

Séries à termes positifs

Exercice 1 : Série géométrique : sommes partielles et reste

On considère la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

1. Calculez la somme partielle $S_N = \sum_{n=0}^N \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Déduisez-en que la série converge et donnez sa somme S .
2. Exprimez le reste $R_N = S - S_N$ en fonction de N . Déterminez le plus petit entier N tel que $R_N \leq 10^{-3}$.
3. Montrez que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ converge et calculez sa somme.
4. Calculez $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{5}{4^n}$.

Exercice 2 : Divergence grossière

Déterminez la nature des séries suivantes, de terme général défini pour $n \geq 1$.

1. $u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

$$3. \quad u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$4. \quad u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n.$$

$$5. \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}. \text{ Ici, le terme général tend vers } 0 : \text{minorez la somme partielle } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ par } \sqrt{n} \text{ et concluez.}$$

Exercice 3 : Séries télescopiques

Pour chacune des séries suivantes, calculez la somme partielle, puis donnez la nature et, le cas échéant, la somme.

$$1. \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$2. \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}. \text{ On vérifiera d'abord que } \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$$3. \quad \sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

$$4. \quad \sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

$$5. \quad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Exercice 4 : Comparaison par inégalités

Déterminez la nature des séries suivantes par une simple comparaison, sans utiliser d'équivalent.

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}.$
2. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln n}.$ On pourra utiliser l'inégalité $\ln x \leq x - 1$ pour $x > 0.$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{2 + \cos n}{n}.$
4. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}.$ On montrera d'abord que $n! \geq 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1.$
5. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 n}{n^2}.$

Exercice 5 : Équivalents usuels et nature d'une série

Justifiez que chaque terme général est positif, trouvez-en un équivalent simple et concluez sur la nature de la série.

1. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right),$ pour $n \geq 1.$
2. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$ pour $n \geq 1.$
3. $u_n = e^{1/n} - 1,$ pour $n \geq 1.$
4. $u_n = \frac{n+1}{n^3 + 2},$ pour $n \geq 0.$
5. $u_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right),$ pour $n \geq 1.$
6. $u_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{n^2 - n + 1},$ pour $n \geq 0.$

Exercice 6 : Comparaison aux séries de Riemann

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminez, selon α , la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{n^\alpha}{n^2 + 1}$.
2. Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.
3. Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4 + 1}}$.
4. Nature de $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, par deux méthodes : un équivalent, puis un calcul de somme partielle.
5. Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$.

Exercice 7 : Règle de d'Alembert

1. Étudiez la nature des séries de termes généraux $\frac{n^2}{2^n}$, $\frac{3^n}{n!}$, $\frac{n!}{n^n}$, $\frac{n^{10}}{(1,1)^n}$ et $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, pour $n \geq 1$.
2. On pose $a_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$ pour $n \geq 1$. Calculez $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. La règle de d'Alembert permet-elle de conclure ?
3. Montrez que la suite $(n a_n)_{n \geq 1}$ est croissante. Déduisez-en que $a_n \geq \frac{1}{2^n}$, puis la nature de $\sum a_n$.

Exercice 8 : Règle de Cauchy

1. Nature de $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n+1}{3n+2} \right)^n$.
2. Nature de $\sum_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}$.
3. Soit $\alpha > 0$. Déterminez, selon α , la nature de $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\alpha n}{n+1} \right)^n$. Traitez avec soin le cas $\alpha = 1$.
4. Nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

Exercice 9 : Conséquences de la majoration des sommes partielles

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite positive telle que $\sum u_n$ converge.

1. Montrez que $\sum u_n^2$ converge.
2. Montrez que $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge. Réciproquement, soit (w_n) une suite positive telle que $\sum \frac{w_n}{1+w_n}$ converge : montrez que $\sum w_n$ converge.
3. Montrez que $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge.
4. Montrez que $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge. On pourra utiliser $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.
5. La réciproque de la question 1 est-elle vraie ? Justifiez.
6. On suppose de plus (u_n) décroissante. En minorant $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$, montrez que $n u_n \rightarrow 0$.
7. Montrez par un contre-exemple que la conclusion de la question 6 peut être fausse sans l'hypothèse de décroissance.

