $u'_n(x) = x e^{-nx}(2 - nx)$. Ainsi, u_n croît sur $[0, \frac{2}{n}]$ et décroît sur $[\frac{2}{n}, +\infty[$. Son maximum vaut $u_n(\frac{2}{n}) = \frac{4e^{-2}}{n^2}$. La série $\sum \frac{4e^{-2}}{n^2}$ converge. De plus, pour $x < 0$, le terme $x^2 e^{-nx}$ tend vers $+\infty$. **La série converge normalement sur $[0, +\infty[$, qui est son domaine de convergence tout entier.**

Point de méthode : lorsque la majoration directe ne suffit pas, étudiez les variations de u_n pour obtenir exactement $\sup |u_n|$.

Corrigé de l'exercice 2 : Une série télescopique non uniformément convergente

1. La somme est télescopique : $S_N(x) = \sum_{n=0}^N (x^n - x^{n+1}) = 1 - x^{N+1}$. Pour $x \in [0, 1[$, $x^{N+1} \rightarrow 0$, donc $S(x) = 1$. Pour $x = 1$, tous les termes sont nuls, donc $S(1) = 0$. **Ainsi, $S = 1$ sur $[0, 1[$ et $S(1) = 0$.**
2. Chaque u_n est continue sur $[0, 1]$, mais S est discontinue en 1. Si la convergence était uniforme sur $[0, 1]$, la somme serait continue. **La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0, 1]$.** Sur $[0, 1[$, le reste vaut $R_N(x) = x^{N+1}$, et $\sup_{[0, 1[} x^{N+1} = 1$. Ce supremum ne tend pas vers 0. **La convergence n'est pas uniforme non plus sur $[0, 1[$.** La figure de l'énoncé le confirme : chaque S_N redescend vers 0 au voisinage de 1.
3. Pour $n = 0$, $\sup u_0 = 1$. Pour $n \geq 1$, $u'_n(x) = x^{n-1}(n - (n+1)x)$. La fonction u_n atteint donc son maximum en $x_n = \frac{n}{n+1}$:
$$\sup_{[0, 1]} u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}.$$
Or $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow e^{-1}$. Donc $\sup u_n \sim \frac{1}{e^{n+1}}$, terme d'une série divergente. **La convergence n'est pas normale sur $[0, 1]$.** C'est cohérent, puisque la convergence normale entraînerait la convergence uniforme.
4. Pour $x \in [0, a]$, on a $0 \leq u_n(x) \leq x^n \leq a^n$, et $\sum a^n$ converge car $0 < a < 1$. **La série converge normalement sur $[0, a]$.**

Corrigé de l'exercice 3 : Dérivation terme à terme d'une somme explicite

1. Soit $a > 0$. Pour $x \geq a$, on a $0 < \frac{e^{-nx}}{n} \leq e^{-na}$, terme d'une série géométrique convergente. Donc la série converge normalement sur $[a, +\infty[$. En particulier, f est définie sur $]0, +\infty[$. De plus, chaque terme est continu. Par le théorème de continuité, f est continue

sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. **Donc f est continue sur $]0, +\infty[$.**

2. Posons $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$. Chaque u_n est C^1 et $u'_n(x) = -e^{-nx}$. Sur $[a, +\infty[$, $|u'_n(x)| \leq e^{-na}$: la série des dérivées converge normalement. Tout segment de $]0, +\infty[$ est inclus dans un tel intervalle. Par le théorème de dérivation terme à terme, f est C^1 et, en sommant la série géométrique :

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = -\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = -\frac{1}{e^x - 1}.$$

Ainsi, $f'(x) = -\frac{1}{e^x - 1}$.

3. La série converge normalement sur $[1, +\infty[$, et chaque terme tend vers 0 en $+\infty$. Par le théorème de la double limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4. Posons $g(x) = -\ln(1 - e^{-x})$, bien définie car $0 < e^{-x} < 1$. On calcule $g'(x) = -\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = -\frac{1}{e^x - 1} = f'(x)$. Comme $]0, +\infty[$ est un intervalle, $f - g$ est constante. De plus, $g(x) \rightarrow -\ln 1 = 0$ en $+\infty$, de même que f . Donc la constante est nulle. **Ainsi, $f(x) = -\ln(1 - e^{-x})$.** En $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) = -\ln\left(\frac{e-1}{e}\right) = 1 - \ln(e - 1).$$

La somme vaut $1 - \ln(e-1) \approx 0,459$.

Corrigé de l'exercice 4 : Sommes des séries de terme général x^n et $n^2 x^n$

1. On a $\sup_{]-1,1[} |x^n| = 1$, donc la série $\sum |x^n|_\infty$ diverge. **Il n'y a pas convergence normale sur $] -1, 1[$.** En revanche, $\sup_{[-a,a]} |x^n| = a^n$, et $\sum a^n$ converge. **La convergence est normale sur tout $[-a, a]$, $0 < a < 1$.**
2. Les fonctions $u_n : x \rightarrow x^n$ sont de classe C^∞ . Sur $[-a, a]$, $|u'_n(x)| = n|x|^{n-1} \leq n a^{n-1}$. Par la règle de d'Alembert, $\frac{(n+1)a^n}{n a^{n-1}} \rightarrow a < 1$, donc $\sum n a^{n-1}$ converge. De même, $|u''_n(x)| \leq n(n-1) a^{n-2}$, et le quotient de deux termes consécutifs tend encore vers a . Ainsi, $\sum u_n$ et $\sum u'_n$ convergent simplement sur

$] -1, 1[$, et $\sum u_n''$ converge normalement sur tout $[-a, a]$. Or tout segment de $] -1, 1[$ est inclus dans un $[-a, a]$. **Par le théorème de classe C^k avec $k = 2$, S est C^2 et se dérive terme à terme.** Par ailleurs, $S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $S''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$.

3. D'une part, $\sum_{n \geq 1} n x^n = x S'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. D'autre part,

$\sum_{n \geq 2} n(n-1) x^n = x^2 S''(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$. Comme $n^2 = n(n-1) + n$, on additionne

ces deux séries convergentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}.$$

Ainsi, $\sum n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ et $\sum n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

4. Avec $x = \frac{1}{2}$: $\sum \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{1/4} = 2$ et $\sum \frac{n^2}{2^n} = \frac{(1/2)(3/2)}{1/8} = 6$. **Les sommes valent 2 et 6.**

Corrigé de l'exercice 5 : Calcul de $\ln 2$ par intégration terme à terme

1. Soit t entre 0 et x . Alors $|t^n| \leq |x|^n$, et $\sum |x|^n$ converge car $|x| < 1$. **La convergence est normale sur le segment d'extrémités 0 et x .**

2. Les fonctions $t \rightarrow t^n$ sont continues et la convergence est uniforme sur ce segment. Par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment :

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Or $\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$. Après le changement d'indice $n+1 \rightarrow n$, **on obtient**

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

3. Avec $x = \frac{1}{2}$: $-\ln \frac{1}{2} = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$. Ensuite, avec $x = -\frac{1}{2}$:
 $-\ln \frac{3}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n}$. En changeant de signe, $\ln \frac{3}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 2^n}$.

