

Séries à termes quelconques

Exercice 1 : Suites de Cauchy et série harmonique

On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que (H_n) n'est pas de Cauchy, puis qu'elle diverge.
2. On pose $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{k^2}$. Montrer que, pour $p > n \geq 1$, $|v_p - v_n| \leq \frac{1}{n}$. On pourra utiliser $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ pour $k \geq 2$. Conclure que (v_n) converge.
3. On pose $w_n = \sqrt{n}$. Vérifier que $w_{n+1} - w_n \rightarrow 0$, puis calculer $w_{4n} - w_n$. La suite (w_n) est-elle de Cauchy ? Que retenir sur la définition ?

Exercice 2 : Convergence absolue de séries réelles et complexes

Montrer que les séries suivantes sont absolument convergentes.

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^{3/2}}$.
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^2}$.

$$3. \sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{n \sqrt{n}}.$$

$$4. \sum_{n \geq 0} n^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$5. \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n. \text{ Calculer de plus sa somme sous forme algébrique.}$$

Exercice 3 : Critère spécial des séries alternées

Étudier la convergence et la convergence absolue des séries suivantes. On vérifiera soigneusement chaque hypothèse du critère spécial.

$$1. \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}.$$

$$2. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \text{ selon la valeur du réel } \alpha > 0.$$

$$3. \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Exercice 4 : Majoration du reste d'une série alternée

- Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ et S_N ses sommes partielles. Déterminer le plus petit entier N pour lequel le critère spécial garantit $|S - S_N| \leq 10^{-3}$. Préciser le signe de $S - S_N$ pour cette valeur, puis encadrer S à l'aide de S_N .

2. On admet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$. Combien de termes le critère spécial demande-t-il pour garantir une erreur au plus 10^{-2} ? Commenter.
3. On admet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$. Déterminer le plus petit N tel que la majoration du reste garantisse $\left| e^{-1} - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} \right| \leq 10^{-6}$.

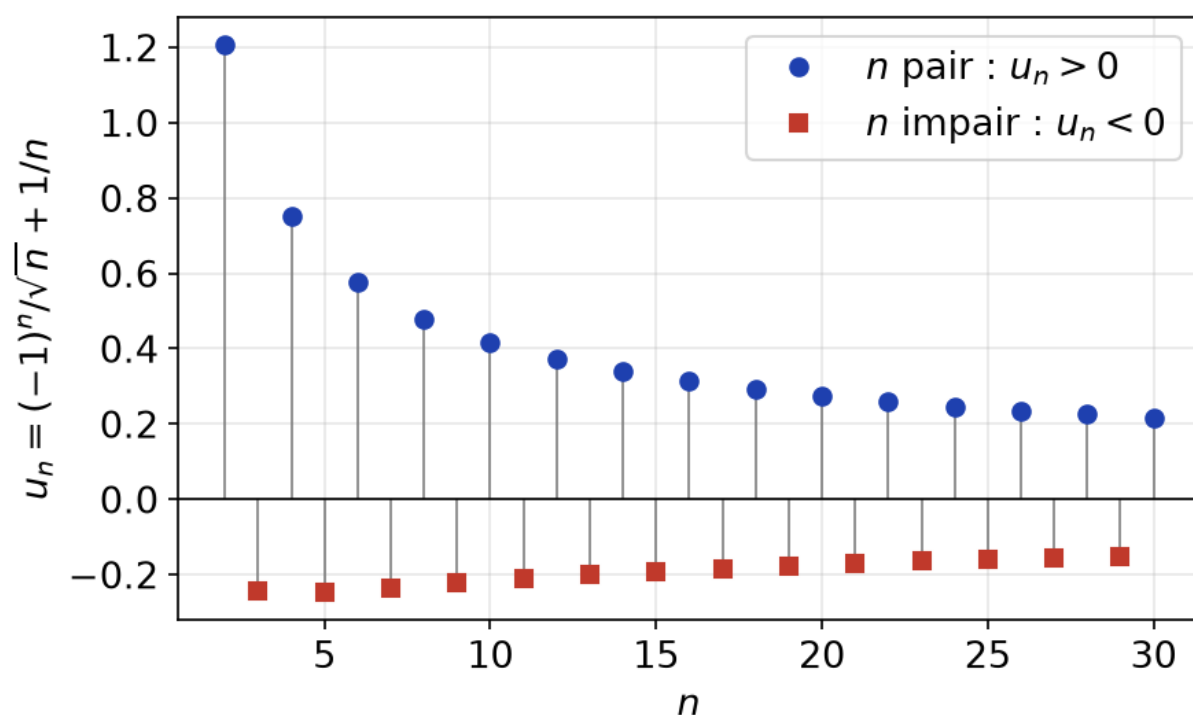
Exercice 5 : Critère de Cauchy et tranches de séries

Soit $\sum u_n$ une série réelle.