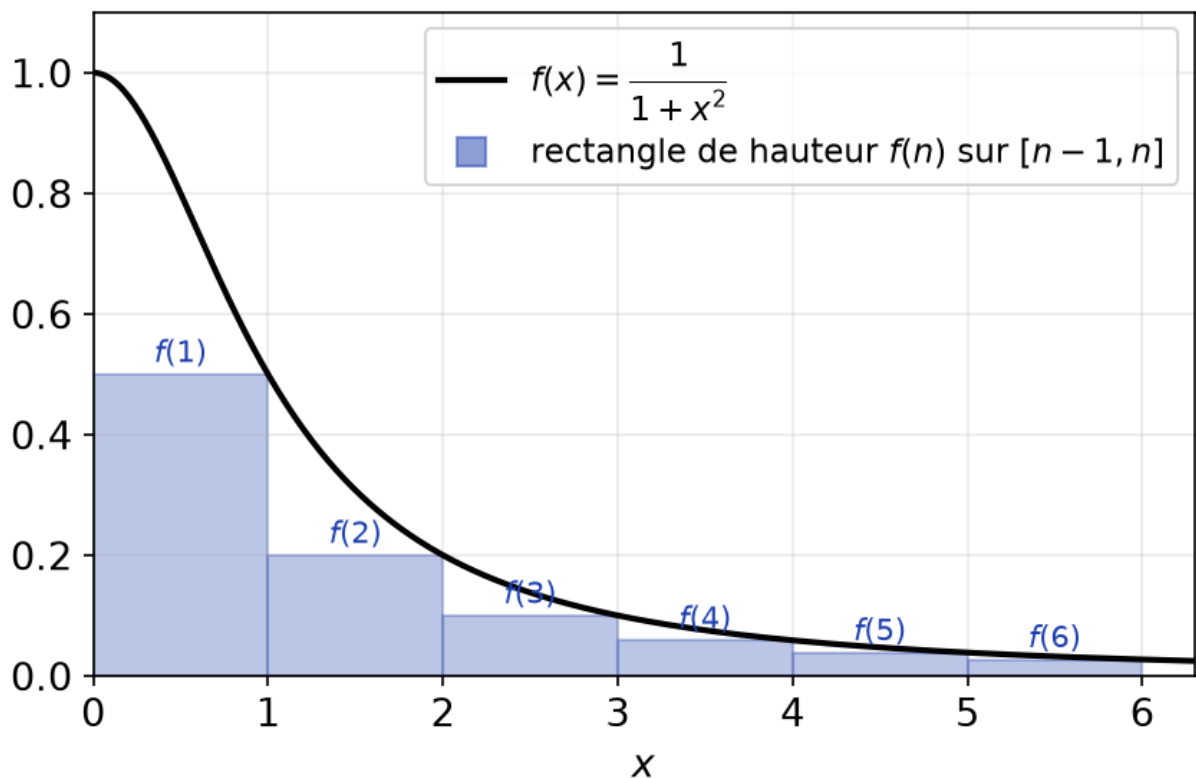
Exercice 10 : Encadrement de la série harmonique

On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrez que, pour tout $k \geq 1$, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$, et que, pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$.
2. Déduisez-en que $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$, puis que $H_n \sim \ln n$.
3. On pose $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$. Montrez que ces suites sont adjacentes. On note γ leur limite commune : donnez un encadrement de γ .
4. Encadrez le plus petit entier n tel que $H_n \geq 10$.

Exercice 11 : Encadrement d'une somme par des intégrales

On pose $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour $x \geq 0$, et $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$. La figure ci-dessous représente f et des rectangles de hauteur $f(n)$ sur $[n-1, n]$.



1. Montrez que f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Déduisez-en que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt.$$

2. Montrez que la série converge et que $\frac{\pi}{4} \leq S \leq \frac{\pi}{2}$.

3. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$. Montrez que $\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq R_n \leq \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ pour $n \geq 1$. Déduisez-en un équivalent de R_n .

4. Avec $n = 3$, déduisez-en un encadrement de S d'amplitude inférieure à 0,08.

Exercice 12 : Séries de Bertrand

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

1. On suppose $\alpha = 1$. Montrez que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\beta > 1$. On distinguera $\beta \leq 0$ et $\beta > 0$.
2. On suppose $\alpha > 1$. En comparant u_n à $\frac{1}{n^\gamma}$ avec $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, montrez que $\sum u_n$ converge pour tout β .
3. On suppose $\alpha < 1$. Montrez que $\sum u_n$ diverge pour tout β .
4. Application : nature de $\sum \frac{1}{n \ln n}$, $\sum \frac{\ln n}{n^2}$, $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$, $\sum \frac{1}{n (\ln n)^2}$ et $\sum \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$.

Exercice 13 : Reste d'une série de Riemann convergente

Soit $\alpha > 1$. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $n \geq 1$.