4. Pour $n \geq N+1$, on a $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N+1}$. Donc

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} \leq \frac{1}{N+1} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{2^N}.$$

Pour $N = 6$, ce majorant vaut $\frac{1}{448} \approx 2,2 \times 10^{-3}$, ce qui ne suffit pas. Pour $N = 7$, il vaut $\frac{1}{1024} < 10^{-3}$. **Il suffit de prendre $N = 7$.** On obtient alors $\sum_{n=1}^7 \frac{1}{n 2^n} \approx 0,6923$, à comparer à $\ln 2 \approx 0,6931$.

Corrigé de l'exercice 6 : Une intégrale calculée terme à terme

1. Pour tout réel x , $\left| \frac{\sin(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$. La série converge donc normalement sur $\mathbb{R}$. Ses termes sont continus. **Par conséquent, F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.**

2. Chaque terme est C^1 , de dérivée $\frac{\cos(nx)}{n^2}$, majorée en valeur absolue par $\frac{1}{n^2}$. La série des dérivées converge donc normalement sur $\mathbb{R}$. De plus, la série converge simplement. Par le théorème de dérivation terme à terme, F est C^1 et $F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$. **En particulier, $F'(0) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.**

3. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ est à termes positifs et converge. On peut donc séparer les indices pairs et impairs :

$$\zeta(4) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\zeta(4)}{16} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{15}{16} \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{96}.$

4. La convergence est uniforme sur le segment $[0, \pi]$ et les termes sont continus. On intègre donc

terme à terme. Or $\int_0^{\pi} \sin(nx) \, dx = \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n}$. Ce nombre vaut $\frac{2}{n}$ si n est impair et 0 sinon. Par conséquent,

$$\int_0^{\pi} F(x) \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^4} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{48}.$$

L'intégrale vaut $\frac{\pi^4}{48}$.

Corrigé de l'exercice 7 : Convergence uniforme sans convergence normale

1. Soit $x \geq 0$. La suite $\left(\frac{1}{n+x}\right)_n \geq 1$ est positive, décroissante et tend vers 0. Par le critère spécial des séries alternées, la série converge et son reste vérifie $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$. Ce majorant est indépendant de x et tend vers 0. **La convergence est donc uniforme sur $[0, +\infty[$.**
2. Soit $0 \leq a < b$. On a $\sup_{[a,b]} \frac{1}{n+x} = \frac{1}{n+a}$, et $\frac{1}{n+a} \sim \frac{1}{n}$. La série harmonique diverge. **La convergence n'est normale sur aucun intervalle $[a, b]$.**
3. Chaque terme est continu et la convergence est uniforme : S est continue sur $[0, +\infty[$. Ensuite, chaque terme tend vers 0 en $+\infty$. Par le théorème de la double limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$.

Questions 4 à 6

4. La dérivée du terme d'indice n vaut $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$, majorée en valeur absolue par $\frac{1}{n^2}$. La série des dérivées converge donc normalement sur $[0, +\infty[$. Par le théorème de dérivation terme à terme, S est C^1 et $S'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. Cette série est alternée, de premier terme

positif, et ses termes décroissent en valeur absolue. En groupant les termes deux par deux, on obtient une somme de quantités positives. Donc $S'(x) \geq \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(2+x)^2} > 0$. Ainsi, S est strictement croissante.

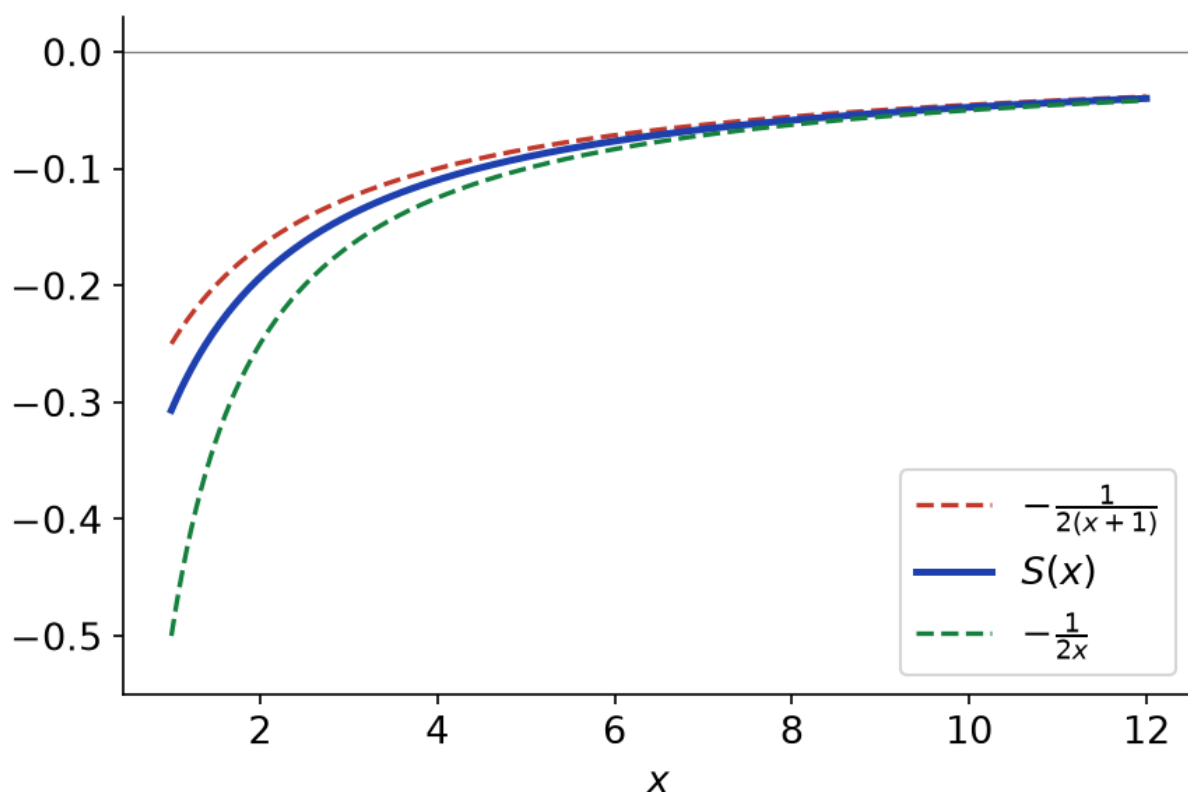
5. On décale l'indice dans $S(x+1)$: $S(x+1) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+1+x} = \sum_{m \geq 2} \frac{(-1)^{m-1}}{m+x}$. Par ailleurs, $S(x) = -\frac{1}{1+x} + \sum_{m \geq 2} \frac{(-1)^m}{m+x}$. En additionnant ces séries convergentes terme à terme, les termes d'indice $m \geq 2$ s'annulent. Donc $S(x) + S(x+1) = -\frac{1}{x+1}$.

6. Soit $x \geq 1$. Par croissance de S , on a $S(x-1) \leq S(x) \leq S(x+1)$. D'une part, $2S(x) \leq S(x) + S(x+1) = -\frac{1}{x+1}$. D'autre part, en appliquant la question 5 en $x-1 \geq 0$, $2S(x) \geq S(x-1) + S(x) = -\frac{1}{x}$. Ainsi,

$$-\frac{1}{2x} \leq S(x) \leq -\frac{1}{2(x+1)}.$$

En multipliant par $-2x$, on obtient $\frac{x}{x+1} \leq -2x S(x) \leq 1$, puis $-2x S(x) \rightarrow 1$.
Finalement, $S(x) \sim -\frac{1}{2x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

La figure ci-dessous montre la courbe de S coincée entre les deux bornes obtenues à la question 6.