- On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer, à l'aide du critère de Cauchy, que $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n} \rightarrow 0$.
- On suppose de plus que (u_n) est positive et décroissante. Montrer que $n u_{2n} \rightarrow 0$, puis que $n u_n \rightarrow 0$.
- Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge, en la comparant à une intégrale. En déduire que la réciproque du résultat de la question 2 est fausse.
- Application : sans calcul de sommes partielles, justifier que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{3n+2}$ diverge.

Exercice 6 : Une série alternée divergente

Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$. La figure ci-dessous représente les premiers termes.



1. Montrer que $u_n > 0$ si n est pair et $u_n < 0$ si n est impair. La série $\sum u_n$ est donc alternée.
2. Montrer que $u_n \rightarrow 0$.
3. Déterminer la nature de $\sum u_n$.
4. Quelle hypothèse du critère spécial n'est pas vérifiée ? Le démontrer en comparant $|u_{2m+1}|$ et $|u_{2m+2}|$.

Exercice 7 : Terme alterné perturbé, discussion selon le paramètre

Soit $\alpha > 0$. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$.

1. Justifier que u_n est bien défini et que $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

2. Calculer exactement $w_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Donner son signe et un équivalent simple.
3. Déterminer, selon α , la nature de $\sum u_n$: absolument convergente, semi-convergente ou divergente.
4. Pourquoi l'équivalent de la question 1 ne suffisait-il pas à conclure ?

Exercice 8 : Logarithme d'un terme alterné

Soit $\alpha > 0$. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

1. Justifier que u_n est bien défini.
2. Rappeler l'équivalent de $\ln(1+x) - x$ quand $x \rightarrow 0$. En déduire un équivalent de $w_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
3. Déterminer la nature de $\sum u_n$ selon α .
4. On prend $\alpha = 1$. Calculer $u_{2k} + u_{2k+1}$ pour $k \geq 1$. En déduire la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Exercice 9 : Démonstration du critère d'Abel

Soit $(a_n)_n \geq 1$ une suite réelle décroissante de limite nulle et $(b_n)_n \geq 1$ une suite complexe. On pose $B_0 = \overline{0}$, $B_n = b_1 + \dots + b_n$, et on suppose qu'il existe M tel que $|B_n| \leq M$ pour tout n .

1. Établir la formule $\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.
2. En déduire que $\sum a_n b_n$ converge.
3. Montrer que, pour $p > n \geq 1$, $\left| \sum_{k=n+1}^p a_k b_k \right| \leq 2M a_{n+1}$. Que peut-on dire du reste ?
4. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que $\left| \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$. En déduire la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ et de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

Exercice 10 : Semi-convergence d'une série trigonométrique

On utilise les résultats de l'exercice 9.

1. Montrer que $|\sin n| \geq \sin^2 n$ pour tout entier n , puis linéariser $\sin^2 n$.
2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 n}{n}$ diverge, puis que $\sum_{n \geq 1} \frac{|\sin n|}{n}$ diverge.
3. Conclure que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}$ est semi-convergente.
4. Plus généralement, déterminer selon $\alpha > 0$ la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^\alpha}$.

Exercice 11 : Séries de Bertrand

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

1. On suppose $\alpha > 1$. Montrer que $\sum u_n$ converge, en comparant à $1/n^\gamma$ pour un γ bien choisi.
2. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\sum u_n$ diverge.
3. On suppose $\alpha = 1$. Étudier la nature de $\sum u_n$ selon β , à l'aide d'une comparaison série-intégrale lorsque $\beta > 0$.
4. Applications. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ (convergence et convergence absolue), de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$ et de $\sum_{n \geq 2} \frac{(\ln n)^{10}}{n^{1,01}}$.

