

Séries à termes quelconques

Corrigé de l'exercice 1 : Suites de Cauchy et série harmonique

1. La somme $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ compte n termes. Chacun est au moins égal au plus petit, $\frac{1}{2n}$. Donc $H_{2n} - H_n \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Supposons (H_n) de Cauchy. Avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$, il existerait N tel que $|H_p - H_q| \leq \frac{1}{4}$ pour $p, q \geq N$. Or $p = 2N$ et $q = N$ donnent un écart d'au moins $\frac{1}{2}$: contradiction. Par conséquent, (H_n) **n'est pas de Cauchy**, donc elle diverge, car toute suite convergente est de Cauchy.

2. Pour $p > n \geq 1$, l'inégalité triangulaire et $|\cos k| \leq 1$ donnent $|v_p - v_n| \leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^2}$. Comme $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. La somme est donc télescopique :

$$|v_p - v_n| \leq \sum_{k=n+1}^p \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{p} \leq \frac{1}{n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1/\varepsilon$. Pour $p, q \geq N$, on obtient $|v_p - v_q| \leq \varepsilon$. Ainsi, (v_n) est de Cauchy. Par complétude de $\mathbb{R}$, (v_n) **converge**.

3. D'abord, $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$. Ensuite, $w_{4n} - w_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \rightarrow +\infty$. Donc (w_n) **n'est pas de Cauchy**, et d'ailleurs elle diverge. En effet, la définition exige $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$ pour **tous** les couples $p, q \geq N$, et pas seulement pour des indices consécutifs.

Point de méthode : pour montrer qu'une suite n'est pas de Cauchy, on exhibe deux indices p, q arbitrairement grands, souvent n et $2n$, dont l'écart ne tend pas vers 0.

Corrigé de l'exercice 2 : Convergence absolue de séries réelles et complexes

1. Pour $n \geq 1$, $\left| \frac{\sin n}{n^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$. Or la série de Riemann $\sum 1/n^{3/2}$ converge, car $\frac{3}{2} > 1$. Par comparaison de séries positives, **la série converge absolument**.
2. On a $|u_n| = \frac{\ln n}{n^2}$. De plus, $n^{3/2} |u_n| = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ par croissances comparées. Donc $|u_n| = o(1/n^{3/2})$, et **la série converge absolument**.
3. Comme $|e^{in}| = 1$, on a $|u_n| = \frac{1}{n^{3/2}}$. Ainsi, **la série converge absolument**.
4. Pour $n \geq 1$, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$. D'après la règle de d'Alembert appliquée à $\sum |u_n|$, **la série converge absolument**.
5. Posons $z = \frac{1+i}{2}$. Alors $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, donc la série géométrique $\sum |z|^n$ converge : **la série converge absolument**. Sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{2}.$$

La somme vaut $1+i$.

Corrigé de l'exercice 3 : Critère spécial des séries alternées

1. Posons $a_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. On a $a_n \geq 0$ et $a_n \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0$. De plus, $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \leq 0$ pour $x \geq 1$. Donc $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Le critère spécial des séries alternées s'applique : la série converge. En revanche, $a_n \sim \frac{1}{n}$ et $\sum 1/n$ diverge. Donc **la série est semi-convergente**.
2. La suite $1/n^\alpha$ est positive, décroissante et tend vers 0 car $\alpha > 0$. Par le critère spécial, la

série converge pour tout $\alpha > 0$. Ensuite, $\sum 1/n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Ainsi, **la série est absolument convergente pour $\alpha > 1$ et semi-convergente pour $0 < \alpha \leq 1$.**

3. Posons $g(x) = \frac{\ln x}{x}$. On a $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, négatif pour $x \geq e$. Donc $(\ln n / n)$ décroît à partir de $n = 3$. De plus, elle tend vers 0 par croissances comparées. Le critère spécial s'applique à $\sum_{n \geq 3}$, et les deux premiers termes ne changent pas la nature. La série converge. Cependant, $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 3$. Par conséquent, **la série est semi-convergente.**

Point de méthode : la décroissance ne doit être vérifiée qu'à partir d'un certain rang, car les premiers termes n'influent pas sur la nature d'une série.

Corrigé de l'exercice 4 : Majoration du reste d'une série alternée

- La suite $a_n = 1/n^3$ décroît vers 0. Le critère spécial donne donc $|S - S_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{(N+1)^3}$. Or $\frac{1}{(N+1)^3} \leq 10^{-3}$ équivaut à $N + 1 \geq 10$. **Le plus petit entier est $N = 9$.** Ensuite, le reste $S - S_9$ a le signe du premier terme omis, $u_{10} = \frac{(-1)^{11}}{1000} < 0$. Donc $S < S_9$. Enfin, S est compris entre S_9 et $S_{10} = S_9 - 10^{-3}$. **On obtient $S_9 - 10^{-3} \leq S \leq S_9$.**
- Ici $a_n = \frac{1}{2n+1}$, qui décroît vers 0. Le reste après le terme d'indice N vérifie $|R_N| \leq \frac{1}{2N+3}$. La condition $\frac{1}{2N+3} \leq 10^{-2}$ équivaut à $2N + 3 \geq 100$, soit $N \geq 48,5$. On prend donc $N = 49$. Les indices vont de 0 à 49 : **il faut 50 termes.** Cette convergence est très lente : chaque décimale supplémentaire coûte environ dix fois plus de termes.
- La suite $a_n = \frac{1}{n!}$ est décroissante, car $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \leq 1$, et tend vers 0. Le reste vérifie donc $|R_N| \leq \frac{1}{(N+1)!}$. Or $9! = 362\,880 < 10^6$ et $10! = 3\,628\,800 \geq 10^6$. Il faut donc $N + 1 \geq 10$. **Le plus petit entier est $N = 9$.** Au contraire de la question 2, la convergence est ici très rapide.