Point de méthode : une relation fonctionnelle du type $S(x) + S(x+1) = h(x)$, jointe à la monotonie, donne un équivalent sans aucun calcul de reste.

Corrigé de l'exercice 8 : La série de terme général $x e^{-nx}$

1. En $x = 0$, tous les termes sont nuls : $S(0) = 0$. Pour $x > 0$, on reconnaît une série géométrique de raison $e^{-x} \in]0,1[$:

$$S(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-x})^n = \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1}.$$

La série converge simplement sur $[0, +\infty[$, avec $S(0) = 0$ et $S(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ pour $x > 0$.

2. Comme $e^x - 1 \sim x$ en 0 , on a $S(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0^+$. Or $S(0) = 0$. **La fonction S est discontinue en 0 .** Puisque les u_n sont continues, la convergence ne peut pas être uniforme sur $[0, +\infty[$.

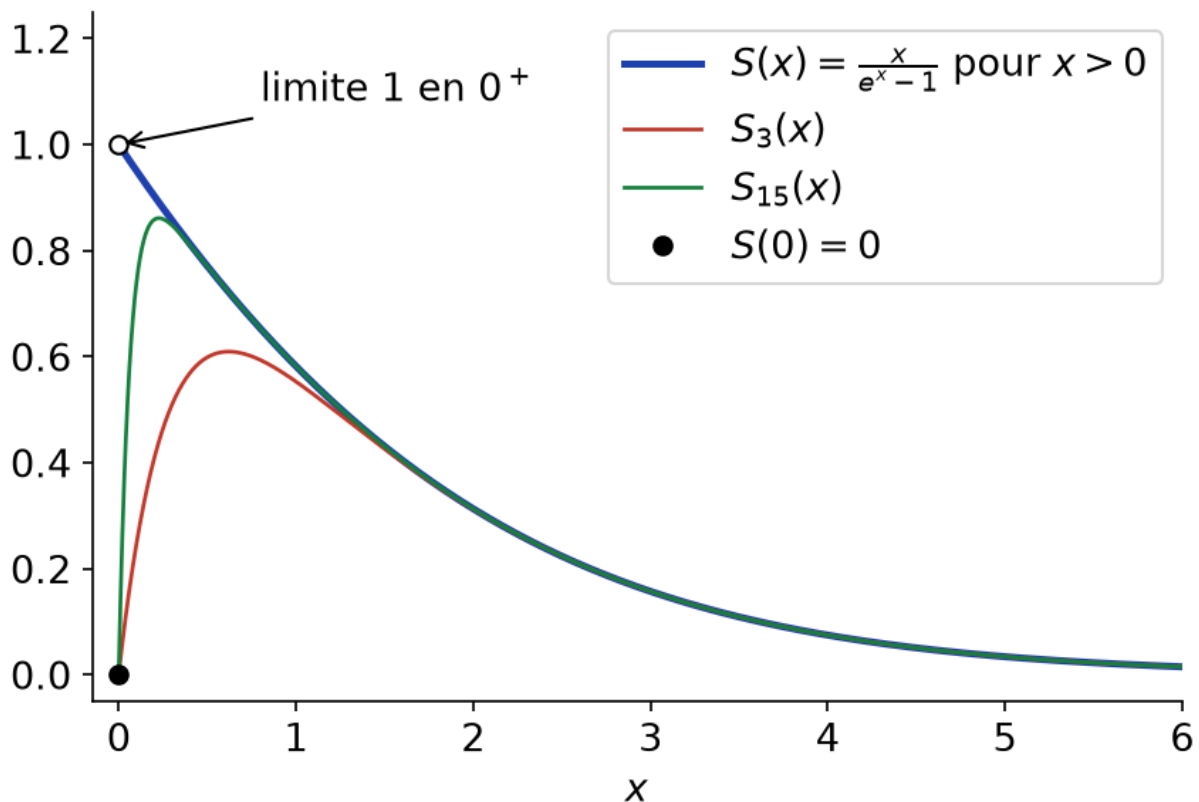
3. On a $u'_n(x) = e^{-nx}(1 - nx)$. Donc u_n croît sur $[0, \frac{1}{n}]$ et décroît ensuite. **Ainsi,**
 $|u_n|_\infty = u_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{en}$. La série $\sum \frac{1}{en}$ diverge : la convergence n'est pas normale, ce qui est cohérent avec la question 2.

Questions 4 à 5

4. Soit $a > 0$. Pour $n > \frac{1}{a}$, on a $\frac{1}{n} \leq a$, donc u_n décroît sur $[a, +\infty[$. Par conséquent,
 $\sup_{[a, +\infty[} u_n = a e^{-na}$. La série $\sum a e^{-na}$ est géométrique de raison $e^{-a} < 1$. Les premiers termes, en nombre fini, ne changent pas la nature de la série. **La convergence est normale sur $[a, +\infty[$.**

5. Pour $x > 0$, $R_N(x) = \sum_{n \geq N+1} x e^{-nx} = \frac{x e^{-(N+1)x}}{1 - e^{-x}}$. Posons $x_N = \frac{1}{N+1}$.
Comme $1 - e^{-u} \leq u$ pour $u \geq 0$, on obtient $R_N(x_N) = e^{-1} \frac{x_N}{1 - e^{-x_N}} \geq e^{-1}$.
Donc $\sup_{]0, +\infty[} |R_N| \geq \frac{1}{e}$ pour tout N . **La convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$.**

La figure ci-dessous illustre la solution. Les sommes partielles valent 0 en 0, tandis que la somme tend vers 1 : le défaut d'uniformité se concentre au voisinage de 0.



Corrigé de l'exercice 9 : Somme non bornée et défaut d'uniformité

1. Soit $x > 0$ et $q = e^{-x^2} \in]0, 1[$. La série $\sum x q^n$ est géométrique, donc convergente, et

$$S(x) = \frac{x q}{1 - q} = \frac{x}{e^{x^2} - 1}.$$

La somme vaut $S(x) = \frac{x}{e^{x^2} - 1}$.

2. Quand $x \rightarrow 0^+$, $e^{x^2} - 1 \sim x^2$. **Donc** $S(x) \sim \frac{1}{x}$: la somme tend vers $+\infty$ en 0^+ .
3. On a $u'_n(x) = e^{-nx^2}(1 - 2nx^2)$, qui s'annule en $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$. La fonction u_n croît avant ce point et décroît après. **Donc** $|u_n|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2en}}$. En particulier, u_n est bornée.
4. Raisonnons par l'absurde et supposons la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$. Alors il existe N tel que $|S(x) - S_N(x)| \leq 1$ pour tout $x > 0$. Or S_N est bornée, comme somme

finie de fonctions bornées. Donc S serait bornée sur $]0, +\infty[$, ce qui contredit la question 2.

La convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$.

5. Soit $a > 0$. Pour $n \geq \frac{1}{2a^2}$, on a $\frac{1}{\sqrt{2n}} \leq a$, donc u_n décroît sur $[a, +\infty[$. Ainsi, $\sup_{[a, +\infty[} u_n = a e^{-na^2}$, terme d'une série géométrique convergente. La convergence est normale sur $[a, +\infty[$, donc uniforme. **Par conséquent, S est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0, +\infty[$.**

Point de méthode : une limite uniforme de fonctions bornées est bornée. Une somme qui explose au bord interdit donc la convergence uniforme au voisinage de ce bord.