Exercice 12 : Racine n-ième de n et séries associées

Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = n^{1/n} - 1$.

1. Montrer que $a_n \geq 0$ et que $a_n \sim \frac{\ln n}{n}$.
2. Déterminer la nature de $\sum a_n$ et celle de $\sum a_n^2$.
3. Étudier les variations de $x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$ sur $[1, +\infty[$. En déduire que $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.
4. Déterminer la nature de $\sum (-1)^n a_n$. Est-elle absolument convergente ?

Exercice 13 : Natures variées par développement asymptotique

Déterminer la nature des séries suivantes, et préciser si elles sont absolument convergentes.

1. $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\pi n^2)}{n}.$
3. $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\pi \sqrt{n^2 + 1}\right).$ On donnera un développement de $\sqrt{n^2 + 1}$ à la précision $O(1/n^3).$
4. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n + i}{n}.$

Exercice 14 : Produits de Cauchy absolument convergents

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Calculer le produit de Cauchy de $\sum z^n$ par elle-même. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$, puis calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}.$
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $E(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$ Justifier que cette série converge absolument, puis montrer que $E(a) E(b) = E(a+b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}.$
3. En déduire que $E(z) \neq 0$ et que $E(-z) = 1/E(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}.$

Exercice 15 : Un produit de Cauchy divergent

Pour $n \geq 0$, on pose $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}},$ et on note $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$

1. Montrer que $\sum a_n$ converge. Converge-t-elle absolument ?
2. Montrer que $c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$.
3. Montrer que $\sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leq \frac{n+2}{2}$ pour $0 \leq k \leq n$. En déduire que $|c_n| \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$.
4. Conclure sur la nature du produit de Cauchy. Quelle hypothèse du théorème du cours manque-t-il ?

Exercice 16 : Sommation par paquets

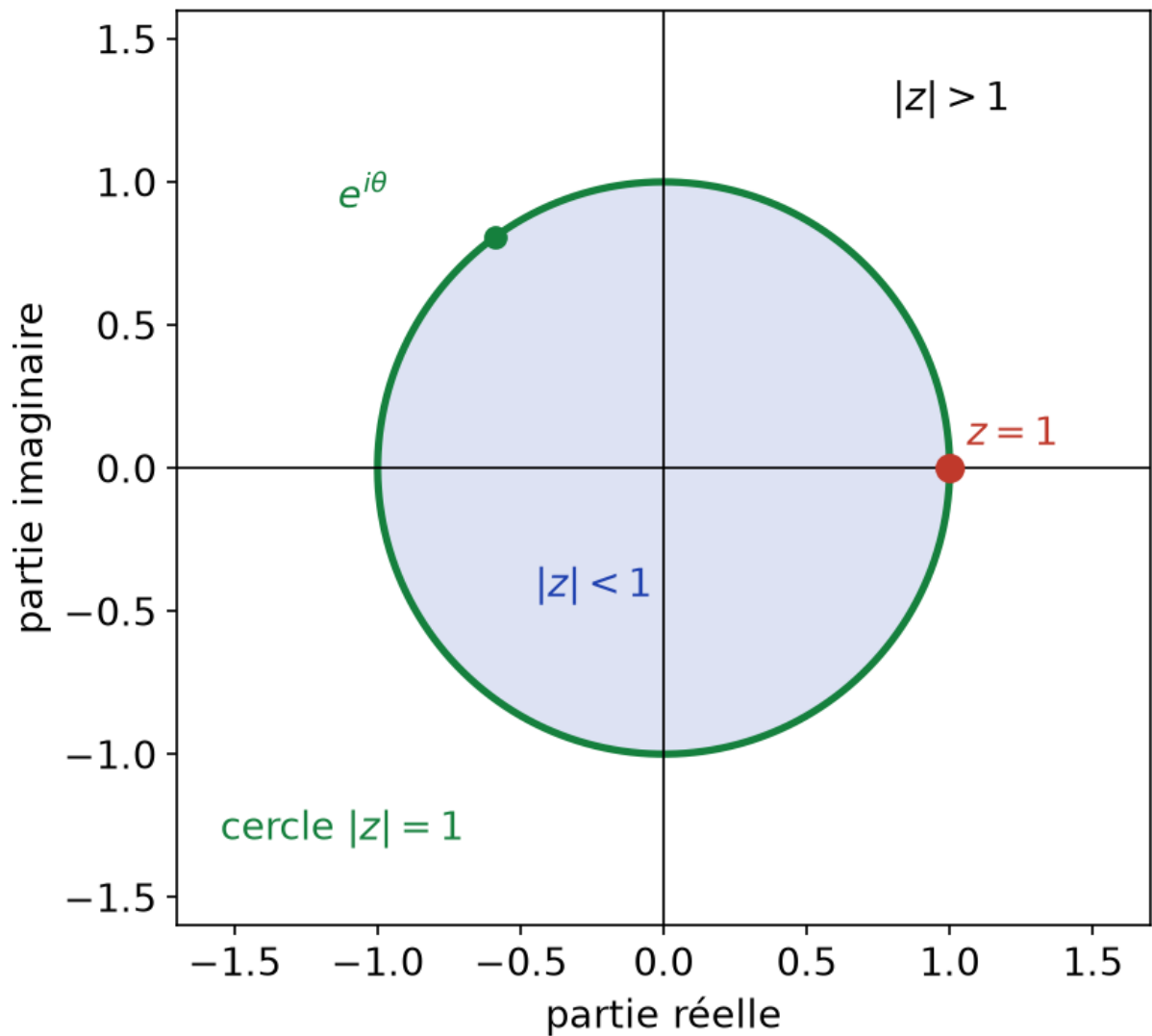
On admet que $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$, où γ est une constante réelle.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ diverge, alors que la série des paquets $(1-1) + (1-1) + \dots$ converge.
2. Soit $\sum u_n$ une série telle que $u_n \rightarrow 0$, et $p \geq 1$ un entier. On note $S_n = u_1 + \dots + u_n$. Montrer que si $(S_{pN})_N$ converge vers S , alors (S_n) converge vers S .
3. On définit $u_n = \frac{1}{n}$ si n n'est pas multiple de 3, et $u_n = -\frac{2}{n}$ si n est multiple de 3. Calculer S_{3N} à l'aide de H_{3N} et H_N .
4. En déduire que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 17 : Série logarithmique complexe