Corrigé de l'exercice 5 : Critère de Cauchy et tranches de séries

1. Soit $\varepsilon > 0$. Le critère de Cauchy fournit N tel que $\left| \sum_{k=n+1}^p u_k \right| \leq \varepsilon$ pour $p > n \geq N$. En prenant $p = 2n$, on obtient $|u_{n+1} + \dots + u_{2n}| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$. Ainsi, $u_{n+1} + \dots + u_{2n} \rightarrow 0$.

2. Comme (u_n) décroît, chacun des n termes $u_{n+1}, \dots, u_{2n}$ est au moins égal à u_{2n} . Donc $0 \leq n u_{2n} \leq u_{n+1} + \dots + u_{2n}$. Par encadrement, $n u_{2n} \rightarrow 0$, puis $2n u_{2n} \rightarrow 0$. Ensuite, pour les indices impairs, la décroissance donne

$$0 \leq (2n+1) u_{2n+1} \leq (2n+1) u_{2n} = \frac{2n+1}{2n} \cdot 2n u_{2n} \rightarrow 1 \cdot 0 = 0.$$

Les deux sous-suites d'indices pairs et impairs tendent vers 0. Par conséquent, $n u_n \rightarrow 0$.

3. La fonction $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ est positive, continue et décroissante sur $[2, +\infty[$, comme inverse d'un produit de fonctions positives croissantes. Pour $k \geq 2$, on a donc

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t) dt. \text{ En sommant,}$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \geq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \rightarrow +\infty.$$

Donc **la série diverge**. Pourtant, son terme est positif, décroissant, et $n u_n = \frac{1}{\ln n} \rightarrow 0$. **La condition $n u_n \rightarrow 0$ n'est donc pas suffisante.**

4. Le terme $u_n = \frac{1}{3n+2}$ est positif et décroissant. Or $n u_n = \frac{n}{3n+2} \rightarrow \frac{1}{3} \neq 0$. Si la série convergeait, la question 2 donnerait $n u_n \rightarrow 0$. **La série diverge.**

Corrigé de l'exercice 6 : Une série alternée divergente

1. Si n est pair, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} > 0$. Si n est impair, $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$. Or $n \geq 2$ donne $\sqrt{n} < n$, donc $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ainsi, $u_n < 0$ pour n impair : la série est alternée.
2. On a $|u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Donc $u_n \rightarrow 0$.
3. La série $\sum (-1)^n / \sqrt{n}$ converge par le critère spécial. En revanche, la série harmonique $\sum 1/n$ diverge. Si $\sum u_n$ convergerait, alors $\sum 1/n = \sum (u_n - (-1)^n / \sqrt{n})$ convergerait aussi. **La série $\sum u_n$ diverge.**
4. Le signe alterne et $u_n \rightarrow 0$. C'est donc **la décroissance de $(|u_n|)$ qui fait défaut**, comme on le voit sur la figure de l'énoncé. Pour $m \geq 1$, on a $|u_{2m+1}| = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} - \frac{1}{2m+1}$ et $|u_{2m+2}| = \frac{1}{\sqrt{2m+2}} + \frac{1}{2m+2}$. Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à $x \rightarrow x^{-1/2}$, dont la dérivée est majorée en valeur absolue par $\frac{1}{2} (2m+1)^{-3/2}$ sur $[2m+1, 2m+2]$,
$$\frac{1}{\sqrt{2m+1}} - \frac{1}{\sqrt{2m+2}} \leq \frac{1}{2 (2m+1)^{3/2}} < \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+2}.$$
En réarrangeant, on obtient $|u_{2m+1}| < |u_{2m+2}|$. **La suite $(|u_n|)$ n'est pas décroissante.**

Corrigé de l'exercice 7 : Terme alterné perturbé, discussion selon le paramètre

1. Pour $n \geq 2$ et $\alpha > 0$, on a $n^\alpha \geq 2^\alpha > 1$. Donc $n^\alpha + (-1)^n \geq n^\alpha - 1 > 0$, et u_n est bien défini. De plus, $\frac{n^\alpha + (-1)^n}{n^\alpha} \rightarrow 1$. Ainsi, $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
2. On réduit au même dénominateur :

$$w_n = (-1)^n \frac{n^\alpha - n^\alpha - (-1)^n}{n^\alpha (n^\alpha + (-1)^n)} = \frac{-1}{n^\alpha (n^\alpha + (-1)^n)}.$$

D'après la question 1, le dénominateur est positif. Donc $w_n < 0$ **et** $w_n \sim -\frac{1}{n^{2\alpha}}$.

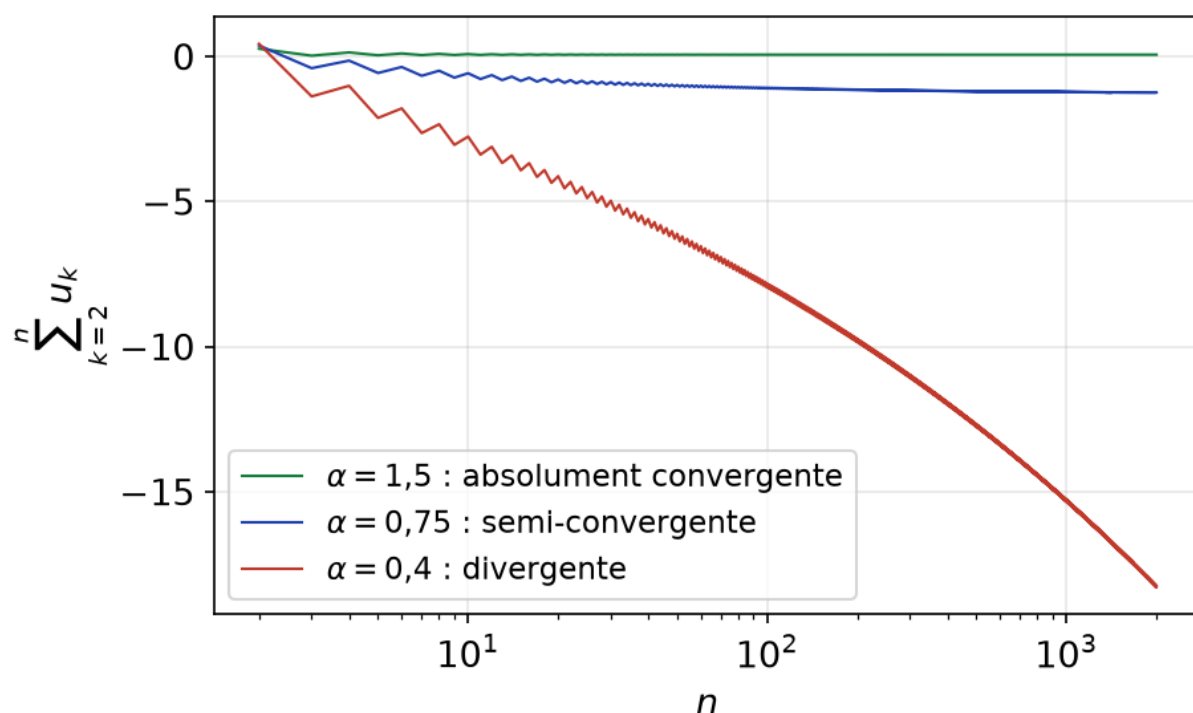
3. On écrit $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + w_n$. La série $\sum (-1)^n/n^\alpha$ converge toujours, par le critère spécial. Ensuite, $-w_n$ est positif et équivalent à $1/n^{2\alpha}$. Donc $\sum w_n$ converge si et seulement si $2\alpha > 1$.