Corrigé de l'exercice 10 : Régularité et limites de la fonction zêta

1. Pour x fixé, $\sum n^{-x}$ est une série de Riemann. Elle converge si et seulement si $x > 1$. **Le domaine est $D =]1, +\infty[$.**
2. Soit $a > 1$. Pour $x \geq a$, $0 < n^{-x} \leq n^{-a}$, et $\sum n^{-a}$ converge. La convergence est donc normale sur $[a, +\infty[$. En revanche, supposons la convergence uniforme sur D . Chaque terme n^{-x} tend vers $\frac{1}{n}$ quand $x \rightarrow 1^+$. Le théorème de la double limite donnerait alors la convergence de $\sum \frac{1}{n}$, ce qui est faux. **La convergence n'est pas uniforme sur D .**
3. On a $\frac{d^k}{dx^k} n^{-x} = (-\ln n)^k n^{-x}$. Soit $a > 1$ et $b = \frac{1+a}{2} \in]1, a[$. Pour $x \geq a$, $|(-\ln n)^k n^{-x}| \leq (\ln n)^k n^{-a}$. Or $n^b (\ln n)^k n^{-a} = (\ln n)^k n^{b-a} \rightarrow 0$, donc $(\ln n)^k n^{-a} = o(n^{-b})$, terme d'une série convergente. Pour chaque k , la série des dérivées k -ièmes converge donc normalement sur $[a, +\infty[$. **Par le théorème de classe**

$$C^\infty, \zeta \text{ est } C^\infty \text{ sur } D \text{ et } \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{(-\ln n)^k}{n^x} \text{ pour } k \geq 1.$$

Questions 4 à 6

4. Pour $k = 1$, tous les termes sont strictement négatifs : $\zeta' < 0$. Pour $k = 2$, ils sont strictement positifs : $\zeta'' > 0$. **La fonction ζ est strictement décroissante et strictement convexe sur D .**
5. La convergence est normale sur $[2, +\infty[$. De plus, $1^{-x} = 1$ et $n^{-x} \rightarrow 0$ pour $n \geq 2$. Par le théorème de la double limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$.
6. Comme ζ est décroissante, elle admet une limite $L \in]0, +\infty]$ en 1^+ . Soit $N \geq 1$. Les termes étant positifs, $\zeta(x) \geq \sum_{n=1}^N n^{-x}$ pour $x > 1$. En faisant tendre x vers 1 , on obtient $L \geq H_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$. Or $H_N \rightarrow +\infty$. **Donc** $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty$.

Corrigé de l'exercice 11 : Équivalents de zêta par comparaison série-intégrale

1. Pour $x > 1$, la fonction $t \rightarrow t^{-x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Si $t \in [n, n+1]$, alors $t^{-x} \leq n^{-x}$. En intégrant, $\int_n^{n+1} t^{-x} dt \leq n^{-x}$. De même, si $t \in [n-1, n]$, $t^{-x} \geq n^{-x}$, d'où $n^{-x} \leq \int_{n-1}^n t^{-x} dt$. **L'encadrement est établi.** Notez que l'inégalité de gauche vaut aussi pour $n = 1$.
2. On somme l'inégalité de gauche pour $n \geq 1$: $\int_1^{+\infty} t^{-x} dt \leq \zeta(x)$. Puis on somme celle de droite pour $n \geq 2$: $\zeta(x) - 1 \leq \int_1^{+\infty} t^{-x} dt$. Or $\int_1^{+\infty} t^{-x} dt = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$. Ainsi, $\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$. En multipliant par $x-1 > 0$, $1 \leq (x-1)\zeta(x) \leq x$, qui tend vers 1 . **Donc** $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ **quand** $x \rightarrow 1^+$.
3. D'après la question précédente, $0 \leq \zeta(x) - \frac{1}{x-1} \leq 1$ pour tout $x > 1$. **Cette fonction est donc bornée sur $]1, +\infty[$.**

4. On a $2^x(\zeta(x) - 1 - 2^{-x}) = \sum_{n \geq 3} \left(\frac{2}{n}\right)^x$. Sur $[2, +\infty[$, comme $\frac{2}{n} < 1$, on a $\left(\frac{2}{n}\right)^x \leq \frac{4}{n^2}$: la convergence est normale. De plus, chaque terme tend vers 0 en $+\infty$. Par le théorème de la double limite, cette somme tend vers 0. Ainsi, $\zeta(x) - 1 = 2^{-x} + o(2^{-x})$.
Donc $\zeta(x) - 1 \sim 2^{-x}$ **quand** $x \rightarrow +\infty$.

Corrigé de l'exercice 12 : Somme de la série harmonique alternée

- Soit $x \in [0, 1]$ et $a_n = \frac{x^n}{n}$. La suite (a_n) est positive et tend vers 0. Elle décroît, car $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}x \leq 1$ lorsque $x > 0$, et elle est nulle lorsque $x = 0$. Le critère spécial des séries alternées donne la convergence et $|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. **La convergence est donc uniforme sur $[0, 1]$.**
- On a $\sup_{[0,1]} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{n}$, terme de la série harmonique divergente. **La convergence n'est pas normale sur $[0, 1]$.**
- Les termes sont continus et la convergence est uniforme sur $[0, 1]$. **Donc f est continue sur $[0, 1]$, y compris en 1.**
- Soit $x \in [0, 1[$. Sur $[0, x]$, $|(-t)^n| \leq x^n$: la série $\sum (-t)^n$ converge normalement, de somme $\frac{1}{1+t}$. On intègre terme à terme sur ce segment :

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Ainsi, $f(x) = \ln(1+x)$ sur $[0, 1[$.

- Par continuité de f en 1, $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \ln 2$. **Donc**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

Point de méthode : la convergence normale échoue en $x = 1$. C'est donc la convergence uniforme,

obtenue par le reste alterné, qui permet de passer à la limite au bord.

Corrigé de l'exercice 13 : Une série d'arctangentes

1. Pour tout réel u , $|\arctan u| \leq |u|$, par l'inégalité des accroissements finis, car $|\arctan'| \leq 1$. Donc $\left|\arctan \frac{x}{n^2}\right| \leq \frac{|x|}{n^2}$, et la série converge absolument. Sur $[-A, A]$, le terme est majoré par $\frac{A}{n^2}$: la convergence est normale. Les termes sont continus, donc F est continue sur chaque $[-A, A]$, donc sur $\mathbb{R}$. Enfin, chaque terme est impair. **Ainsi, F est définie, continue et impaire sur $\mathbb{R}$.**
2. La dérivée du terme d'indice n vaut $\frac{1/n^2}{1+x^2/n^4} = \frac{n^2}{n^4+x^2}$. Elle est positive et majorée par $\frac{1}{n^2}$. La série des dérivées converge donc normalement sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de dérivation terme à terme, F est C^1 et $F'(x) = \sum \frac{n^2}{n^4+x^2} > 0$. **Donc F est strictement croissante et $F'(0) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.**
3. Par croissance, F admet une limite $L \in]0, +\infty]$ en $+\infty$. Soit $N \geq 1$. Pour $x \geq 0$, tous les termes sont positifs, donc $F(x) \geq \sum_{n=1}^N \arctan \frac{x}{n^2}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, le membre de droite tend vers $N \frac{\pi}{2}$. Donc $L \geq N \frac{\pi}{2}$ pour tout N . **Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.**