1. Par comparaison série-intégrale, montrez que $\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq R_n \leq \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$. Déduisez-en un équivalent de R_n .
2. Écrivez l'encadrement obtenu pour $\alpha = 2$.
3. On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrez que le plus petit entier n tel que $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 10^{-3}$ vaut 999 ou 1000.
4. Montrez que $\left| \frac{\pi^2}{6} - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n} \right) \right| \leq \frac{1}{n(n+1)}$. Quel rang suffit alors pour une précision de 10^{-3} ?

Exercice 14 : Équivalents de sommes partielles divergentes

1. Encadrez $A_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$ par des intégrales, puis montrez que $A_n \sim \frac{2}{3} n^{3/2}$.
2. Montrez que $2\sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$, puis donnez un équivalent de cette somme.
3. Montrez que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$.

Exercice 15 : Sommation des relations de comparaison

1. Donnez un équivalent de $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + 1}$.
2. Calculez $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Déduisez-en un équivalent de $B_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1}$.
3. Vérifiez que $\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)} \right)$ pour $k \geq 2$. Déduisez-en un équivalent de $C_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.
4. Soit (a_n) une suite positive telle que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrez que $\sum_{k=1}^n a_k = o(\ln n)$.
Application : $a_n = \frac{1}{n \ln(n+1)}$.
5. Soit (u_n) une suite positive telle que $u_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Montrez que $\sum u_n$ converge et que son reste est un $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 16 : Séries à paramètre et développements limités

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de $\sum_{n \geq 1} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1} \right)^\alpha$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de $\sum_{n \geq 1} n^\alpha \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$.
3. Montrez que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ pour $n \geq 1$, puis que $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{e}{2n}$. Nature de la série correspondante.
4. Soit $\alpha > 0$. Nature de $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \sin \frac{1}{n^\alpha}\right)$.

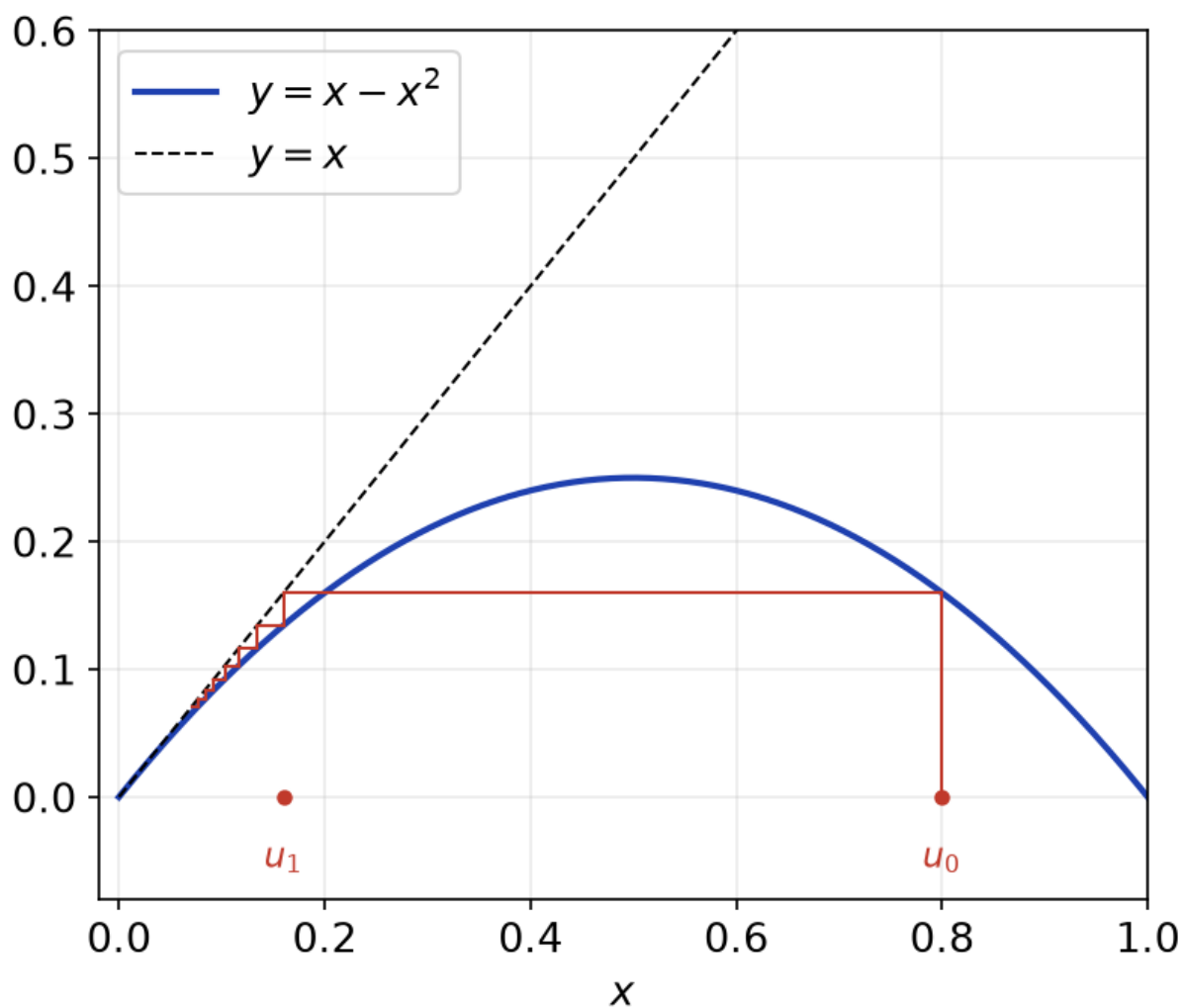
Exercice 17 : Calcul approché de e et irrationalité