- Si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, $\sum u_n$ est la somme d'une série convergente et d'une série divergente. Elle **diverge**.
- Si $\alpha > \frac{1}{2}$, $\sum u_n$ est la somme de deux séries convergentes. Elle converge. De plus, $|u_n| \sim 1/n^\alpha$, donc la convergence est absolue si et seulement si $\alpha > 1$.

Bilan : absolument convergente pour $\alpha > 1$, semi-convergente pour $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, divergente pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

4. Le théorème de comparaison par équivalents ne vaut que pour des séries de **signe constant**. Ici, les termes changent de signe. Ainsi, pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$, u_n est équivalent au terme d'une série convergente, mais la série diverge.

La figure ci-dessous illustre les trois régimes. Pour $\alpha = 0,4$, les sommes partielles descendent sans limite, à la vitesse de $-\sum 1/k^{0,8}$. Pour $\alpha = 0,75$ et $\alpha = 1,5$, elles se stabilisent.



Corrigé de l'exercice 8 : Logarithme d'un terme alterné

- Pour $n \geq 2$, on a $n^\alpha > 1$, donc $\frac{1}{n^\alpha} < 1$. Ainsi, $1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \geq 1 - \frac{1}{n^\alpha} > 0$, et le **logarithme est bien défini**.
- Le développement limité $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donne $\ln(1+x) - x \sim -\frac{x^2}{2}$ quand $x \rightarrow 0$. Or $x_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \rightarrow 0$ et $x_n^2 = \frac{1}{n^{2\alpha}}$. Par conséquent, $w_n \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$. En particulier, w_n est négatif à partir d'un certain rang.
- Le raisonnement est celui de l'exercice 7. La série $\sum (-1)^n / n^\alpha$ converge par le critère spécial. Ensuite, $-w_n$ est positif à partir d'un certain rang et équivalent à $\frac{1}{2n^{2\alpha}}$. Donc $\sum w_n$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$. Enfin, $|u_n| \sim |x_n| = \frac{1}{n^\alpha}$, car $\ln(1+x) \sim x$. **La série est absolument convergente pour $\alpha > 1$, semi-convergente pour $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, divergente pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$.**
- Pour $k \geq 1$, on calcule

$$u_{2k} + u_{2k+1} = \ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) + \ln\left(\frac{2k}{2k+1}\right) = \ln 1 = 0.$$

Donc $\sum_{n=2}^{2N+1} u_n = 0$ pour tout $N \geq 1$. La série converge d'après la question 3, puisque $\alpha = 1 > \frac{1}{2}$. Sa somme est la limite de la sous-suite des sommes partielles $\sum_{n=2}^{2N+1} u_n$. La somme vaut 0.

Corrigé de l'exercice 9 : Démonstration du critère d'Abel

1. Pour $k \geq 1$, on a $b_k = B_k - B_{k-1}$. Donc

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1} = \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k.$$

Le terme $k = 0$ de la seconde somme est nul car $B_0 = 0$. On isole alors le terme $k = n$ de la première somme et on regroupe : $\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

2. D'une part, $|a_n B_n| \leq M a_n \rightarrow 0$. D'autre part, (a_k) décroît, donc $a_k - a_{k+1} \geq 0$ et $|(a_k - a_{k+1}) B_k| \leq M (a_k - a_{k+1})$. La série télescopique $\sum (a_k - a_{k+1})$ converge, car $\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_n \rightarrow a_1$. Par comparaison, $\sum (a_k - a_{k+1}) B_k$ converge absolument, donc converge. Les deux termes de la formule ont une limite. Par conséquent, $\sum a_n b_n$ **converge**.

3. Le même calcul, mené entre $n+1$ et p , donne

$$\sum_{k=n+1}^p a_k b_k = a_p B_p - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.$$

Chaque $|B_k|$ est majoré par M . La dernière somme est donc majorée en module par $M (a_{n+1} - a_p)$. Ainsi,

$$\left| \sum_{k=n+1}^p a_k b_k \right| \leq M a_p + M a_{n+1} + M (a_{n+1} - a_p) = 2 M a_{n+1}.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, le reste vérifie $|R_n| \leq 2 M a_{n+1}$.

4. Comme $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{i\theta} \neq 1$. La somme géométrique vaut

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}, \text{ de module au plus } \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}.$$

Or $1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) = -2i \sin(\theta/2) e^{i\theta/2}$, de module $2 |\sin(\theta/2)|$.