Questions 4 à 5

4. Supposons la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Chaque terme tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$. Le théorème de la double limite imposerait alors la convergence de $\sum \frac{\pi}{2}$, ce qui est absurde. **La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.**
5. Soit $x > 0$ et $\varphi(t) = \arctan \frac{x}{t^2}$ pour $t > 0$, prolongée par $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$. Elle est continue, positive et décroissante sur $[0, +\infty[$. De plus, $\varphi(t) \sim \frac{x}{t^2}$ en $+\infty$, donc elle est intégrable. La comparaison série-intégrale donne $\int_1^{+\infty} \varphi \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} \varphi$. Avec $t = \sqrt{x} s$, on obtient

$\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \sqrt{x} J$, où $J = \int_0^{+\infty} \arctan \frac{1}{s^2} ds$. Calculons J par intégration par parties sur $[\varepsilon, M]$. La dérivée de $s \rightarrow \arctan(s^{-2})$ vaut $-\frac{2s}{1+s^4}$. Donc

$$\int_{\varepsilon}^M \arctan \frac{1}{s^2} ds = \left[s \arctan \frac{1}{s^2} \right]_{\varepsilon}^M + \int_{\varepsilon}^M \frac{2s^2}{1+s^4} ds.$$

Le crochet tend vers 0, car $M \arctan(M^{-2}) \leq \frac{1}{M}$ et $\varepsilon \arctan(\varepsilon^{-2}) \leq \frac{\pi \varepsilon}{2}$. Ainsi,

$$J = 2 \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \text{ Enfin, } \int_0^1 \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \text{ d'où}$$

$$\frac{\pi\sqrt{x}}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} \leq F(x) \leq \frac{\pi\sqrt{x}}{\sqrt{2}}.$$

Par conséquent, $F(x) \sim \pi\sqrt{\frac{x}{2}}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Corrigé de l'exercice 14 : Une somme de fractions rationnelles et son équivalent à l'infini

1. Pour tout réel x , $0 < \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}$. La convergence est normale sur $\mathbb{R}$, et les termes sont continus. **Donc g est définie et continue sur $\mathbb{R}$, avec $g(0) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.**

2. La dérivée du terme d'indice n vaut $-\frac{2x}{(n^2 + x^2)^2}$. Comme $(n - |x|)^2 \geq 0$, on a $2|x|n \leq n^2 + x^2$. Donc

$$\frac{2|x|}{(n^2 + x^2)^2} = \frac{2|x|n}{n(n^2 + x^2)^2} \leq \frac{1}{n(n^2 + x^2)} \leq \frac{1}{n^3}.$$

La série des dérivées converge donc normalement sur $\mathbb{R}$. **Par dérivation terme à terme, g est C^1 et $g'(x) = -\sum \frac{2x}{(n^2 + x^2)^2}$.**

3. Chaque terme est pair, donc g est paire. Pour $x > 0$, $g'(x) < 0$: g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Enfin, chaque terme tend vers 0 en $+\infty$, et la convergence est normale sur $\mathbb{R}$. **Par le théorème de la double limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.**

4. Soit $x > 0$. La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t^2 + x^2}$ est continue, positive, décroissante et intégrable sur

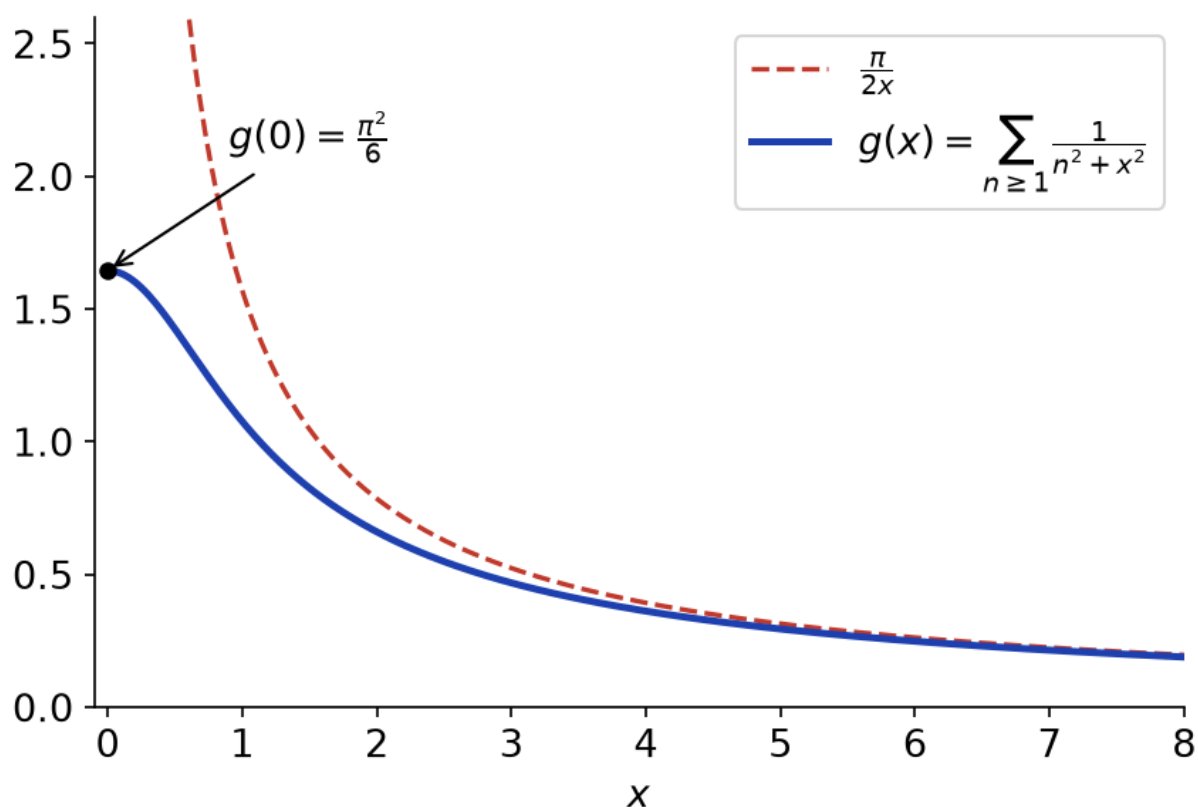
$[0, +\infty[$. La comparaison série-intégrale donne $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} \leq g(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2}$. Or une primitive est $\frac{1}{x} \arctan \frac{t}{x}$. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2} = \frac{1}{x} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} \right)$. En

multipliant par x :

$$\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} \leq x g(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\arctan \frac{1}{x} \rightarrow 0$. **Donc** $g(x) \sim \frac{\pi}{2x}$ **quand** $x \rightarrow +\infty$.

La figure ci-dessous compare la courbe de g à celle de $\frac{\pi}{2x}$. Les deux courbes se rapprochent en valeur relative quand x grandit, conformément à l'équivalent.