On admet, grâce à la formule de Taylor, que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. On note $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

1. Retrouvez la convergence de la série par la règle de d'Alembert.
2. Montrez que, pour tout $n \geq 1$, $0 < e - S_n \leq \frac{1}{n \cdot n!}$. On majorera $\frac{1}{k!}$ pour $k \geq n+1$ par un terme d'une suite géométrique.
3. Quel rang n garantit une erreur inférieure à 10^{-6} ?
4. On suppose que $e = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers et $q \geq 2$. En étudiant $q! (e - S_q)$, aboutissez à une contradiction. Concluez.

Exercice 18 : Une suite récurrente et deux séries

Soit $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ pour $n \geq 0$. La figure ci-dessous montre la construction des premiers termes pour $u_0 = 0,8$.



1. Montrez que $u_n \in]0, 1[$ pour tout n , que (u_n) est décroissante et qu'elle tend vers 0 .
2. Montrez que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \rightarrow 1$.
3. Déduisez-en, par sommation des équivalents, que $u_n \sim \frac{1}{n}$.
4. Nature de $\sum u_n$.
5. Montrez que $\sum u_n^2$ converge et calculez sa somme.

Exercice 19 : Logarithme de la factorielle

1. En comparant $\ln k$ à des intégrales, montrez que, pour $n \geq 2$,

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - n + 1 - 2\ln 2.$$

2. Dédisez-en que $\ln(n!) \sim n \ln n$.

3. Montrez plus précisément que $\ln(n!) = n \ln n - n + O(\ln n)$.

4. Nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n!)}$ et de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln(n!))^2}$.

Exercice 20 : Critère de condensation de Cauchy

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite positive et décroissante.

1. Montrez que, pour tout $n \geq 0$, $2^n u_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k \leq 2^n u_{2^n}$.

2. Dédisez-en que $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

3. Retrouvez ainsi la nature des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 0$.

4. Soit $\beta > 0$. Retrouvez la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^\beta}$.

5. Nature de $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$.

Exercice 21 : Problème : développement asymptotique de la série harmonique

On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln n$ pour $n \geq 1$.

1. Montrez que $u_n - u_{n+1} = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1}$, puis que $u_n - u_{n+1} \geq 0$.
2. Montrez que $u_n - u_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$. Déduez-en que (u_n) converge. On note γ sa limite.
3. Montrez que $u_n - \gamma = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1})$.
4. À l'aide du théorème de sommation des équivalents et de l'exercice 13, montrez que $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$. Déduez-en que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
5. Nature des séries $\sum (H_n - \ln n - \gamma)$ et $\sum (H_n - \ln n - \gamma)^2$.
6. Montrez que $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2 - \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 22 : Problème : quand la règle de d'Alembert ne conclut pas

On pose $u_n = \frac{n^n}{n! e^n}$ pour $n \geq 1$.

1. Calculez $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et montrez que ce rapport tend vers 1. Que dit la règle de d'Alembert ?
2. Montrez que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
3. On pose $v_n = \sqrt{n} u_n$ et $w_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$. Montrez que $w_n \sim \frac{1}{12n^2}$.
4. Déduez-en que $(\ln v_n)$ converge, puis qu'il existe $L > 0$ tel que $u_n \sim \frac{L}{\sqrt{n}}$.
5. Nature de la série $\sum u_n$.
6. Déduez-en un équivalent de $n!$ en fonction de n et de L . On admet que $L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$: quelle formule obtenez-vous ?

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [séries à termes positifs, cours de maths en L2](#)
- Chapitre suivant : [Séries à termes quelconques](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)