D'où la majoration par $\frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$. On applique alors la question 2 avec $a_n = \frac{1}{n}$ et

$b_n = e^{in\theta}$: la série $\sum e^{in\theta}/n$ converge. Ses parties réelle et imaginaire convergent aussi. **Les séries $\sum \cos(n\theta)/n$ et $\sum \sin(n\theta)/n$ convergent.**

Corrigé de l'exercice 10 : Semi-convergence d'une série trigonométrique

1. Comme $0 \leq |\sin n| \leq 1$, on a $\sin^2 n = |\sin n| \cdot |\sin n| \leq |\sin n|$. De plus, la formule de duplication donne $\sin^2 n = \frac{1 - \cos(2n)}{2}$.

2. On écrit $\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos(2n)}{2n}$. D'abord, $\sum \frac{\cos(2n)}{n}$ converge, d'après l'exercice 9 avec $\theta = 2 \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Ensuite, $\sum \frac{1}{2n}$ diverge. La différence d'une série divergente et d'une série convergente diverge. Donc $\sum \frac{\sin^2 n}{n}$ diverge. Enfin, $\frac{|\sin n|}{n} \geq \frac{\sin^2 n}{n} \geq 0$. Par comparaison de séries positives, $\sum \frac{|\sin n|}{n}$ **diverge**.

3. L'exercice 9, avec $\theta = 1$, montre que $\sum \frac{\sin n}{n}$ converge. La question 2 montre qu'elle ne converge pas absolument. **Elle est donc semi-convergente.**

4. Si $\alpha > 1$, on a $\left| \frac{\sin n}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$: convergence absolue. Si $0 < \alpha \leq 1$, la suite $1/n^\alpha$ décroît vers 0, et le critère d'Abel donne la convergence. Cependant, $\frac{|\sin n|}{n^\alpha} \geq \frac{|\sin n|}{n}$, terme d'une série divergente. **La série est absolument convergente pour $\alpha > 1$ et semi-convergente pour $0 < \alpha \leq 1$.**

Corrigé de l'exercice 11 : Séries de Bertrand

1. Soit $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, de sorte que $1 < \gamma < \alpha$. Alors $n^\gamma u_n = \frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \rightarrow 0$, car une puissance négative de n l'emporte sur toute puissance de $\ln n$. Donc $u_n = o(1/n^\gamma)$ avec $\gamma > 1$. Par comparaison de séries positives, $\sum u_n$ **converge**.

2. Si $\alpha < 1$, alors $n u_n = \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \rightarrow +\infty$, toujours par croissances comparées. Il existe donc un rang à partir duquel $n u_n \geq 1$, soit $u_n \geq \frac{1}{n}$. **La série diverge**.

3. On suppose $\alpha = 1$. Si $\beta \leq 0$, on a $(\ln n)^{-\beta} \geq 1$ pour $n \geq 3$, donc $u_n \geq \frac{1}{n}$: divergence. Si $\beta > 0$, la fonction $f(x) = \frac{1}{x (\ln x)^\beta}$ est positive, continue et décroissante sur $[2, +\infty[$. La série et l'intégrale $\int_2^{+\infty} f$ sont donc de même nature. Pour $X \geq 2$, le changement de variable $t = \ln x$ donne

$$\int_2^X \frac{dx}{x (\ln x)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{dt}{t^\beta}.$$

Cette intégrale a une limite finie quand $X \rightarrow +\infty$ si et seulement si $\beta > 1$, par le critère de Riemann. **Pour $\alpha = 1$, la série converge si et seulement si $\beta > 1$.**

4. Applications.

◦ La suite $\frac{1}{n \ln n}$ est positive, décroissante et tend vers 0. Par le critère spécial, $\sum \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ converge. En revanche, $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge ($\alpha = \beta = 1$). **Elle est semi-convergente.**

◦ Pour $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$, on a $\alpha = \frac{1}{2} < 1$: **elle diverge**.

◦ Pour $\sum \frac{(\ln n)^{10}}{n^{1,01}}$, on a $\alpha = 1,01 > 1$ et $\beta = -10$: **elle converge**, malgré le facteur $(\ln n)^{10}$.

Corrigé de l'exercice 12 : Racine n-ième de n et séries associées

1. On a $a_n = e^{\ln n / n} - 1$. Comme $\ln n \geq 0$, on a $e^{\ln n / n} \geq 1$, donc $a_n \geq 0$. De plus, $x_n = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$, et $e^x - 1 \sim x$ quand $x \rightarrow 0$. Donc $a_n \sim \frac{\ln n}{n}$.
2. La série $\sum a_n$ est à termes positifs, et a_n est équivalent au terme de Bertrand $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Donc $\sum a_n$ **diverge**. Ensuite, $a_n^2 \sim \frac{(\ln n)^2}{n^2}$, terme de Bertrand avec $\alpha = 2 > 1$. Donc $\sum a_n^2$ **converge**.
3. La fonction $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ a pour dérivée $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Elle croît sur $[1, e]$ et décroît sur $[e, +\infty[$. Pour $n \geq 3 > e$, la suite $\frac{\ln n}{n}$ est donc décroissante. Comme $x \rightarrow e^x - 1$ est croissante, $(a_n)_{n \geq 3}$ **est décroissante**.
4. La suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est positive, décroissante et tend vers 0. Le critère spécial donne la convergence de $\sum (-1)^n a_n$. Cependant, $\sum |(-1)^n a_n| = \sum a_n$ diverge d'après la question 2. **La série $\sum (-1)^n a_n$ est semi-convergente.**

Corrigé de l'exercice 13 : Natures variées par développement asymptotique

1. Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \in]0, 1] \subset]0, \frac{\pi}{2}]$. Le sinus est positif et croissant sur cet intervalle, donc $a_n = \sin(1/n)$ est positive et décroissante. Elle tend vers 0. Le critère spécial donne la convergence. En revanche, $a_n \sim \frac{1}{n}$, donc $\sum a_n$ diverge. **La série est semi-convergente.**
2. Les entiers n^2 et n ont la même parité. Donc $\cos(\pi n^2) = (-1)^{n^2} = (-1)^n$. La série est exactement $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. **Elle est semi-convergente.**
3. On a $\sqrt{n^2 + 1} = n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = n \left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) = n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Ensuite, $\sin(\pi n + x) = (-1)^n \sin x$. Avec $x_n = \frac{\pi}{2n} + O(1/n^3)$ et $\sin x = x + O(x^3)$, on obtient

$$u_n = (-1)^n \sin x_n = \frac{(-1)^n \pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

La série $\sum \frac{(-1)^n \pi}{2n}$ converge par le critère spécial. Le reste $O(1/n^3)$ est le terme d'une série absolument convergente. Donc $\sum u_n$ converge. Enfin, $|u_n| \sim \frac{\pi}{2n}$. **La série est semi-convergente.**

4. La partie imaginaire du terme est $\frac{1}{n}$, terme d'une série divergente. Or une série complexe converge si et seulement si ses parties réelle et imaginaire convergent. **La série diverge**, bien que sa partie réelle $\sum (-1)^n/n$ converge.