Corrigé de l'exercice 15 : Noyau de Poisson et intégration terme à terme

1. Pour tout réel θ , $|r^n \cos(n\theta)| \leq r^n$, et $\sum r^n$ converge car $0 \leq r < 1$. **La convergence est normale sur $\mathbb{R}$.**

2. Comme $|r e^{i\theta}| = r < 1$, la série géométrique complexe converge :

$$\sum_{n \geq 0} (r e^{i\theta})^n = \frac{1}{1 - r e^{i\theta}}. \text{ La partie réelle d'une série convergente est la série des parties}$$

réelles. On multiplie par le conjugué :

$$\frac{1}{1 - r e^{i\theta}} = \frac{1 - r e^{-i\theta}}{(1 - r e^{i\theta})(1 - r e^{-i\theta})} = \frac{1 - r \cos \theta + i r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

Donc $P_r(\theta) = \frac{1 - r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$

3. La convergence est normale sur $[0, \pi]$ et les termes sont continus. On intègre terme à terme.

Pour $n = 0$, $\int_0^\pi 1 d\theta = \pi$. Pour $n \geq 1$, $\int_0^\pi \cos(n\theta) d\theta = \left[\frac{\sin(n\theta)}{n} \right]_0^\pi = 0$. **Ainsi,**

$$\int_0^\pi P_r = \pi. \text{ Ensuite, soit } k \geq 1. \text{ La série } \sum r^n \cos(n\theta) \cos(k\theta) \text{ converge encore}$$

normalement, avec le même majorant r^n . Or

$$\cos(n\theta) \cos(k\theta) = \frac{1}{2} (\cos((n-k)\theta) + \cos((n+k)\theta)). \text{ Comme } n+k \geq 1, \text{ l'intégrale sur}$$

$$[0, \pi] \text{ vaut } \frac{\pi}{2} \text{ si } n = k \text{ et } 0 \text{ sinon. Donc } \int_0^\pi P_r(\theta) \cos(k\theta) d\theta = \frac{\pi r^k}{2}.$$

4. Notons $D = 1 - 2r \cos \theta + r^2$, qui ne s'annule pas car $D \geq (1-r)^2 > 0$. On calcule

$$2P_r - 1 = \frac{2 - 2r \cos \theta - D}{D} = \frac{1 - r^2}{D}. \text{ En intégrant sur } [0, \pi],$$

$$(1 - r^2) \int_0^\pi \frac{d\theta}{D} = 2\pi - \pi = \pi. \text{ Donc } \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} = \frac{\pi}{1 - r^2}. \text{ Pour } r = 0, \text{ on}$$

retrouve bien π .

Corrigé de l'exercice 16 : Fonction éta de Dirichlet et retour sur

zêta

1. Si $x \leq 0$, alors $|(-1)^{n-1} n^{-x}| = n^{-x} \geq 1$: le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement. Si $x > 0$, la suite (n^{-x}) est positive, décroissante et tend vers 0. Le critère spécial des séries alternées s'applique. **Le domaine de convergence simple est $]0, +\infty[$.**
2. Soit $a > 0$ et $x \geq a$. Le critère spécial donne $|R_n(x)| \leq (n+1)^{-x} \leq (n+1)^{-a}$. Ce majorant tend vers 0 et ne dépend pas de x . **La convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$.** En revanche, $\sup_{[a, +\infty[} n^{-x} = n^{-a}$. Si $a \leq 1$, la série de Riemann $\sum n^{-a}$ diverge. **La convergence n'est donc pas normale sur $[a, +\infty[$ lorsque $0 < a \leq 1$.**
3. Les termes sont continus. La convergence est uniforme sur chaque $[a, +\infty[$, donc η est continue sur $]0, +\infty[$. Ensuite, on groupe les termes deux par deux, ce qui est permis car la série converge : $\eta(x) = \sum_{k \geq 1} ((2k-1)^{-x} - (2k)^{-x})$. Chaque parenthèse est positive, donc $\eta(x) \geq 1 - 2^{-x} > 0$. Enfin, sur $[1, +\infty[$, la convergence est uniforme. Le premier terme vaut 1 et les autres tendent vers 0. **Par la double limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta(x) = 1$, et $\eta > 0$.**

Questions 4 à 5

4. Pour $x > 1$, les deux séries convergent absolument. On soustrait terme à terme :
$$\zeta(x) - \eta(x) = \sum_{n \geq 1} (1 - (-1)^{n-1}) n^{-x}$$

Le coefficient vaut 2 pour n pair et 0 pour n impair. Donc $\zeta(x) - \eta(x) = 2 \sum_{k \geq 1} (2k)^{-x} = 2^{1-x} \zeta(x)$. **Ainsi,**
$$\eta(x) = (1 - 2^{1-x}) \zeta(x).$$
5. Par continuité de η en 1, $\eta(x) \rightarrow \ln 2$ quand $x \rightarrow 1^+$. Par ailleurs,
 $1 - 2^{1-x} = 1 - e^{-(x-1)\ln 2} \sim (x-1)\ln 2$, car $1 - e^{-u} \sim u$ en 0. Pour $x > 1$, ce facteur est non nul. Donc

$$\zeta(x) = \frac{\eta(x)}{1 - 2^{1-x}} \sim \frac{\ln 2}{(x-1)\ln 2}.$$

On retrouve $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ quand $x \rightarrow 1^+$.

Point de méthode : la série alternée se prolonge continûment là où la série à termes positifs explose. Relier les deux fonctions transfère alors la régularité de l'une en information asymptotique sur l'autre.

Corrigé de l'exercice 17 : La série thêta et son équivalent en 0

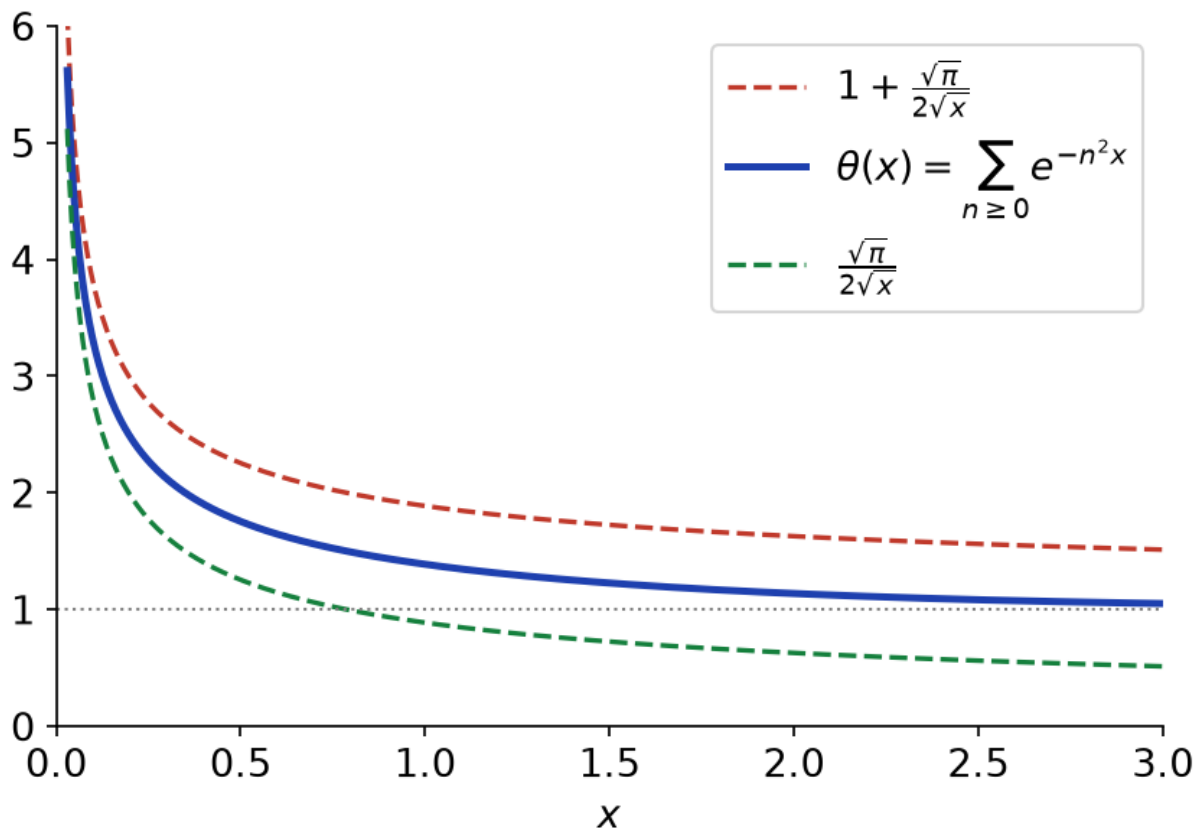
- Si $x \leq 0$, alors $e^{-n^2 x} \geq 1$ et la série diverge grossièrement. Si $x > 0$, alors $0 < e^{-n^2 x} \leq e^{-nx}$, terme d'une série géométrique convergente. **Le domaine de définition est $]0, +\infty[$.**
- La dérivée k -ième du terme d'indice n vaut $(-n^2)^k e^{-n^2 x}$. Soit $a > 0$. Pour $x \geq a$, elle est majorée en valeur absolue par $n^{2k} e^{-n^2 a}$. Or $n^2 \cdot n^{2k} e^{-n^2 a} \rightarrow 0$ par croissances comparées, donc ce majorant est un $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Chaque série dérivée converge donc normalement sur $[a, +\infty[$. **Par le théorème de classe C^∞ , θ est C^∞ sur $]0, +\infty[$.** De plus, $\theta'(x) = -\sum_{n \geq 1} n^2 e^{-n^2 x} < 0$: **θ est strictement décroissante.**
- La convergence est normale sur $[1, +\infty[$. Le terme d'indice 0 vaut 1, et les autres tendent vers 0. Par la double limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = 1$. Ensuite, $e^x(\theta(x) - 1) = 1 + \sum_{n \geq 2} \frac{e^{-n^2 x}}{e^x}$. Sur $[1, +\infty[$, chaque terme de cette dernière série est majoré par $e^{-(n^2-1)x}$: la convergence est normale. Chaque terme tend vers 0, donc la somme tend vers 0. **Ainsi, $e^x(\theta(x) - 1) \rightarrow 0$, c'est-à-dire $\theta(x) - 1 \sim e^{-x}$.**