Pour $z \in \mathbb{C}$, on étudie la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$. La figure ci-dessous situe les différents cas dans le plan

complexe.



1. Montrer que la série converge absolument si $|z| < 1$.
2. Montrer qu'elle diverge grossièrement si $|z| > 1$.
3. Étudier le cas $z = 1$.
4. Soit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que la série converge, mais pas absolument.
5. Dans le cas de la question 4, majorer le module du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}$. Comparer, pour $z = -1$, avec la majoration donnée par le critère spécial.

Exercice 18 : Suite contractante et série télescopique

On définit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin x$.

1. Montrer que $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$ pour tous réels x, y .
2. En déduire que $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \geq 0$.
3. Montrer que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ .
4. Montrer que ℓ est l'unique solution de l'équation $x = 1 + \frac{1}{2} \sin x$.
5. Établir que $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \geq 0$. Quel rang suffit pour une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près ?

Exercice 19 : Un produit de Cauchy de séries semi-convergentes

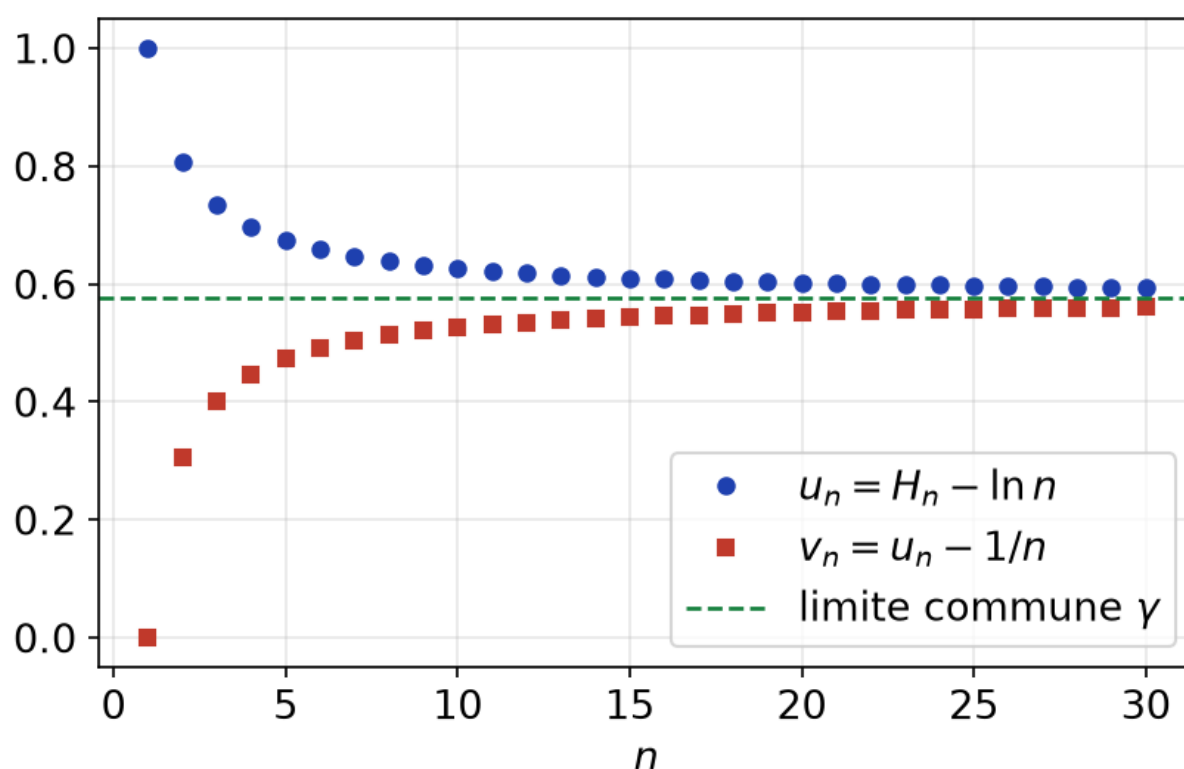
Pour $n \geq 0$, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, et on note $\sum c_n$ le produit de Cauchy de $\sum a_n$ par elle-même. On note $H_m = \sum_{j=1}^m \frac{1}{j}$.

1. Justifier que $\sum a_n$ est semi-convergente.
2. Vérifier que $\frac{1}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k+1} \right)$. En déduire que $c_n = (-1)^n \frac{2^{n-1} H_{n+1}}{n+2}$.
3. Montrer que $d_n = \frac{H_{n+1}}{n+2}$ est décroissante et tend vers 0.
4. En déduire que $\sum c_n$ converge. Est-elle absolument convergente ? Comparer avec l'exercice 15.

Exercice 20 : Problème, série harmonique alternée et réarrangements

On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ pour $n \geq 1$.

Partie A : la constante d'Euler. On pose $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. La figure ci-dessous représente ces deux suites.



1. Montrer que $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.
2. En déduire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note γ leur limite commune, de sorte que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Partie B : la somme de la série.

1. Montrer que $S_{2N} = H_{2N} - H_N$ pour $N \geq 1$.
2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et que sa somme vaut $\ln 2$.
3. Montrer que $|\ln 2 - S_n| \leq \frac{1}{n+1}$ et que $\ln 2 - S_n$ a le signe de $(-1)^n$.

Partie C : deux réarrangements. On somme les mêmes termes dans un autre ordre.

1. Dans la série T , on prend un terme positif puis deux termes négatifs :
 $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \dots$. Montrer que la somme des $3N$ premiers termes vaut $\frac{1}{2}(H_{2N} - H_N)$. En déduire que T converge et que sa somme vaut $\frac{1}{2} \ln 2$.
2. Dans la série U , on prend deux termes positifs puis un terme négatif :
 $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$. Exprimer la somme des $3N$ premiers termes à l'aide de H_{4N} , H_{2N} et H_N . En déduire que U converge et que sa somme vaut $\frac{3}{2} \ln 2$.
3. Que montrent ces résultats ? Pourquoi un tel phénomène est-il impossible pour une série absolument convergente ?

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [séries à termes quelconques, cours de maths en L2](#)
- À maîtriser avant : [Séries numériques à termes positifs](#)
- Chapitre précédent : [Séries numériques à termes positifs](#)
- Chapitre suivant : [Intégrales généralisées](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)