Corrigé de l'exercice 14 : Produits de Cauchy absolument convergents

1. La série $\sum z^n$ converge absolument car $|z| < 1$. Le terme du produit de Cauchy vaut $c_n = \sum_{k=0}^n z^k z^{n-k} = (n+1) z^n$. D'après le théorème sur le produit de Cauchy de séries absolument convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n = \left(\frac{1}{1-z} \right)^2 = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Avec $z = \frac{1}{2}$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{(1/2)^2} = 4$.

2. Pour $z \neq 0$, $\frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0 < 1$. Par la règle de d'Alembert, $\sum z^n/n!$ converge absolument ; c'est évident pour $z = 0$. Le produit de Cauchy de $E(a)$ et $E(b)$ a pour terme

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{(a+b)^n}{n!},$$

par la formule du binôme. Les deux séries étant absolument convergentes,

$$E(a) E(b) = E(a+b).$$

3. Avec $a = z$ et $b = -z$, on obtient $E(z) E(-z) = E(0) = 1$. Un produit égal à 1 n'a aucun facteur nul. Donc $E(z) \neq 0$ et $E(-z) = \frac{1}{E(z)}$.

Corrigé de l'exercice 15 : Un produit de Cauchy divergent

- La suite $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ est positive, décroissante et tend vers 0. Par le critère spécial, $\sum a_n$ **converge**. Cependant, $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, terme de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$. **Elle ne converge pas absolument.**
- Pour $0 \leq k \leq n$, on a $a_k b_{n-k} = \frac{(-1)^k (-1)^{n-k}}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k+1}}$. Or $(-1)^k (-1)^{n-k} = (-1)^n$ ne dépend pas de k . En sommant, $c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$.
- L'inégalité arithmético-géométrique $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, avec $x = k+1$ et $y = n-k+1$, donne $\sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leq \frac{n+2}{2}$. Chacun des $n+1$ termes de la somme est donc au moins égal à $\frac{2}{n+2}$. Ainsi, $|c_n| \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$.
- Pour $n \geq 0$, $\frac{2(n+1)}{n+2} \geq 1$, car $2n+2 \geq n+2$. Donc $|c_n| \geq 1$ et c_n ne tend pas vers 0. **Le produit de Cauchy diverge grossièrement.** Il manque l'hypothèse de **convergence absolue** des deux séries.

Corrigé de l'exercice 16 : Sommation par paquets

- Le terme $(-1)^n$ ne tend pas vers 0, donc $\sum (-1)^n$ diverge grossièrement. Pourtant, chaque paquet $(1-1)$ est nul, et la série des paquets converge vers 0. **Le regroupement**

peut donc créer une convergence qui n'existe pas.

2. Soit $n \geq p$ et $N = \lfloor n/p \rfloor$, de sorte que $pN \leq n < pN + p$. Alors

$$|S_n - S_{pN}| = |u_{pN+1} + \dots + u_n| \leq p \max_{pN < j \leq pN + p} |u_j|.$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $N \rightarrow +\infty$, donc ce majorant tend vers 0 car $u_j \rightarrow 0$.
Comme $S_{pN} \rightarrow S$, on conclut que $S_n \rightarrow S$.

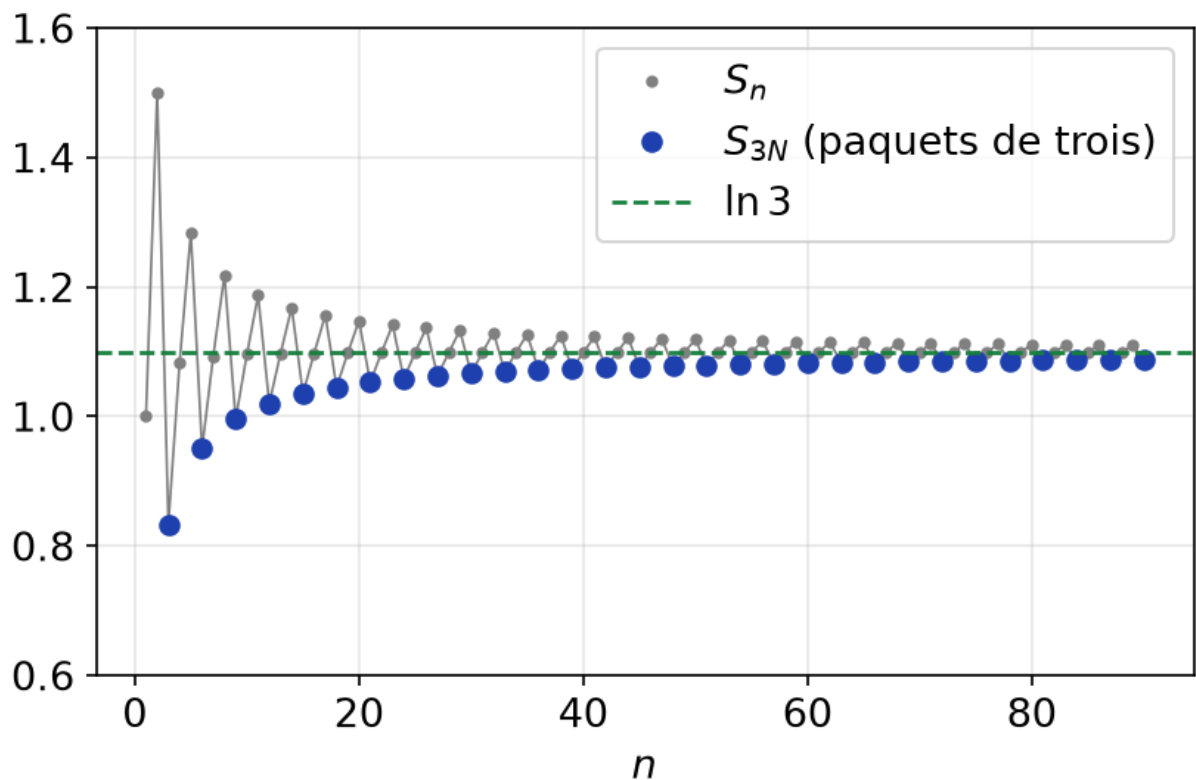
3. Pour $n = 3k$, on a $u_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n}$. Donc