Questions 4 à 5

- Soit $x > 0$. La fonction $\varphi(t) = e^{-t^2 x}$ est continue, positive, décroissante et intégrable sur $[0, +\infty[$. Avec $t = \frac{s}{\sqrt{x}}$, $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$. D'une part, pour $n \geq 0$, $\varphi(n) \geq \int_n^{n+1} \varphi$, d'où $\theta(x) \geq I(x)$. D'autre part, pour $n \geq 1$, $\varphi(n) \leq \int_{n-1}^n \varphi$, d'où $\theta(x) - 1 \leq I(x)$. **Ainsi, $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leq \theta(x) \leq 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.**

5. En multipliant par $\sqrt{x}$, on obtient $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \sqrt{x} \theta(x) \leq \sqrt{x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par le théorème des gendarmes, $\sqrt{x} \theta(x) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **Donc** $\theta(x) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$ **quand** $x \rightarrow 0^+$.

Comme le montre la figure ci-dessous, la courbe de θ reste dans la bande de hauteur 1 obtenue à la question 4. Près de 0, cette bande devient négligeable devant les deux bornes.



Corrigé de l'exercice 18 : L'intégrale de x puissance moins x sur $[0, 1]$

- Par croissances comparées, $x \ln x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$: φ est continue en 0, donc sur $[0, 1]$. Sur $]0, 1]$, $\ln x \leq 0$, donc $\varphi \geq 0$. Ensuite, $\varphi'(x) = -\ln x - 1$ s'annule en $\frac{1}{e}$. Donc φ croît sur $]0, \frac{1}{e}]$ et décroît sur $[\frac{1}{e}, 1]$. **Ainsi**, $0 \leq \varphi \leq \varphi\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$.

2. Pour $x \in]0, 1]$, $x^{-x} = e^{-x \ln x} = e^{\varphi(x)} = \sum_{n \geq 0} \frac{\varphi(x)^n}{n!}$, par la série exponentielle. En $x = 0$, la série vaut 1, qui est la limite de x^{-x} : on prolonge donc x^{-x} par 1 en 0. De plus, $\sup_{[0,1]} \frac{\varphi^n}{n!} \leq \frac{e^{-n}}{n!}$, terme d'une série convergente. **La convergence est normale sur $[0, 1]$.**

Questions 3 à 5

3. Pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$, $x^n (\ln x)^k \rightarrow 0$ en 0^+ , d'où le prolongement continu. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. On intègre par parties sur $[\varepsilon, 1]$, en dérivant $(\ln x)^k$ et en intégrant x^n :

$$\int_{\varepsilon}^1 x^n (\ln x)^k dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^k \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{k}{n+1} \int_{\varepsilon}^1 x^n (\ln x)^{k-1} dx.$$

Le crochet vaut $-\frac{\varepsilon^{n+1}(\ln \varepsilon)^k}{n+1}$, qui tend vers 0. Les intégrandes sont continus sur $[0, 1]$, donc les intégrales sur $[\varepsilon, 1]$ tendent vers les intégrales sur $[0, 1]$. **Ainsi, $I_{n,k} = -\frac{k}{n+1} I_{n,k-1}$.**

4. On itère n fois, avec $I_{n,0} = \frac{1}{n+1}$:

$$I_{n,n} = \left(-\frac{1}{n+1} \right)^n n! I_{n,0} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Or $\varphi(x)^n = (-1)^n x^n (\ln x)^n$, donc $\int_0^1 \varphi^n = (-1)^n I_{n,n} = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$. Pour $n = 0$

, la formule donne $1 = \int_0^1 1$. **La formule vaut donc pour tout $n \in \mathbb{N}$.**

5. Les fonctions $\frac{\varphi^n}{n!}$ sont continues sur le segment $[0, 1]$, et la convergence y est normale. Par intégration terme à terme :

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Numériquement, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} \approx 1,29126$. Le reste vérifie

$$\sum_{n \geq 6} n^{-n} \leq \sum_{n \geq 6} 6^{-n} = \frac{6^{-6}}{1 - 1/6} < 3 \times 10^{-5}. \text{ Donc } \int_0^1 x^{-x} dx \approx 1,291 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Corrigé de l'exercice 19 : Problème : étude complète d'une somme de série

1. Soit $x > -1$. Pour $n \geq 1$, $n + x > 0$, donc le terme $\frac{1}{n(n+x)}$ est bien défini et positif. De plus, $\frac{1}{n(n+x)} \sim \frac{1}{n^2}$. **Par comparaison avec une série de Riemann convergente, f est définie sur $] -1, +\infty[$.**
2. Soit $a > -1$. Pour $x \geq a$, $n + x \geq n + a > 0$, donc $0 < \frac{1}{n(n+x)} \leq \frac{1}{n(n+a)}$. Ce majorant est équivalent à $\frac{1}{n^2}$. **La convergence est donc normale sur $[a, +\infty[$.** Les termes sont continus, donc f est continue sur chaque $[a, +\infty[$, et par suite sur $] -1, +\infty[$.
3. D'abord, $f(0) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Ensuite, soit $p \geq 1$. On décompose $\frac{1}{n(n+p)} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right)$. Pour $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right) = H_N - (H_{N+p} - H_p) = H_p - \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{n}.$$

La dernière somme compte p termes majorés par $\frac{1}{N+1}$, donc elle tend vers 0. **Ainsi,**
 $f(p) = \frac{H_p}{p}$, d'où $f(1) = 1$ et $f(2) = \frac{3}{4}$.