$$S_{3N} = \sum_{n=1}^{3N} \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^N \frac{3}{3k} = H_{3N} - H_N.$$

On obtient $S_{3N} = H_{3N} - H_N$.

4. D'après le développement admis, $S_{3N} = \ln(3N) + \gamma - \ln N - \gamma + o(1) = \ln 3 + o(1)$.
Donc $S_{3N} \rightarrow \ln 3$. De plus, $|u_n| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$. La question 2, avec $p = 3$, montre que (S_n) converge vers $\ln 3$. **La série converge et sa somme vaut $\ln 3$.**

La figure suivante montre les sommes partielles S_n . Les points bleus, qui correspondent aux paquets complets S_{3N} , montent régulièrement vers $\ln 3$. Les autres sommes partielles oscillent autour, avec un écart qui tend vers 0.



Corrigé de l'exercice 17 : Série logarithmique complexe

- Si $|z| < 1$, alors $\left| \frac{z^n}{n} \right| \leq |z|^n$, terme d'une série géométrique convergente. **La série converge absolument.**
- Si $|z| > 1$, alors $\left| \frac{z^n}{n} \right| = \frac{|z|^n}{n} \rightarrow +\infty$ par croissances comparées. Le terme général ne tend pas vers 0. **La série diverge grossièrement.**
- Pour $z = 1$, on obtient la série harmonique. **Elle diverge.**
- Soit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. On pose $a_n = \frac{1}{n}$, décroissante de limite nulle, et $b_n = e^{in\theta}$. D'après l'exercice 9, les sommes B_n sont bornées par $M = \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$. Le critère d'Abel donne la convergence. Cependant, $\left| \frac{z^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$, terme de la série harmonique. **La série converge, mais pas absolument.**
- La majoration du reste établie dans l'exercice 9 donne $|R_n| \leq \frac{2}{(n+1)|\sin(\theta/2)|}$. Pour $z = -1$,

on a $\theta = \pi$ et $\sin(\pi/2) = 1$. On obtient $|R_n| \leq \frac{2}{n+1}$. Or la série $\sum (-1)^n/n$ relève du critère spécial, qui donne $|R_n| \leq \frac{1}{n+1}$. La majoration d'Abel est donc **deux fois moins fine** dans ce cas particulier, mais elle vaut pour tout le cercle privé de 1 .

Point de méthode : sur le cercle de convergence, aucune règle générale ne s'applique. On traite chaque point, ici par le critère d'Abel.

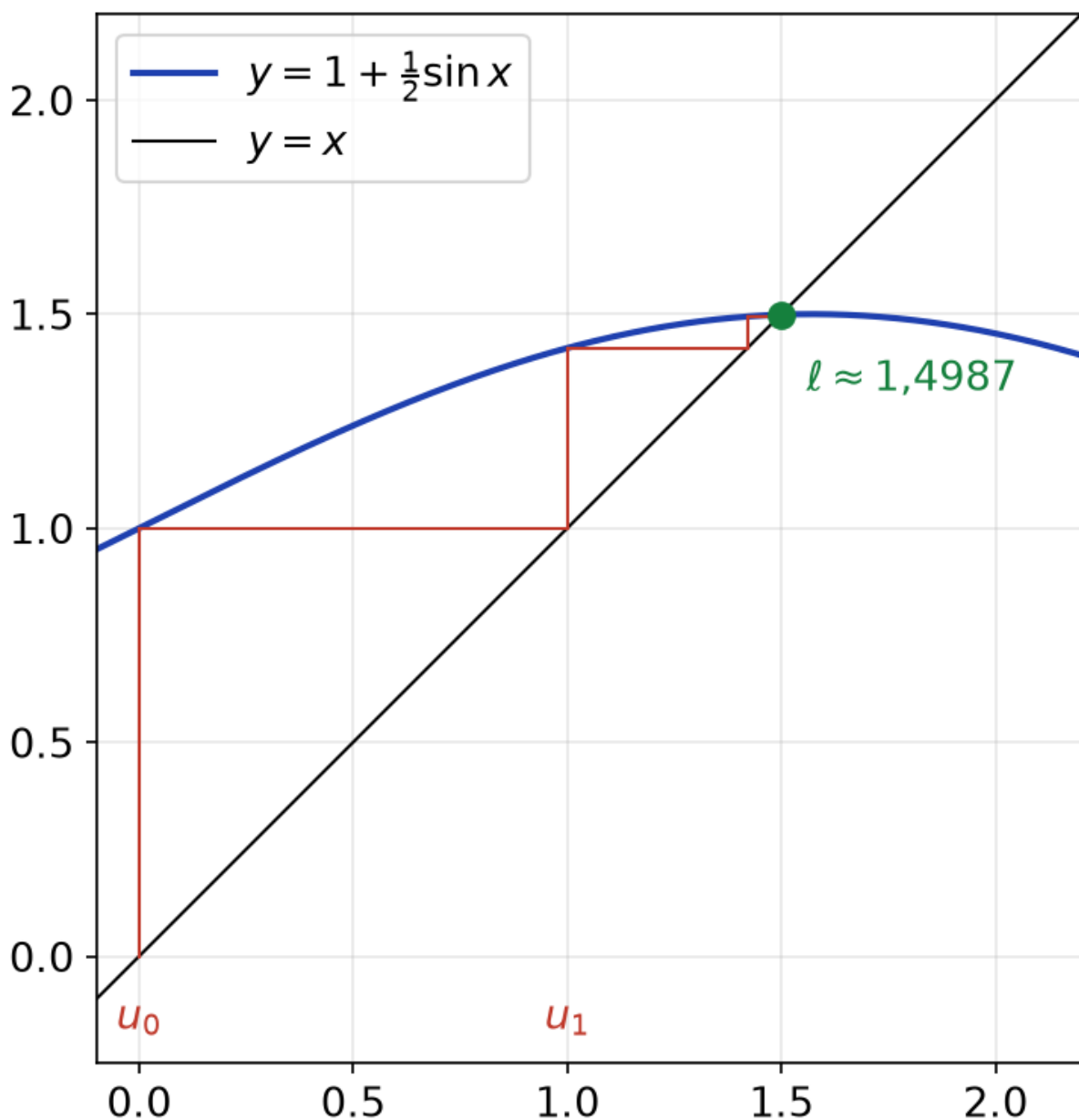
Corrigé de l'exercice 18 : Suite contractante et série télescopique

- La fonction f est dérivable et $|f'(x)| = \frac{1}{2} |\cos x| \leq \frac{1}{2}$. Par l'inégalité des accroissements finis, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$ pour tous réels x, y .
- On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$, $|u_1 - u_0| = |f(0) - 0| = 1 = \frac{1}{2^0}$. Si $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$, alors $|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq \frac{1}{2} |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. **Donc** $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$ **pour tout** n .
- La série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge. Par comparaison, $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument, donc converge. Or ses sommes partielles sont télescopiques :
$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n.$$
 La suite (u_n) **converge vers un réel** ℓ .
- La fonction f est continue. En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$. Ensuite, posons $g(x) = x - 1 - \frac{1}{2} \sin x$. On a $g'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos x \geq \frac{1}{2} > 0$, donc g est strictement croissante et s'annule au plus une fois. **Le réel** ℓ **est l'unique solution de** $x = 1 + \frac{1}{2} \sin x$.
- Pour $n \geq 0$, on écrit $\ell - u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k)$. L'inégalité triangulaire donne

$$|u_n - \ell| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pour une précision de 10^{-3} , il suffit que $2^{n-1} \geq 1000$. Or $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$. Il suffit donc que $n - 1 \geq 10$. **Le rang $n = 11$ suffit.** On trouve $\ell \approx 1,4987$.

La construction en escalier ci-dessous visualise l'itération. Les marches rétrécissent au moins de moitié à chaque étape : c'est exactement la majoration de la question 2.



Corrigé de l'exercice 19 : Un produit de Cauchy de séries semi-convergentes

1. La suite $\frac{1}{n+1}$ est positive, décroissante et tend vers 0. Par le critère spécial, $\sum a_n$ converge. Mais $\sum \frac{1}{n+1}$ est la série harmonique, qui diverge. **La série $\sum a_n$ est semi-convergente.**

2. On réduit au même dénominateur :

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k+1} = \frac{(n-k+1) + (k+1)}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{n+2}{(k+1)(n-k+1)}.$$

D'où l'identité demandée. Ensuite, comme dans l'exercice 15, $a_k a_{n-k} = \frac{(-1)^n}{(k+1)(n-k+1)}$. En sommant, on remarque que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = H_{n+1}$ et que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+1} = H_{n+1}$ aussi, par le changement d'indice $j = n - k$. Donc $c_n = (-1)^n \frac{2 H_{n+1}}{n+2}$.

3. On calcule $d_n - d_{n+1} = \frac{(n+3) H_{n+1} - (n+2) H_{n+2}}{(n+2)(n+3)}$. Or $(n+2) H_{n+2} = (n+2) H_{n+1} + 1$. Le numérateur vaut donc $H_{n+1} - 1$, qui est positif car $H_{n+1} \geq H_1 = 1$. Ainsi, (d_n) **est décroissante**. Enfin, $H_{n+1} \leq 1 + \ln(n+1)$ par comparaison à une intégrale, donc $d_n \rightarrow 0$ par croissances comparées.
4. On a $c_n = (-1)^n \cdot 2 d_n$, avec $(2 d_n)$ positive, décroissante et de limite nulle. Par le critère spécial, $\sum c_n$ **converge**. En revanche, $|c_n| = \frac{2 H_{n+1}}{n+2} \geq \frac{2}{n+2}$, terme d'une série divergente. **Le produit n'est pas absolument convergent.** Ainsi, sans convergence absolue, le produit de Cauchy peut converger (ici) ou diverger (exercice 15) : le théorème du cours ne dit rien dans ce cas.

Point de méthode : dans un produit de Cauchy, on commence toujours par factoriser le signe $(-1)^n$, qui ne dépend pas de l'indice de sommation.

Corrigé de l'exercice 20 : Problème, série harmonique alternée et réarrangements

Partie A.

1. La concavité du logarithme donne $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$. Avec $x = \frac{1}{n}$, on obtient $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$. Avec $x = -\frac{1}{n+1}$, on obtient $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$, soit $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{n+1}$. **L'encadrement est démontré.**
2. D'une part, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 0$: (u_n) décroît. D'autre part, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$: (v_n) croît. Enfin, $u_n - v_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. **Les suites sont adjacentes**, comme le montrait la figure de l'énoncé. Leur limite commune γ vérifie $H_n - \ln n \rightarrow \gamma$.

Partie B.

1. Dans S_{2N} , les termes d'indice impair sont comptés positivement et ceux d'indice pair négativement. On ajoute et on retranche la somme des termes pairs :

$$S_{2N} = H_{2N} - 2 \sum_{j=1}^N \frac{1}{2j} = H_{2N} - H_N.$$

On a bien $S_{2N} = H_{2N} - H_N$.