Questions 4 à 6

4. La dérivée du terme d'indice n vaut $-\frac{1}{n(n+x)^2}$. Sur $[a, +\infty[$, sa valeur absolue est majorée par $\frac{1}{n(n+a)^2} \sim \frac{1}{n^3}$. La série des dérivées converge donc normalement sur $[a, +\infty[$. Par dérivation terme à terme, f est C^1 et $f'(x) = -\sum \frac{1}{n(n+x)^2} < 0$. **Donc f est strictement décroissante sur $] -1, +\infty[$.**

5. La convergence est normale sur $[0, +\infty[$, et chaque terme tend vers 0 en $+\infty$. **Par la double limite**, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

6. On isole le premier terme : $f(x) - \frac{1}{1+x} = g(x)$, où $g(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n+x)}$. Pour $n \geq 2$ et $x \geq -\frac{3}{2}$, on a $n+x \geq n - \frac{3}{2} > 0$. Donc $0 < \frac{1}{n(n+x)} \leq \frac{1}{n(n - 3/2)}$, qui est équivalent à $\frac{1}{n^2}$. Ainsi, g est continue sur $[-\frac{3}{2}, +\infty[$, en particulier en -1 . Or $g(-1) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1$. **Donc** $f(x) - \frac{1}{1+x} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow -1^+$. Il en découle $f(x) = \frac{1}{1+x} + O(1)$. **Par conséquent**, $f(x) \sim \frac{1}{1+x}$ en -1^+ .

Questions 7 à 9

7. Pour $x \geq 0$, $\psi(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{n+x}$. Or $\frac{x}{n+x} = 1 - \frac{n}{n+x}$ est croissante en x . Chaque terme est donc croissant, et l'inégalité passe à la somme. **Ainsi, ψ est croissante.** Soit $x \geq 1$ et $p = \lfloor x \rfloor \geq 1$. Comme $p \leq x < p+1$, on a $\psi(p) \leq \psi(x) \leq \psi(p+1)$. Or $\psi(p) = p f(p) = H_p$. **Donc** $H_p \leq \psi(x) \leq H_{p+1}$.

8. Soit $x \geq 2$, de sorte que $p \geq 2$ et $\ln p > 0$. On écrit $\frac{H_p}{\ln x} = \frac{H_p}{\ln p} \cdot \frac{\ln p}{\ln x}$. Le premier facteur tend vers 1. Pour le second, $\ln x - \ln 2 \leq \ln(x-1) \leq \ln p \leq \ln x$ dès que $x \geq 3$, car alors $x-1 \geq \frac{x}{2}$; donc $\frac{\ln p}{\ln x} \rightarrow 1$. De même, $\frac{H_{p+1}}{\ln x} \rightarrow 1$, car $\ln x \leq \ln(p+1) \leq \ln x + \ln 2$. Par encadrement, $\frac{\psi(x)}{\ln x} \rightarrow 1$. **Finalement**, $f(x) \sim \frac{\ln x}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

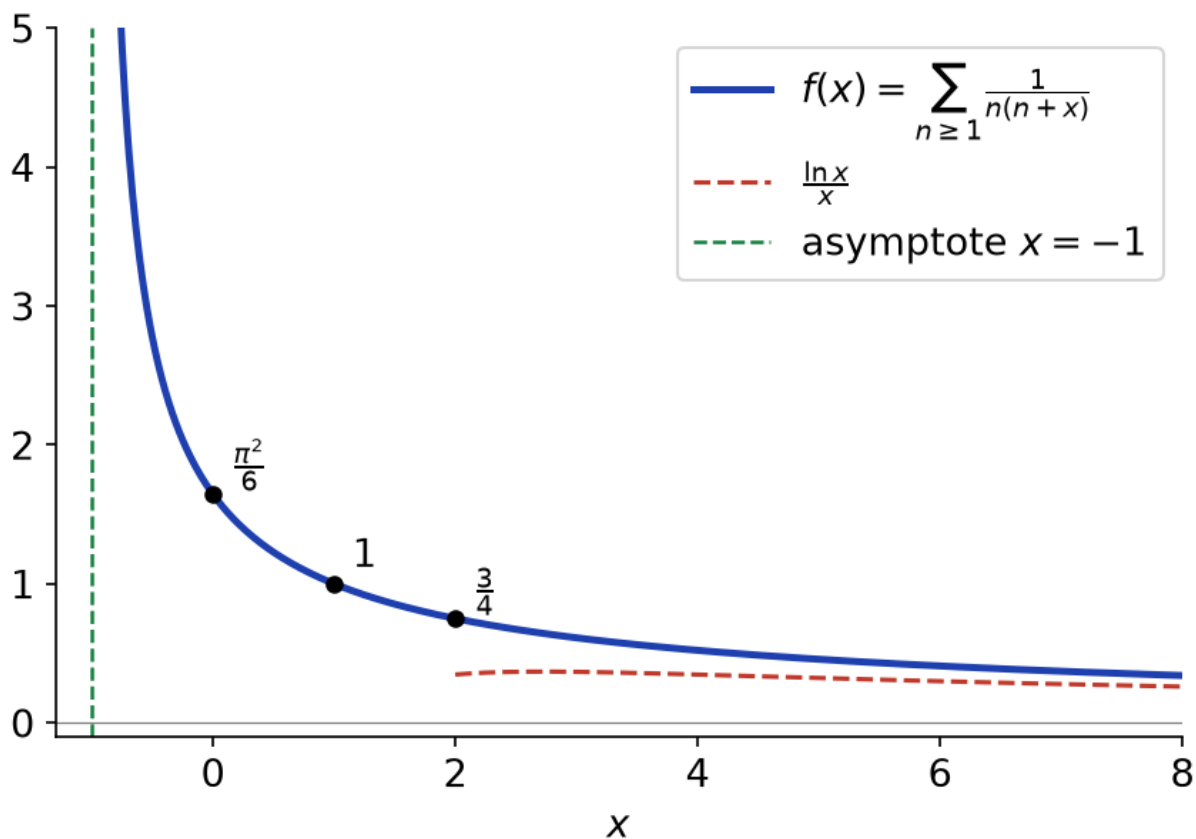
9. La convergence est normale sur le segment $[0, 1]$, et les termes sont continus. On intègre terme à

terme : $\int_0^1 \frac{dx}{n(n+x)} = \frac{1}{n} [\ln(n+x)]_0^1 = \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. **Donc**

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

La figure ci-dessous résume l'étude : asymptote verticale $x = -1$, valeurs $\frac{\pi^2}{6}$, 1 et $\frac{3}{4}$ aux points

0, 1 et 2, puis décroissance lente vers 0, au rythme de $\frac{\ln x}{x}$.



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [séries de fonctions, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur séries de fonctions](#)
- À maîtriser avant : [Suites de fonctions : convergence simple et uniforme](#), [Séries numériques et vectorielles](#)
- Chapitre précédent : [Suites de fonctions : convergence simple et uniforme](#)

- Chapitre suivant : [Séries entières](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)