2. D'après la partie A, $S_{2N} = \ln(2N) + \gamma - \ln N - \gamma + o(1) \rightarrow \ln 2$. Ensuite, $S_{2N+1} = S_{2N} + \frac{1}{2N+1} \rightarrow \ln 2$. Les sous-suites paire et impaire ont la même limite. **La série converge et sa somme vaut $\ln 2$.**
3. La suite $\frac{1}{n}$ décroît vers 0, donc le critère spécial s'applique. Le reste $\ln 2 - S_n$ vérifie $|\ln 2 - S_n| \leq \frac{1}{n+1}$. Il a le signe du premier terme omis, $\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$, c'est-à-dire **le signe de $(-1)^n$.**

Partie C.

1. Le k -ième paquet de T est $\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}$. Or $\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} = \frac{1}{2(2k-1)}$. Le paquet vaut donc $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right)$. En sommant pour k de 1 à N , on reconnaît $\frac{1}{2} S_{2N}$. La somme des $3N$ premiers termes vaut donc $\frac{1}{2}(H_{2N} - H_N) \rightarrow \frac{1}{2} \ln 2$. Les termes tendent vers 0 et les paquets ont trois termes. D'après l'exercice 16, **T converge et sa somme vaut $\frac{1}{2} \ln 2$.**

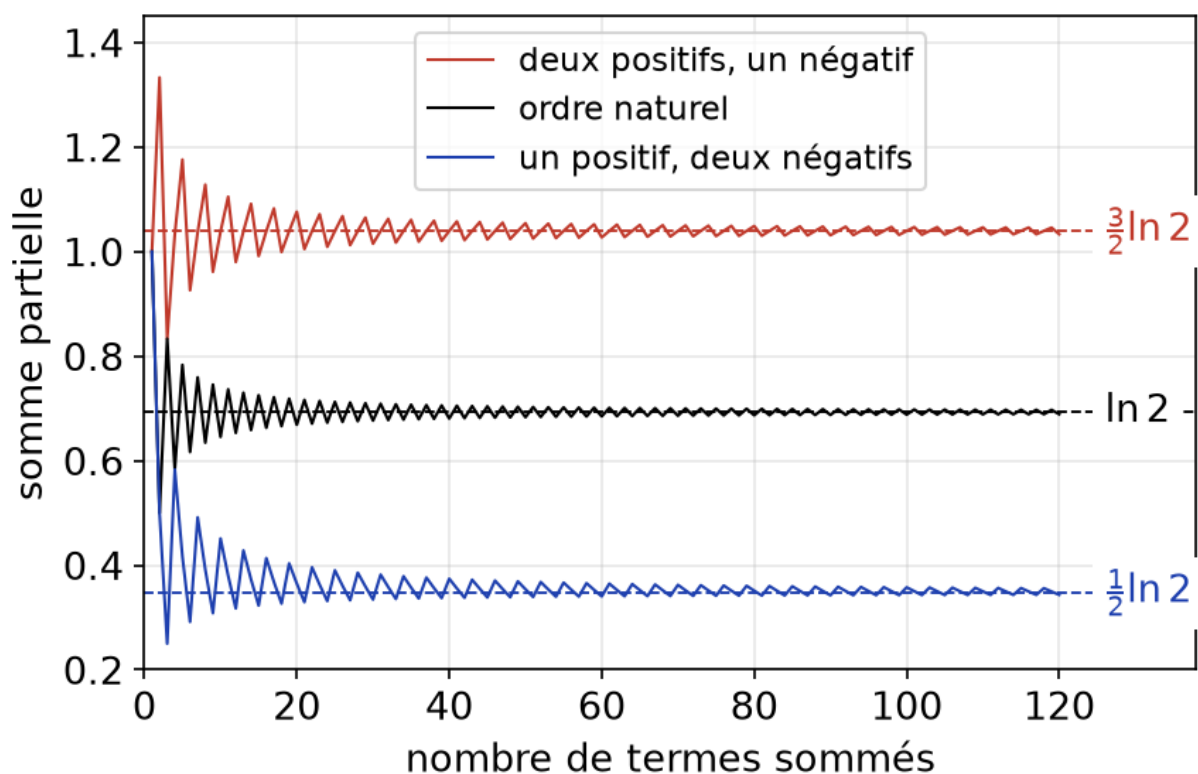
2. Les $3N$ premiers termes de U contiennent les $2N$ premiers inverses d'impairs et les N premiers inverses de pairs, affectés du signe moins. Or $\sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{2k-1} = H_{4N} - \frac{1}{2} H_{2N}$, en retirant de H_{4N} les termes pairs. La somme vaut donc

$$U_{3N} = H_{4N} - \frac{1}{2} H_{2N} - \frac{1}{2} H_N.$$

Avec la partie A, $U_{3N} = \ln 4 + \ln N - \frac{1}{2} (\ln 2 + \ln N) - \frac{1}{2} \ln N + o(1)$. Les γ et les $\ln N$ se compensent, donc $U_{3N} \rightarrow 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2$. Comme dans la question 1, **U converge et sa somme vaut $\frac{3}{2} \ln 2$.**

3. Les séries T et U ont exactement les mêmes termes que la série harmonique alternée. Pourtant, leurs sommes diffèrent : **pour une série semi-convergente, la somme dépend de l'ordre des termes**. Pour une série absolument convergente, au contraire, tout réarrangement converge vers la même somme, comme le rappelle le cours. Ce phénomène vient donc de la divergence de $\sum 1/n$.

La figure ci-dessous compare les trois ordres de sommation. Les sommes partielles se stabilisent vers trois limites distinctes : $\frac{1}{2} \ln 2$, $\ln 2$ et $\frac{3}{2} \ln 2$.



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [séries à termes quelconques, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur séries à termes quelconques](#)
- À maîtriser avant : [Séries numériques à termes positifs](#)
- Chapitre précédent : [Séries numériques à termes positifs](#)
- Chapitre suivant : [Intégrales généralisées](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)

